Capítulo 4

Cálculo diferencial

4.1 Diferenciabilidad

Vamos a establecer una forma alternativa de describir la derivabilidad en una variable.

Proposición 4.1.1 Sean I un intervalo abierto, $a \in I$ y $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Son equivalentes

(i) f es derivable en a.

(ii) Existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - \alpha h}{h} = 0$$

(iii) Existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - \alpha h}{|h|} = 0$$

Además, en estas condiciones α es único y $\alpha = f'(a)$. $\triangleleft$

Utilizaremos la caracterización de la derivada de la Proposición 4.1.1 para extender la noción de derivada a funciones de varias variables. En este caso hablaremos de *diferenciabilidad* en vez de derivabilidad.

Definición 4.1.2 Sean $n, m \in \mathbb{N}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto, $\boldsymbol{a} \in A$ y $\boldsymbol{f} : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Diremos que $\boldsymbol{f}$ es *diferenciable* en $\boldsymbol{a}$ si existe una matriz J de tamaño $m \times n$ tal que

$$\lim_{\boldsymbol{h} \to \boldsymbol{0}} \frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) - \mathrm{J}\boldsymbol{h}}{||\boldsymbol{h}||} = \boldsymbol{0} \qquad (4.1)$$

$\triangleleft$

En las condiciones de la Proposición 4.1.2, vamos a intentar determinar cómo debe ser la matriz J.
Sea $\boldsymbol{E} = [\boldsymbol{e_1}, \ldots, \boldsymbol{e_n}]$ la base canónica de $\mathbb{R}^n$. De la igualdad (4.1) se deduce que los límites direccionales correspondientes a (4.1) respecto de cada uno de los vectores de $\boldsymbol{E}$ valen $\mathbf{0}$.
Por lo tanto si $j \in \{1 \ldots n\}$, $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n)$, $\boldsymbol{h} = (h_1, \ldots, h_n)$, $\boldsymbol{f} = (f_1, \ldots, f_n)$ y J_j es la columna j-esima de J, tenemos

$$\begin{aligned}\mathbf{0} &= \lim_{\substack{\boldsymbol{h}\to\mathbf{0}\\ \boldsymbol{h}=h\boldsymbol{e_j}}} \frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) - \mathrm{J}\boldsymbol{h}}{||\boldsymbol{h}||} = \lim_{h\to 0} \frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}+h\boldsymbol{e_j}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) - h\mathrm{J}\boldsymbol{e_j}}{||h\boldsymbol{e_j}||}\\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}+h\boldsymbol{e_j}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) - h\mathrm{J}_j}{|h|}.\end{aligned}$$

Utilizando la definición de límite y las propiedades de la norma se puede probar que

$$\lim_{h\to 0} \frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}+h\boldsymbol{e_j}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) - h\mathrm{J}}{|h|} = \lim_{h\to 0} \frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}+h\boldsymbol{e_j}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) - h\mathrm{J}}{h},$$

por lo que

$$\mathbf{0} = \lim_{h\to 0} \frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}+h\boldsymbol{e_j}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) - h\mathrm{J}_j}{h} = \lim_{h\to 0} \left(\frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}+h\boldsymbol{e_j}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})}{h} - \mathrm{J}_j \right).$$

Pero como J_j es constante respecto de h,

$$\lim_{h\to 0} \mathrm{J}_j = \mathrm{J}_j,$$

y por aritmética de límites,

$$\mathrm{J}_j = \lim_{h\to 0} \frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}+h\boldsymbol{e_j}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})}{h}.$$

Teniendo en cuenta que este límite se puede calcular compnente a componente y haciendo variar j entre 1 y n, tenemos que el elemento que ocupa la fila i y la columna j de J es

$$\lim_{h\to 0} \frac{\boldsymbol{f}_i(\boldsymbol{a}+h\boldsymbol{e_j}) - \boldsymbol{f}_i(\boldsymbol{a})}{h}, \tag{4.2}$$

que es un límite de los que se estudiaban en Matemáticas I.

Definición 4.1.3 Sean $n, m, j \in \mathbb{N}$ con $j \leq n$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto, $[\boldsymbol{e_1}, \ldots, \boldsymbol{e_n}]$ la base canónica de $\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{a} \in A$ y

$$\boldsymbol{f}: \begin{array}{rcl} A & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & \boldsymbol{f}(x_1, \ldots, x_n) \end{array}.$$

con componentes $\boldsymbol{f} = (f_1, \ldots, f_m)$.

1) Diremos que $\boldsymbol{f}$ es *derivable* respecto de la variable x_j si existe y es finito el siguiente límite
$$\lim_{h\to 0} \frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}+h\boldsymbol{e_j})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})}{h}.$$
A su valor le llamaremos *derivada parcial* de $\boldsymbol{f}$ respecto de x_j en $\boldsymbol{a}$ y la denotaremos por alguno de los símbolos siguientes
$$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_j}(\boldsymbol{a}),\ \boldsymbol{f}_{x_j}(\boldsymbol{a}).$$

2) Diremos que $\boldsymbol{f}$ es derivable en $\boldsymbol{a}$ si es derivable respecto de todas sus variables.

3) Si $\boldsymbol{f}$ es derivable en $\boldsymbol{a}$, llamaremos *matriz jacobiana* de $\boldsymbol{f}$ en $\boldsymbol{a}$ a la matriz $m \times n$, que denotaremos por $\mathrm{J}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$, siguiente
$$\mathrm{J}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\boldsymbol{a}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\boldsymbol{a}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\boldsymbol{a}) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\boldsymbol{a}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\boldsymbol{a}) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\boldsymbol{a}) \end{pmatrix} \tag{4.3}$$
Notaciones alternativas para la matriz jacobiana:
$$\mathrm{J}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) = \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial\left(x_1,\ldots,x_n\right)}(\boldsymbol{a}) = \frac{\partial\left(f_1,\ldots,f_n\right)}{\partial\left(x_1,\ldots,x_n\right)}(\boldsymbol{a})$$

4) Si $\boldsymbol{f}$ es derivable en $\boldsymbol{a}$ y $n=m$, llamaremos *jacobiano* de $\boldsymbol{f}$ en $\boldsymbol{a}$ al determinante de $\mathrm{J}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$.

5) Si $m=1$ y f es derivable en $\boldsymbol{a}$, entonces $\mathrm{J}f(\boldsymbol{a})$ es una matriz fila. Llamaremos *gradiente* de f en $\boldsymbol{a}$ a dicha matriz fila interpretada como un vector, es decir
$$\nabla f(\boldsymbol{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\boldsymbol{a}), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{a})\right)$$

6) Si $\boldsymbol{f}$ es diferenciable en $\boldsymbol{a}$, llamaremos *diferencial* de $\boldsymbol{f}$ en $\boldsymbol{a}$, y la denotaremos por$\mathbf{d}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$, a la aplicación lineal dada por la matriz $\mathrm{J}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$. Es decir
$$\begin{aligned} \mathbf{d}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) : R^n &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ \boldsymbol{x} &\longmapsto \mathrm{J}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) \end{aligned}.$$

$\triangleleft$

Propiedades 4.1.4 Sean $n, m, j \in \mathbb{N}$ con $j \leq n$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto, $[\boldsymbol{e_1}, \ldots, \boldsymbol{e_n}]$ la base canónica de $\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{a} \in A$ y

$$\boldsymbol{f} : \begin{array}{rcl} A & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & \boldsymbol{f}(x_1, \ldots, x_n) \end{array}.$$

con componentes $\boldsymbol{f} = (f_1, \ldots, f_m)$.

1) $\boldsymbol{f}$ es derivable en $\boldsymbol{a}$ si y sólo si todas sus componentes son derivables. Además para $j = 1 \ldots n$, las componentes de $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{a})$ son

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_j}(\boldsymbol{a}) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_j}(\boldsymbol{a}), \ldots, \frac{\partial f_m}{\partial x_j}(\boldsymbol{a}) \right),$$

y para $i = 1 \ldots m$ la fila i-esima de $\mathrm{J}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$ es $\mathrm{J}f_i(\boldsymbol{a})$.

2) Cada derivada parcial de una función escalar es un límite de los estudiados en la asignatura de Matemáticas I.

3) $\boldsymbol{f}$ es diferenciable si y sólo si todas sus componentes son diferenciables. Además las componentes de $\mathbf{d}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$ son las diferenciales de las componentes de $\boldsymbol{f}$, es decir

$$\mathbf{d}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) = (\mathbf{d}f_1(\boldsymbol{a}), \ldots, \mathbf{d}f_m(\boldsymbol{a}))$$

4) Si $\boldsymbol{f}$ diferenciable en entonces $\boldsymbol{f}$ es derivable.

5) El recíproco de la propiedad anterior no es cierto.

6) Si $\boldsymbol{f}$ diferenciable en entonces $\boldsymbol{f}$ es continua.

7) Una función derivable no tiene por qué ser continua.

8) El procedimiento para estudiar la diferenciabilidad de $\boldsymbol{f}$ en $\boldsymbol{a}$ sería el siguiente:

8.1) Primero estudiaríamos la derivabilidad de $\boldsymbol{f}$ en $\boldsymbol{a}$. Este estudio consiste en calcular nm límites de los que se estudiaban en Matemáticas I.

8.2) En caso de que $\boldsymbol{f}$ no sea derivable en $\boldsymbol{a}$, concluiríamos que $\boldsymbol{f}$ no es diferenciable en $\boldsymbol{a}$.

8.3) Si por el contrario $\boldsymbol{f}$ es derivable en $\boldsymbol{a}$, estudiaríamos el límite

$$\lim_{\boldsymbol{h} \to \boldsymbol{0}} \frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{h}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) - \mathrm{J}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})\boldsymbol{h}}{||\boldsymbol{h}||}.$$

$\boldsymbol{f}$ es diferenciable en $\boldsymbol{a}$ si y sólo si este límite existe y vale $\mathbf{0}$.

9) Las nociones de diferenciabilidad y diferencial generalizan las de derivabilidad y derivada respectivamente que se tenían para funciones de una variable.

◁

4.2 Diferenciabilidad y derivabilidad en un abierto

Definición 4.2.1 Sean $n, m, j \in \mathbb{N}$ con $j \leq n$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto, $\boldsymbol{a} \in A$ y

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f} : \quad & A \longrightarrow \mathbb{R}^m \\ (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto \boldsymbol{f}(x_1, \ldots, x_n) \end{aligned} .$$

1) Diremos que $\boldsymbol{f}$ es *derivable* en A respecto de x_j si $\boldsymbol{f}$ es derivable en $\boldsymbol{a}$ respecto de x_j para cada $\boldsymbol{a} \in A$.
En este caso tendremos una nueva función también definida en A llamada *derivada parcial* o simplemente *parcial* de $\boldsymbol{f}$ dada por

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_j} : A & \longrightarrow \mathbb{R}^m \\ \boldsymbol{a} & \longmapsto \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_j}(\boldsymbol{a}) \end{aligned} ,$$

a la que también podremos denotar por $\boldsymbol{f}_{x_j}$.

2) Diremos que $\boldsymbol{f}$ es *derivable* en A, si es derivable en $\boldsymbol{a}$ para cada $\boldsymbol{a} \in A$.

3) Diremos que $\boldsymbol{f}$ es *diferenciable* en A, si es diferenciable en $\boldsymbol{a}$ para cada $\boldsymbol{a} \in A$.

◁

4.2.1 Derivadas sucesivas

Sean $n, m, j, k \in \mathbb{N}$ con $j, k \leq n$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto, $\boldsymbol{a} \in A$ y

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f} : \quad & A \longrightarrow \mathbb{R}^m \\ (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto \boldsymbol{f}(x_1, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

derivable respecto de x_j en A. Supongamos que la función $\dfrac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_j}$ es derivable respecto de x_k en A. Entonces tendremos una nueva función definida en A a la que llamaremos derivada parcial (o simplemente parcial) de orden 2 de $\boldsymbol{f}$ respecto de x_j y x_k dada por

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \boldsymbol{f}}{\partial x_j \partial x_k} : A & \longrightarrow \mathbb{R}^m \\ \boldsymbol{a} & \longmapsto \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_j}\right)(\boldsymbol{a}) \end{aligned} .$$

También se puede llamar a esta función parcial dos veces de $\boldsymbol{f}$ respecto de x_j y x_k. Otra notación válida para esta función será

$$\boldsymbol{f}_{x_j x_k}.$$

Si esta nueva función fuese derivable en A respecto de otra variable x_h, podríamos obtener otra nueva función siguiendo el mismo procedimiento. Podremos iterar el proceso siempre que sigamos teniendo derivabilidad en A respecto de alguna variable en cada paso. De esta forma, Si $p \in \mathbb{N}$, siempre que tenga sentido, tendremos

1) Si podemos derivar sucesivamente f respecto de las variables $x_{j_1}, \ldots, x_{j_p}$, en A, llamaremos a la función definida en A así obtenida parcial de orden p de $\boldsymbol{f}$ respecto de las variables $x_{j_1}, \ldots, x_{j_p}$ o bien parcial p veces de $\boldsymbol{f}$ respecto de las variables $x_{j_1}, \ldots, x_{j_p}$ y se denotará por

$$\frac{\partial^p \boldsymbol{f}}{\partial x_{j_1} \cdots \partial x_{j_p}}.$$

o por

$$\boldsymbol{f}_{x_{j_1} \cdots x_{j_p}}.$$

2) La notación para una misma variable repetida p veces

$$\frac{\partial^p \boldsymbol{f}}{\partial x_j \cdots \partial x_j},$$

se abreviará como

$$\frac{\partial^p \boldsymbol{f}}{\partial x_j^p}.$$

3) Este tipo de abreviatura se podrá usar cuando tengamos una misma variable repetida de manera consecutiva entre otras variables. Por ejemplo

$$\frac{\partial^8 \boldsymbol{f}}{\partial x \partial y \partial y \partial y \partial z \partial x \partial x \partial y},$$

se escribirá como

$$\frac{\partial^8 \boldsymbol{f}}{\partial x \partial y^3 \partial z \partial x^2 \partial y},$$

4) Si $\boldsymbol{f}$ tiene por componentes $f_1, \ldots, f_m$, entonces las componentes de

$$\frac{\partial^p \boldsymbol{f}}{\partial x_{j_1} \cdots \partial x_{j_p}}.$$

son

$$\frac{\partial^p f_1}{\partial x_{j_1} \cdots \partial x_{j_p}}, \frac{\partial^p f_2}{\partial x_{j_1} \cdots \partial x_{j_p}}, \ldots, \frac{\partial^p f_m}{\partial x_{j_1} \cdots \partial x_{j_p}}.$$

Definición 4.2.2 Sean $n, m, p \in \mathbb{N}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto, $\boldsymbol{a} \in A$ y $\boldsymbol{f} : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Diremos que $\boldsymbol{f}$ es de clase $\mathcal{C}^p$ en A, denotado por $\boldsymbol{f} \in \mathcal{C}^p A$ si existen todas las derivadas parciales de $\boldsymbol{f}$ desde orden 1 hasta p y todas son continuas en A. ◁

Nota 4.2.3 Con las notaciones de la Definición 4.2.2, extenderemos la notación

1) $\boldsymbol{f} \in \mathcal{C}^0(A)$ significa que $\boldsymbol{f}$ es continua en A.

2) $\boldsymbol{f} \in \mathcal{C}^\infty(A)$ significa que existen todas las parciales de cualquier orden de $\boldsymbol{f}$ y todas son continuas en A.

◁

Proposición 4.2.4 Sean $n, m \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto, $\boldsymbol{a} \in A$ y $\boldsymbol{f} : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$ con componentes $f_1, \ldots, f_m$. Entonces

$$\boldsymbol{f} \in \mathcal{C}^p(A) \Longleftrightarrow f_j \in \mathcal{C}^p(A),\ \forall\, j \in \{1, 2, \ldots, m\}.$$

◁

Teorema 4.2.5 [Teorema de Schwarz]
Sean $n, m \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ con $p > 1$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto, $\boldsymbol{a} \in A$ y $\boldsymbol{f} : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$ con $\boldsymbol{f} \in \mathcal{C}^p(A)$. Entonces se puede intercambiar el orden de derivación en todas las derivadas de orden 2 hasta p. ◁

Si tuviéramos, por ejemplo que $\boldsymbol{f} \in \mathcal{C}^8(A)$, entonces

$$\frac{\partial^8 \boldsymbol{f}}{\partial x \partial y \partial y \partial y \partial z \partial x \partial x \partial y} = \frac{\partial^8 \boldsymbol{f}}{\partial x \partial x \partial x \partial y \partial y \partial y \partial y \partial z} = \frac{\partial^8 \boldsymbol{f}}{\partial x^3 \partial y^4 \partial z}.$$

Proposición 4.2.6 [Condición suficiente de diferenciabilidad]
Sean $n, m \in \mathbb{N}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto y $\boldsymbol{f} : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Se tiene

$$\boldsymbol{f} \in \mathcal{C}^1(A) \Longrightarrow \boldsymbol{f} \text{ es diferenciable en } A.$$

◁

Nota 4.2.7

1) El recíproco de la Proposición 4.2.6 no es cierto en general.

2) La mayor parte de las funciones que manejaremos serán al menos de clase $\mathcal{C}^1$

◁

Corolario 4.2.8 Sean $n, m \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto, $\boldsymbol{a} \in A$ y $\boldsymbol{f} : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$ con $\boldsymbol{f} \in \mathcal{C}^p(A)$. Entonces $\boldsymbol{f}$ es continua en A, o expresado de otra manera, $\boldsymbol{f} \in \mathcal{C}^0(A)$. ◁

Por tanto, si $\boldsymbol{f} \in \mathcal{C}^p(A)$, entonces $\boldsymbol{f} \in \mathcal{C}^q(A)$ para cada $q \leq p$.

4.2.2 Cálculo de derivadas

Sean $n, j, m \in \mathbb{N}$ con $j \leq n$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto, $\boldsymbol{a} \in A$ y

$$\begin{array}{rrcl} \boldsymbol{f}: & A & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ & (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & \boldsymbol{f}(x_1, \ldots, x_n) \end{array}.$$

Cuando se puedan utilizar las reglas de derivación en una variable para la expresión de $\boldsymbol{f}$, considerando dicha expresión como si fuera una función sólo de la variable x_j y tomando el resto como parámetros, la expresión resultante será $\dfrac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_j}$ en los puntos en los que esté bien definida.

Ejemplo 4.2.9 Consideramos

$$f(x, y, z) = \cos(2x + 3y)e^{xy^2z^3} + 4y^2z.$$

Tendremos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= -2\operatorname{sen}(2x + 3y)e^{xy^2z^3} + y^2z^3\cos(2x + 3y)e^{xy^2z^3}, \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= -3\operatorname{sen}(2x + 3y)e^{xy^2z^3} + 2xyz^3\cos(2x + 3y)e^{xy^2z^3} + 8yz, \\
\frac{\partial f}{\partial z} &= 3xy^2z^2\cos(2x + 3y)e^{xy^2z^3} + 4y^2. \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \\
&= -6\cos(2x + 3y)e^{xy^2z^3} - 4xyz^3\operatorname{sen}(2x + 3y)e^{xy^2z^3} + \\
&+ 2yz^3\cos(2x + 3y)e^{xy^2z^3} - 3y^2z^3\operatorname{sen}(2x + 3y)e^{xy^2z^3} + \\
&+ 2xy^3z^6\cos(2x + 3y)e^{xy^2z^3} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \\
&= -6\cos(2x + 3y)e^{xy^2z^3} - 3y^2z^3\operatorname{sen}(2x + 3y)e^{xy^2z^3} + \\
&+ 2yz^3\cos(2x + 3y)e^{xy^2z^3} - 4xyz^3\operatorname{sen}(2x + 3y)e^{xy^2z^3} + \\
&+ 2xy^3z^6\cos(2x + 3y)e^{xy^2z^3} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) 6xy^2z\cos(2x + 3y)e^{xy^2z^3} + 9x^2y^4z^4\cos(2x + 3y)e^{xy^2z^3}
\end{aligned}$$

$\triangleleft$

Nota 4.2.10 Con las notaciones anteriores, si $\boldsymbol{f} \in \mathcal{C}^1(A)$, podemos definir la matriz de funciones

$$\mathrm{J}\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \tag{4.4}$$

Cuando se evalúa dicha matriz en cada punto $\boldsymbol{a} \in A$, se tiene exactamente la matriz jacobiana de $\boldsymbol{f}$ en $\boldsymbol{a} \in A$, con lo cual no hay ambigüedad con la notación $\mathrm{J}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$.

Podemos proceder de la misma manera para el gradiente en caso de que la función f sea escalar

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$$

◁

Ejemplo 4.2.11 Sea $\boldsymbol{f}(x,y) = \left(xy^2, y + \cos x, e^{x-y^3}\right)$. Tendremos que

$$\mathrm{J}\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} y^2 & 2xy \\ -\operatorname{sen} x & 1 \\ e^{x-y^3} & -3y^2 e^{x-y^3} \end{pmatrix}$$

y que

$$\mathrm{J}\boldsymbol{f}(0,1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ e^{-1} & -3e^{-1} \end{pmatrix}$$

◁

4.3 Interpretación geométrica de la diferencial

Definición 4.3.1 Sean $n, m \in \mathbb{N}$, A un abierto de $\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{a} \in A$ y

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f} : A &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ \boldsymbol{x} &\longmapsto \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \end{aligned},$$

diferenciable en $\boldsymbol{a}$.
Sea la función auxiliar

$$\begin{aligned} \boldsymbol{T} : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ \boldsymbol{x} &\longmapsto \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) + \mathbf{d}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) \end{aligned},$$

1) Llamaremos *variedad tangente* a graf $\boldsymbol{f}$ en $\boldsymbol{a}$ (o en $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}))$) al grafo de la aplicación $\boldsymbol{T}$, es decir al conjunto de $\mathbb{R}^{n+m}$

$$\operatorname{graf} \boldsymbol{T} = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \,/\, \boldsymbol{z} = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})\}\,.$$

2) Llamaremos *variedad tangente* a sop $\boldsymbol{f}$ en $\boldsymbol{a}$ (o en $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$) al soporte de la aplicación T, es decir al conjunto de $\mathbb{R}^m$

$$\operatorname{sop} \boldsymbol{T} = \{\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^m \,/\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n\}\,.$$

3) Sean $G \subseteq A$ el lugar geométrico de los puntos que anulan $\boldsymbol{f}$,

$$G = \{\boldsymbol{x} \in A \,/\, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}\}\,,$$

y $\boldsymbol{a} \in G$. Llamaremos *variedad tangente* a G en $\boldsymbol{a}$ a

$$\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \,/\, \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}\}$$

◁

Para los casos representables gráficamente presentados en las Secciones 2.2.1 y 2.2.2, las variedades tangentes son rectas tangentes para las figuras que son curvas y planos tangentes para las figuras que son superficies, y tienen el significado geométrico habitual de tangencia.

También para los puntos de las curvas y superficies de los Ejercicios 1.3 y 1.4 dados por igualdades, las variedades tangentes son las rectas y planos tangentes en el sentido habitual

En la práctica la expresión de $\boldsymbol{T}$ se maneja a través de la matriz jacobiana

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) + \mathrm{J}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}).$$

4.4 Cambio de variable

Teorema 4.4.1 [Regla de la cadena]
Sean $p, n, m \in \mathbb{N}$, $A \subseteq \mathbb{R}^p$ y $B \subseteq \mathbb{R}^n$ abiertos, $\boldsymbol{a} \in A$ $\boldsymbol{g} : A \longrightarrow B \subseteq \mathbb{R}^n$ diferenciable en $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{f} : B \longrightarrow \mathbb{R}^m$ diferenciable en $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{a})$. Entonces $\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g}$ es diferenciable en a y además

$$\mathrm{J}(\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g})(\boldsymbol{a}) = \mathrm{J}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{a}))\mathrm{J}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{a}).$$

Por tanto se tiene también que

$$\mathbf{d}(\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g})(\boldsymbol{a}) = \mathbf{d}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{a})) \circ \mathbf{d}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{a}).$$

◁

Nota 4.4.2 Adoptaremos las notaciones del Teorema 4.4.1. Supondremos además que $\boldsymbol{g} \in \mathcal{C}^1(A)$ y $\boldsymbol{f} \in \mathcal{C}^1(B)$. Denotemos por $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_p)$ a las variables de $\boldsymbol{g}$ y por $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ las variables de $\boldsymbol{f}$ y tomemos $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g}$.

1) Tenemos que

$$\mathrm{J}\boldsymbol{h} = \mathrm{J}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}))\mathrm{J}\boldsymbol{g}.$$

Podemos considerar además que

$$\mathrm{J}\boldsymbol{h} = \mathrm{J}\boldsymbol{f}\mathrm{J}\boldsymbol{g},$$

si una vez efectuado el producto de matrices hacemos $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{y})$ en las expresiones resultantes. Este último será el criterio que seguiremos si no se especifica lo contrario.

2) Para cada $j = 1, \ldots, m$, sean p_j la j-ésima proyección de $\mathbb{R}^m$, f_j la componente j-ésima de $\boldsymbol{f}$ y h_j la componente j-ésima de $\boldsymbol{h}$. Se tiene que

$$h_j = p_j \circ \boldsymbol{h} = p_j \circ (\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g}) = (p_j \circ \boldsymbol{f}) \circ \boldsymbol{g} = f_j \circ \boldsymbol{g},$$

lo que nos permite afirmar que la componente j-ésima de $\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g}$ se obtiene componiendo $\boldsymbol{g}$ con la componente j-ésima de $\boldsymbol{f}$. Por lo tanto, en lo que sigue vamos a considerar que $m = 1$, es decir que $\boldsymbol{f} \equiv f$ es una función escalar, por lo que $\boldsymbol{h} \equiv h$ también será escalar.

Debido a la relación aquí descrita y a que las derivadas parciales pueden ser calculadas por componentes, todas las fórmulas que obtendremos a continuación para $m = 1$, serán formalmente iguales para $m > 1$.

$\triangleleft$

Asumamos ahora todas las notaciones, convenios y consideraciones de la Nota 4.4.2. Además escribiremos $\boldsymbol{g} = (g_1, \ldots, g_n)$ en términos de sus componentes. Desarrollando la igualdad

$$\mathrm{J}h = \mathrm{J}f\mathrm{J}\boldsymbol{g},$$

se tiene

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial h}{\partial y_1} & \dfrac{\partial h}{\partial y_2} & \cdots & \dfrac{\partial h}{\partial y_p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial g_1}{\partial y_2} & \cdots & \dfrac{\partial g_1}{\partial y_p} \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial g_2}{\partial y_2} & \cdots & \dfrac{\partial g_2}{\partial y_p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial g_n}{\partial y_1} & \dfrac{\partial g_n}{\partial y_2} & \cdots & \dfrac{\partial g_n}{\partial y_p} \end{pmatrix}.$$

Haciendo el producto de matrices e igualando componente a componente, la anterior igualdad matricial es equivalente a

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{\partial h}{\partial y_1} = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}\dfrac{\partial g_1}{\partial y_1} + \dfrac{\partial f}{\partial x_2}\dfrac{\partial g_2}{\partial y_1} + \cdots + \dfrac{\partial f}{\partial x_n}\dfrac{\partial g_n}{\partial y_1} \\ \dfrac{\partial h}{\partial y_2} = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}\dfrac{\partial g_1}{\partial y_2} + \dfrac{\partial f}{\partial x_2}\dfrac{\partial g_2}{\partial y_2} + \cdots + \dfrac{\partial f}{\partial x_n}\dfrac{\partial g_n}{\partial y_2} \\ \cdots\cdots \\ \dfrac{\partial h}{\partial y_p} = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}\dfrac{\partial g_1}{\partial y_p} + \dfrac{\partial f}{\partial x_2}\dfrac{\partial g_2}{\partial y_p} + \cdots + \dfrac{\partial f}{\partial x_n}\dfrac{\partial g_n}{\partial y_p} \end{cases}}. \tag{4.5}$$

que son las fórmulas con las que normalmente se aplica la regla de la cadena. Podrían obtenerse fórmulas para las derivadas de orden superior a partir de éstas, pero en general son inmanejables, por lo que se prefiere en la práctica ir aplicando sucesivamente estas fórmulas de orden uno a cada caso concreto.

Un caso particular de gran importancia en el que se aplican estas fórmulas es el del *cambio de variable*. Se tiene entonces $n = p$ y se entiende que la expresión

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}), \tag{4.6}$$

denota el cambio de variables de $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ a $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ y la función $h(\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}))$ es la que resulta de hacer dicho cambio a $f(\boldsymbol{x})$. Cuando se manejan cambios de variable, es habitual denotar las componentes de $\boldsymbol{g}$ por $(x_1, \ldots, x_n)$ en vez de por $(g_1, \ldots, g_n)$. Con estas notaciones, y desarrollando la fórmula del cambio (4.6), tendríamos

$$\begin{cases} x_1 = x_1(y_1, \ldots, y_n) \\ x_2 = x_2(y_1, \ldots, y_n) \\ \cdots \\ x_n = x_n(y_1, \ldots, y_n) \end{cases} \tag{4.7}$$

Esto puede parecer confuso, pues cada símbolo x_j se utiliza para denotar dos cosas distintas. Sin embargo es muy útil, pues permite interpretar cada *antigua* variable x_j como algo que a su vez depende de las *nuevas* variables $(y_1, \ldots, y_n)$ y sobre todo, porque permite escribir las fórmulas de cambio de variable para las derivadas parciales que se siguen de (4.5) de una manera muy sencilla de recordar y utilizar

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{\partial h}{\partial y_1} = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}\dfrac{\partial x_1}{\partial y_1} + \dfrac{\partial f}{\partial x_2}\dfrac{\partial x_2}{\partial y_1} + \cdots + \dfrac{\partial f}{\partial x_n}\dfrac{\partial x_n}{\partial y_1} \\ \dfrac{\partial h}{\partial y_2} = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}\dfrac{\partial x_1}{\partial y_2} + \dfrac{\partial f}{\partial x_2}\dfrac{\partial x_2}{\partial y_2} + \cdots + \dfrac{\partial f}{\partial x_n}\dfrac{\partial x_n}{\partial y_2} \\ \cdots\cdots \\ \dfrac{\partial h}{\partial y_n} = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}\dfrac{\partial x_1}{\partial y_n} + \dfrac{\partial f}{\partial x_2}\dfrac{\partial x_2}{\partial y_n} + \cdots + \dfrac{\partial f}{\partial x_n}\dfrac{\partial x_n}{\partial y_n} \end{cases}}. \tag{4.8}$$

No existe ninguna ambigüedad en estas fórmulas. En ellas se sabe perfectamente cuándo cada x_j debe ser interpretada como una variable y cuándo como una función que depende de $\boldsymbol{y}$.

Finalmente, se suele realizar una simplificación más. Si f representa a la función en las variables antiguas, h representa a la misma función en las variables nuevas. Obviamente las expresiones de f y h no tienen por qué coincidir, pero de alguna manera representan al mismo objeto visto desde dos perspectivas diferentes. Por eso a menudo se identifica $h \equiv f$, y las fórmulas (4.8) se escriben entonces como

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial y_1} = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}\dfrac{\partial x_1}{\partial y_1} + \dfrac{\partial f}{\partial x_2}\dfrac{\partial x_2}{\partial y_1} + \cdots + \dfrac{\partial f}{\partial x_n}\dfrac{\partial x_n}{\partial y_1} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y_2} = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}\dfrac{\partial x_1}{\partial y_2} + \dfrac{\partial f}{\partial x_2}\dfrac{\partial x_2}{\partial y_2} + \cdots + \dfrac{\partial f}{\partial x_n}\dfrac{\partial x_n}{\partial y_2} \\ \cdots\cdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial y_n} = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}\dfrac{\partial x_1}{\partial y_n} + \dfrac{\partial f}{\partial x_2}\dfrac{\partial x_2}{\partial y_n} + \cdots + \dfrac{\partial f}{\partial x_n}\dfrac{\partial x_n}{\partial y_n} \end{cases}}. \tag{4.9}$$

Tampoco hay ninguna duda en cuáles son las partes de la fórmula en las que f debe ser interpretada en unas variables y cuáles son aquéllas en las que debe ser interpretada como una función en las otras.

Las consideraciones que se hicieron para las derivadas de orden superior después de presentar las fórmulas 4.5, siguen siendo válidas aquí.

Otra ventaja de esta última formulación es que si el cambio de variable es inversible, es decir, si las variables $\boldsymbol{y}$ se pueden despejar en función de las variables $\boldsymbol{x}$,

$$\begin{cases} y_1 = y_1(x_1, \ldots, x_n) \\ y_2 = y_2(x_1, \ldots, x_n) \\ \cdots \\ y_n = y_n(x_1, \ldots, x_n) \end{cases},$$

entonces las expresiones del cambio de variable para las derivadas parciales son completamente simétricas,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} = \dfrac{\partial f}{\partial y_1}\dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial f}{\partial y_2}\dfrac{\partial y_2}{\partial x_1} + \cdots + \dfrac{\partial f}{\partial y_n}\dfrac{\partial y_n}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2} = \dfrac{\partial f}{\partial y_1}\dfrac{\partial y_1}{\partial x_2} + \dfrac{\partial f}{\partial y_2}\dfrac{\partial y_2}{\partial x_2} + \cdots + \dfrac{\partial f}{\partial y_n}\dfrac{\partial y_n}{\partial x_2} \\ \cdots\cdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n} = \dfrac{\partial f}{\partial y_1}\dfrac{\partial y_1}{\partial x_n} + \dfrac{\partial f}{\partial y_2}\dfrac{\partial y_2}{\partial x_n} + \cdots + \dfrac{\partial f}{\partial y_n}\dfrac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{cases}.$$

Por supuesto, las fórmulas de cambio de variable siguen siendo válidas para funciones vectoriales.

Ejemplo 4.4.3 Realizar el cambio de variables polares centradas en $(0,0)$

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

con $\rho \in (0,\infty)$ y $\theta \in [0,2\pi)$, al sistema de ecuaciones en derivadas parciales

$$\begin{cases} y\dfrac{\partial f}{\partial x} - x\dfrac{\partial f}{\partial y} = 1 \\ x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = x^2 + y^2 \end{cases}$$

Las fórmulas de cambio de variable para las derivadas parciales son en este caso

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial \rho} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial \rho} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial \rho} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\cos\theta + \dfrac{\partial f}{\partial y}\operatorname{sen}\theta \\ \dfrac{\partial f}{\partial \theta} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial \theta} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial x}{\partial \theta} = -\dfrac{\partial f}{\partial x}\rho\operatorname{sen}\theta + \dfrac{\partial f}{\partial y}\rho\cos\theta \end{cases},$$

y despejando obtenemos

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial \rho}\cos\theta - \dfrac{\partial f}{\partial \theta}\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\rho} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial \rho}\operatorname{sen}\theta + \dfrac{\partial f}{\partial \theta}\dfrac{\cos\theta}{\rho} \end{cases},$$

y sustituyendo en las ecuaciones donde debemos hacer el cambio

$$\begin{cases} \rho \operatorname{sen}\theta \left(\dfrac{\partial f}{\partial \rho} \cos\theta - \dfrac{\partial f}{\partial \theta} \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\rho} \right) - \rho\cos\theta \left(\dfrac{\partial f}{\partial \rho} \operatorname{sen}\theta + \dfrac{\partial f}{\partial \theta} \dfrac{\cos\theta}{\rho} \right) = 1 \\ \rho \cos\theta \left(\dfrac{\partial f}{\partial \rho} \cos\theta - \dfrac{\partial f}{\partial \theta} \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\rho} \right) + \rho\operatorname{sen}\theta \left(\dfrac{\partial f}{\partial \rho} \operatorname{sen}\theta + \dfrac{\partial f}{\partial \theta} \dfrac{\cos\theta}{\rho} \right) = \rho^2 \end{cases}$$

y simplificando, se obtiene

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial \theta} = -1 \\ \dfrac{\partial f}{\partial \rho} = \rho \end{cases}$$

$\triangleleft$

4.5 Extremos absolutos

Veremos como calcular extremos absolutos (ver 2.5) para ciertas funciones escalares de varias variables. Sea $n \in \mathbb{N}$

Definición 4.5.1 Sean $n \in \mathbb{R}^n$ y $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Diremos que A admite un *descomposición admisible* si puede expresarse como

$$A = A_1 \cup \cdots \cup A_s,$$

donde cada conjunto $A_j \neq \emptyset$ y se puede describir con desigualdades estrictas y/o igualdades. $\triangleleft$

Algoritmo 4.5.2 En lo que sigue supondremos que $n \in \mathbb{N}$, $K \subseteq A \subseteq \mathbb{R}^n$ con A abierto y K compacto que admite una descomposición admisible y que $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función de clase $\mathcal{C}^2$ en A. Para calcular los extremos absolutos de f en K, se puede seguir el siguiente procedimiento.

1) Realizamos una descomposición admisible para K,

$$K = K_1 \cup \cdots \cup K_s.$$

2) Construir un subconjunto $P \subseteq \mathbb{R}^n$ de la siguiente forma. Para cada $j = 1, 2 \ldots, s$

2.1) Si en la definición de K_j sólo aparecen desigualdades estrictas, entonces añadir a P las soluciones de

$$\frac{\partial f}{\partial (x_1, \ldots, x_n)} = \mathbf{0},$$

que cumplan las desigualdades que aparezcan en la definición de K_j

2.2) Si en la definición de K_j aparecen igualdades, despejar hasta convertirlas todas en igualdades a 0. Supongamos que quedan

$$\phi_1(\boldsymbol{x}) = 0, \ldots, \phi_r(\boldsymbol{x}) = 0.$$

Construir la función auxiliar

$$F(x_1, \ldots, x_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_r) = f(\boldsymbol{x}) + \alpha_1 \phi_1(\boldsymbol{x}) + \cdots + \alpha_r \phi_r(\boldsymbol{x}),$$

Resolver el sistema de ecuaciones

$$\frac{\partial F}{\partial\,(x_1, \ldots, x_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_r)} = \boldsymbol{0},$$

y para cada solución, tomar sólo la parte que corresponde a las variables $(x_1, \ldots, x_n)$. Si esta parte cumple las desigualdades estrictas que pudieran aparecer en la definición de K_j, añadirla a P.

3) Sea

$$V = f(P) = \{f(\boldsymbol{a}) \,/\, \boldsymbol{a} \in P\}.$$

4) Obtener $m = \min V$ y $M = \max V$.

5) Los mínimos absolutos buscados son

$$\{\boldsymbol{a} \in P \,/\, f(\boldsymbol{a}) = m\}.$$

6) Los máximos absolutos buscados son

$$\{\boldsymbol{a} \in P \,/\, f(\boldsymbol{a}) = M\}.$$

◁

Nota 4.5.3

1) Si se añaden a P puntos adicionales de K, el algoritmo sigue proporcionando el resultado correcto. En particular si algún K_j se reduce a una cantidad finita de puntos, se añadirán sin más a P.

2) En los problemas que manejaremos, P será casi siempre un conjunto finito. En caso de no serlo, presentará propiedades que permitan completar el algoritmo.

◁

Ejemplo 4.5.4 Calcularemos los extremos absolutos de la función

$$f(x,y,z) = x + y + z,$$

en el conjunto compacto

$$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x^2 + y^2 - 2z^2 \leq 6,\ 0 \leq z \leq 2\}.$$

1) Obtengamos una descomposición admisible de K. Examinemos las condiciones que definen K:

$$x^2 + y^2 - 2z^2 \leq 6 \to \begin{cases} x^2 + y^2 - 2z^2 < 6 \\ x^2 + y^2 - 2z^2 = 6 \end{cases}$$

$$0 \leq z \to \begin{cases} z > 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$z \leq 2 \to \begin{cases} z < 2 \\ z = 2 \end{cases}$$

Se trata de tomar todas las posibles combinaciones de $<$ e $=$, tomando siempre exactamente una de cada uno de los tres grupos anteriores. Tendríamos así los siguientes conjuntos

1.1) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x^2 + y^2 - 2z^2 < 6,\ z > 0,\ z < 2\}$. Este conjunto no es vacío, así que será K_1 en nuestra descomposición

1.2) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x^2 + y^2 - 2z^2 < 6,\ z > 0,\ z = 2\}$, es un conjunto no vacío, pero la condición $z > 0$ es redundante y la podemos suprimir, por lo que $K_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x^2 + y^2 - 2z^2 < 6,\ z = 2\}$.

1.3) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x^2 + y^2 - 2z^2 < 6,\ z = 0,\ z < 2\}$, es no vacío y podemos suprimir la condición $z < 2$.
Así $K_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x^2 + y^2 - 2z^2 < 6,\ z = 0\}$.

1.4) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x^2 + y^2 - 2z^2 = 6,\ z > 0,\ z < 2\}$, es no vacío y le llamaremos K_4

1.5) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x^2 + y^2 - 2z^2 < 6,\ z = 0,\ z = 2\}$. Las condiciones $z = 0$ y $z = 2$ son contradictorias, por lo que este conjunto es vacío, así que no forma parte de nuestra descomposición.

1.6) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x^2 + y^2 - 2z^2 = 6,\ z > 0,\ z = 2\}$, se puede escribir como $K_5 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x^2 + y^2 - 2z^2 = 6,\ z = 2\}$

1.7) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x^2 + y^2 - 2z^2 = 6,\ z = 0,\ z < 2\}$. A partir de aquí, tomaríamos $K_6 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x^2 + y^2 - 2z^2 = 6,\ z = 0\}$

1.8) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x^2 + y^2 - 2z^2 = 6,\ z = 0,\ z = 2\} = \emptyset$ por lo que lo desechamos.

2) Construcción del conjunto P. Procedamos con cada uno de los conjuntos $K_1, K_2, K_3, K_4, K_5, K_6$.

2.1) $K_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x^2 + y^2 - 2z^2 < 6,\ z > 0,\ z < 2\}$. Para este conjunto debemos resolver el sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 1 = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 1 = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} = 1 = 0, \end{cases}$$

y tomar aquellas que verifiquen las desigualdades que definen K_1, pero obviamente el sistema no tiene soluciones, por lo que este caso no aporta nada al conjunto P.

2.2) $K_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x^2 + y^2 - 2z^2 < 6,\ z = 2\}$. Convertimos $z = 2$ en $z - 2 = 0$ y construimos la función auxiliar

$$F(x,y,z,\alpha) = f(x,y,z) + \alpha(z-2) = x + y + z + \alpha(z-2).$$

Tenemos que resolver el sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = 1 = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = 1 = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial z} = 1 + \alpha = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial \alpha} = z - 2 = 0, \end{cases}$$

y tendríamos que quedarnos con la parte en x, y, z de las soluciones que además verificasen $x^2 + y^2 - 2z^2 < 6$, pero el sistema no tiene ninguna solución.

2.3) $K_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x^2 + y^2 - 2z^2 < 6,\ z = 0\}$. Construimos la función auxiliar

$$F(x,y,z,\alpha) = f(x,y,z) + \alpha z = x + y + z + \alpha z.$$

Tenemos que resolver el sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = 1 = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = 1 = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial z} = 1 + \alpha = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial \alpha} = z = 0, \end{cases}$$

que no tiene ninguna solución.

2.4) $K_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x^2 + y^2 - 2z^2 = 6,\ z > 0,\ z < 2\}$. Convertimos $x^2 + y^2 - 2z^2 = 6$ en $x^2 + y^2 - 2z^2 - 6 = 0$ y construimos la función auxiliar

$$F(x, y, z, \alpha) = x + y + z + \alpha(x^2 + y^2 - 2z^2 - 6).$$

Tenemos que resolver el sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = 1 + 2\alpha x = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = 1 + 2\alpha y = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial z} = 1 - 4\alpha z = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial \alpha} = x^2 + y^2 - 2z^2 - 6 = 0, \end{cases}$$

cuyas únicas soluciones son $(x, y, z, \alpha) = (2, 2, -1, -1/4)$ y $(x, y, z, \alpha) = (-2, -2, 1, 1/4)$. Por tanto las soluciones en (x, y, z) son $(2, 2, -1)$ y $(-2, -2, 1)$, de las cuales la única que verifica $z > 0$ y $z < 2$ es $(-2, -2, 1)$, punto que añadimos al conjunto P.

2.5) $K_5 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x^2 + y^2 - 2z^2 = 6,\ z = 2\}$.
Convertimos $x^2 + y^2 - 2z^2 = 6$ en $x^2 + y^2 - 2z^2 - 6 = 0$ y $z = 2$ en $z - 2 = 0$. Construimos la función auxiliar

$$F(x, y, z, \alpha, \beta) = x + y + z + \alpha(x^2 + y^2 - 2z^2 - 6) + \beta(z - 2),$$

y resolvemos el sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = 1 + 2\alpha x = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = 1 + 2\alpha y = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial z} = 1 - 4\alpha z + \beta = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial \alpha} = x^2 + y^2 - 2z^2 - 6 = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial \beta} = z - 2 = 0, \end{cases}$$

cuyas únicas soluciones en (x, y, z) son $\left(\sqrt{7}, \sqrt{7}, 2\right)$ y $\left(-\sqrt{7}, -\sqrt{7}, 2\right)$, que debemos añadir a P porque no tenemos desigualdades estrictas adicionales que se deban verificar.

2.6) $K_6 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x^2 + y^2 - 2z^2 = 6,\ z = 0\}$.
Convertimos $x^2 + y^2 - 2z^2 = 6$ en $x^2 + y^2 - 2z^2 - 6 = 0$. Construimos la función auxiliar

$$F(x, y, z, \alpha, \beta) = x + y + z + \alpha(x^2 + y^2 - 2z^2 - 6) + \beta z,$$

y resolvemos el sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = 1 + 2\alpha x = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = 1 + 2\alpha y = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial z} = 1 - 4\alpha z + \beta = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial \alpha} = x^2 + y^2 - 2z^2 - 6 = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial \beta} = z = 0, \end{cases}$$

cuyas únicas soluciones en (x, y, z) son $\left(\sqrt{3}, \sqrt{3}, 0\right)$ y $\left(-\sqrt{3}, -\sqrt{3}, 0\right)$, que debemos añadir a P porque no tenemos desigualdades estrictas adicionales que se deban verificar.

Así tenemos que el conjunto P es

$$\left\{(-2,-2,1)\,,\left(\sqrt{7},\sqrt{7},2\right),\left(-\sqrt{7},-\sqrt{7},2\right),\left(\sqrt{3},\sqrt{3},0\right),\left(-\sqrt{3},-\sqrt{3},0\right)\right\}$$

3) Calculemos V

$$\begin{aligned}
&f(-2,-2,1)=-3,\\
&f(\sqrt{7},\sqrt{7},2)=2+2\sqrt{7},\\
&f(-\sqrt{7},-\sqrt{7},2)=2-2\sqrt{7},\\
&f(\sqrt{3},\sqrt{3},0)=2\sqrt{3},\\
&f(-\sqrt{3},-\sqrt{3},0)=-2\sqrt{3},
\end{aligned}$$

de donde

$$V=\left\{-3,2+2\sqrt{7},2-2\sqrt{7},2\sqrt{3},-2\sqrt{3}\right\}.$$

4) Así $m=-2\sqrt{3}$ y $M=2+2\sqrt{7}$.

5) Sólo hay un mínimo absoluto, que es $\left(-\sqrt{3},-\sqrt{3},0\right)$.

6) Sólo hay un máximo absoluto, que es $\left(\sqrt{7},\sqrt{7},2\right)$.

◁

4.6 Teoría de Taylor

4.6.1 Diferenciales de orden superior

Definición 4.6.1 Sean $n,m,k\in\mathbb{N}$, $A\subseteq\mathbb{R}^n$ un abierto $\boldsymbol{a}\in A$ y

$$\begin{aligned}\boldsymbol{f}:A&\longrightarrow\mathbb{R}^m\\ \boldsymbol{x}&\longmapsto\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\end{aligned}\,,$$

de clase $\mathcal{C}^k$ en A. Llamaremos *diferencial* de orden k de $\boldsymbol{f}$ en $\boldsymbol{a}$ a la aplicación

$$\begin{aligned}\mathbf{d}^k\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}):\mathbb{R}^n&\longrightarrow\mathbb{R}^m\\ \boldsymbol{h}&\longmapsto\sum_{i_1}^{n}\sum_{i_2}^{n}\cdots\sum_{i_k}^{n}\frac{\partial^k\boldsymbol{f}}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_k}}(\boldsymbol{a})h_{i_1}\cdots h_{i_k}\end{aligned}$$

◁

Proposición 4.6.2 Sean $n, m, k \in \mathbb{N}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto $\boldsymbol{a} \in A$ y $\boldsymbol{f} \in \mathcal{C}^k(A)$ con componentes $f_1, \ldots, f_m$. Las componentes de $\mathbf{d}^k \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$ son

$$\mathbf{d}^k f_1(\boldsymbol{a}), \mathbf{d}^k f_2(\boldsymbol{a}), \ldots, \mathbf{d}^k f_m(\boldsymbol{a})$$

◁

Nota 4.6.3

1) Por convenio $\mathbf{d}^0 \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{h}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$, $\forall\, \boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^n$

2) $\mathbf{d}^1 \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) = \mathbf{d}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$.

3) Debido a la Proposición 4.6.2, en lo que sigue sólo trataremos el caso escalar.

4) La fórmula de la diferencial de orden k no es útil para calcularla en la práctica, así que desarrollaremos un algoritmo más sencillo para su obtención.

◁

Algoritmo 4.6.4 Supongamos que estamos en las condiciones de la Definición 4.6.1 con $m = 1$. Para obtener $\mathbf{d}^k f(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{h})$, realizaremos las siguientes operaciones:

1) Construir la función auxiliar $g(t) = f(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{h})$.

2) Se tiene que $\mathbf{d}^k f(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{h}) = g^{(k)}(0)$.

3) Habitualmente se agrupa en potencias de

$$h_1, \ldots, h_n,$$

aunque esto no sea estrictamente necesario.

◁

Ejemplo 4.6.5 Para la función $f(x, y) = x^3 + y^2 + xy^2$, calcular $\mathbf{d}^1 f(1, 2)(h, k)$, $\mathbf{d}^2 f(1, 2)(h, k)$ y $\mathbf{d}^3 f(1, 2)(h, k)$.
Primero construimos

$$g(t) = f((1, 2) + t\,(h, k)) = f(1 + th, 2 + tk) = (1 + th)^3 + (2 + tk)^2 + (1 + th)(2 + tk)^2$$

1) Aunque $\mathbf{d}^1 f(1, 2)(h, k)$ es la diferencial y es muy sencillo calcularla directamente, utilizaremos el algoritmo para ver que funciona correctamente en este caso.

$$\begin{aligned} g'(t) &= 3h(1 + th)^2 + 2k(2 + tk) + h(2 + tk)^2 + 2k(1 + th)(2 + tk) \\ &= h\left(3(1 + th)^2 + (2 + tk)^2\right) + 2k(2 + tk)(2 + th), \end{aligned} \tag{4.10}$$

por lo que

$$\mathbf{d}^1 f(1, 2)(h, k) = g'(0) = 7h + 8k.$$

2) A partir de la expresión (4.10), calculamos

$$\begin{aligned} g''(t) &= h\left(6h(1+th) + 2k(2+tk)\right) + 2k\left(k(2+th) + h(2+tk)\right) \\ &= 6h^2(1+th) + 4hk(2+tk) + 2k^2(2+th) \end{aligned} \tag{4.11}$$

de donde

$$\mathbf{d}^2 f(1,2)(h,k) = g''(0) = 6h^2 + 8hk + 4k^2$$

3) A partir de la expresión (4.11), calculamos

$$g'''(t) = 6h^3 + 4hk^2 + 2hk^2 = 6h^3 + 6hk^2$$

de donde

$$\mathbf{d}^3 f(1,2)(h,k) = g'''(0) = 6h^3 + 6hk^2$$

◁

4.6.2 El polinomio de Taylor

Definición 4.6.6 Sean $n, k \in \mathbb{N}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto $\boldsymbol{a} \in A$ y

$$f : A \longrightarrow \mathbb{R}\ ,$$

de clase $\mathcal{C}^{k+1}$ en A. Llamaremos *polinomio de Taylor* de orden k de f en $\boldsymbol{a}$ a la expresión

$$P_{k,\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{a}) + \frac{\mathbf{d}f(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})}{1!} + \frac{\mathbf{d}^2 f(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})}{2!} + \cdots + \frac{\mathbf{d}^k f(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})}{k!}.$$

◁

Teorema 4.6.7 [Teorema de Taylor]
Sean $n, k \in \mathbb{N}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto $\boldsymbol{a} \in A$ y

$$f : A \longrightarrow \mathbb{R}\ ,$$

de clase $\mathcal{C}^{k+1}$ en A. Sea $\boldsymbol{x} \in A$ tal que

$$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}] = \{\alpha\boldsymbol{a} + (1-\alpha)\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \,/\, \alpha \in [0,1]\} \subseteq A.$$

Entonces existe $\boldsymbol{\theta} \in [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}]$ tal que

$$f(\boldsymbol{x}) = P_{k,\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x}) + \frac{\mathbf{d}^{k+1} f(\boldsymbol{\theta})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})}{(k+1)!}.$$

Llamaremos a la expresión

$$R_{k,\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x}) = \frac{\mathbf{d}^{k+1} f(\boldsymbol{\theta})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})}{(k+1)!},$$

el *resto de Taylor* de orden k de f en $\boldsymbol{a}$. ◁

Propiedades 4.6.8 Con las notaciones de la Definición 4.6.6 y del Teorema 4.6.7:

1) $P_{k,\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x})$ es un polinomio de grado menor o igual que k.

2) Hay que dejar $P_{k,\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x})$ agrupado en potencias de

$$x_1 - a_1,\ x_2 - a_2,\ \dots,\ x_n - a_n.$$

3) Si f es un polinomio de grado r, entonces su polinomio de Taylor de orden $k \geq r$ en $\boldsymbol{a}$ coincide con el propio polinomio f pero agrupado en potencias de

$$x_1 - a_1,\ x_2 - a_2,\ \dots,\ x_n - a_n.$$

4) $P_{k,\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x})$ es una aproximación a $f(\boldsymbol{x})$ para cada $\boldsymbol{x}$ *cerca* de $\boldsymbol{a}$:

$$f(\boldsymbol{x}) \approx P_{k,\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x}).$$

5) Se tiene que

$$f(\boldsymbol{x}) - P_{k,\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x}) = R_{k,\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x}).$$

Por lo tanto el resto de Taylor *mide* la bondad de la aproximación, pero es desconocido, pues $\boldsymbol{\theta}$ no se conoce exactamente.

◁

Ejemplo 4.6.9 Sea $f(x,y) = e^x \operatorname{sen} y$. Calcular el polinomio de Taylor y el resto de orden 2 de f en $(0,0)$.
Tenemos que

$$f(x,y) = f(0,0) + \mathbf{d}f(0,0) + \frac{\mathbf{d}^2 f(0,0)(x,y)}{2!} + \frac{\mathbf{d}^3 f(\theta,\eta)(x,y)}{3!}. \tag{4.12}$$

Una posible estrategia podría ser

$$\mathbf{d}^i f(a,b)(h,k),\ i = 1,2,3,$$

y luego sustituir en los puntos correspondientes para aplicar la fórmula (4.12). Sea

$$g(t) = f((a,b) + t\,(h,k)) = e^{a+th} \operatorname{sen}(b+tk).$$

Derivando

$$\begin{aligned}
g'(t) &= e^{a+th}\left(h \operatorname{sen}(b+tk) + k\cos(b+tk)\right),\\
g''(t) &= e^{a+th}\big((h^2-k^2)\operatorname{sen}(b+tk) + 2hk\cos(b+tk)\big),\\
g'''(t) &= e^{a+th}\big((h^3-3hk^2)\operatorname{sen}(b+tk) + (3h^2k-k^3)\cos(b+tk)\big),
\end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned}
\mathbf{d}^1 f(a,b)(h,k) &= g'(0) = e^a\left(h \operatorname{sen} b + k\cos b\right),\\
\mathbf{d}^2 f(a,b)(h,k) &= g''(0) = e^a\big((h^2-k^2)\operatorname{sen} b + 2hk\cos b\big),\\
\mathbf{d}^3 f(a,b)(h,k) &= g'''(0) = e^a\big((h^3-3hk^2)\operatorname{sen} b + (3h^2k-k^3)\cos b\big),
\end{aligned}$$

por lo que

$$\begin{aligned}
\mathbf{d}^1 f(0,0)(x,y) &= y,\\
\mathbf{d}^2 f(0,0)(x,y) &= 2xy,\\
\mathbf{d}^3 f(\theta,\eta)(x,y) &= e^\theta\left((x^3-3xy^2)\operatorname{sen}\eta + (3x^2y-y^3)\cos\eta\right)\\
&= x^3e^\theta \operatorname{sen}\eta + 3x^2ye^\theta\cos\eta - 3xy^2e^\theta\operatorname{sen}\eta - y^3e^\theta\cos\eta,
\end{aligned}$$

y la fórmula de Taylor con resto queda

$$f(x) = y + xy + \frac{e^\theta \operatorname{sen}\eta}{6}x^3 + \frac{e^\theta\cos\eta}{2}x^2y - \frac{e^\theta\operatorname{sen}\eta}{2}xy^2 - \frac{e^\theta\cos\eta}{6}y^3.$$

◁

4.6.2.1 Cálculo del polinomio de Taylor

Si sólo tuviéramos que calcular el polinomio de Taylor, sin el resto, podríamos seguir una estrategia similar a la del Ejemplo 4.6.9.

Ejemplo 4.6.10 Calculemos el polinomio de Taylor de orden 3 en $(1,2)$ de la función $f(x,y) = x^3 + y^2 + xy^2$. Haríamos los mismos cálculos del Ejemplo 4.6.5, de donde resultaba

$$\begin{aligned}
\mathbf{d}^1 f(1,2)(h,k) &= 7h + 8k,\\
\mathbf{d}^2 f(1,2)(h,k) &= 6h^2 + 8hk + 4k^2,\\
\mathbf{d}^3 f(1,2)(h,k) &= 6h^3 + 6hk^2,
\end{aligned}$$

por lo que

$$\begin{aligned}
\mathbf{d}^1 f(1,2)(x-1,y-2) &= 7(x-1) + 8(y-2),\\
\mathbf{d}^2 f(1,2)(x-1,y-2) &= 6(x-1)^2 + 8(x-1)(y-2) + 4(y-2)^2,\\
\mathbf{d}^3 f(1,2)(x-1,y-2) &= 6(x-1)^3 + 6(x-1)(y-2)^2,
\end{aligned}$$

fórmulas que se pueden sustituir directamente en la del polinomio de Taylor, obteniéndose que dicho polinomio será

$$9+7(x-1)+8(y-2)+3(x-1)^2+4(x-1)(y-2)+2(y-2)^2+(x-1)^3+(x-1)(y-2)^2.$$

◁

Sin embargo, para estos casos en los que sólo haya que calcular el polinomio de Taylor, es conveniente formular un algoritmo mejorado, en una de cuyas fases se podrán utilizar todas las técnicas que teníamos para el cálculo de polinomios de Taylor en una variable.

Algoritmo 4.6.11 Supongamos que estamos en las condiciones de la Definición 4.6.6. Para obtener $P_{k,\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x})$, realizaremos las siguientes operaciones:

1) Construir la función auxiliar $g(t) = f(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{h})$.

2) Construir el polinomio de Taylor de orden k de g en 0, al que denotaremos por $Q(t)$. En esta fase se pueden utilizar todas las técnicas para el cálculo de polinomios de Taylor en una variable, ya que t es la única variable. Los símbolos h_i, $i = 1, \dots, n$ en esta fase se consideran parámetros.

3) Sea $P(\boldsymbol{h}) = Q(1)$. Agrupar $P(\boldsymbol{h})$ en potencias de $h_1, \dots, h_n$.

4) El polinomio $P(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})$ es el polinomio de Taylor buscado.

$\triangleleft$

Ejemplo 4.6.12

$$f(x, y) = \frac{1}{2x - y}.$$

Vamos a calcular el polinomio de Taylor de orden 4 de f en $(1, 1)$.

1) Construimos la función auxiliar

$$g(t) = f((1, 1) + t\,(h, k)) = \frac{1}{2 + 2th - 1 - tk} = \frac{1}{1 - (k - 2h)t}.$$

2) Para construir el polinomio de Taylor de $g(t)$ en $t = 0$, tengamos en cuenta que el polinomio de Taylor de orden 4 de

$$\frac{1}{1 - s},$$

es

$$1 + s + s^2 + s^3 + s^4,$$

por lo que, aplicando propiedades de los polinomios de Taylor en una variable, tendremos que el polinomio de Taylor de orden 4 de g en 0 es

$$Q(t) = 1 + (k - 2h)t + (k - 2h)^2t^2 + (k - 2h)^3t^3 + (k - 2h)^4t^4.$$

3) Sea

$$\begin{aligned} P(h,k) &= Q(1) = 1 + (k-2h) + (k-2h)^2 + (k-2h)^3 + (k-2h)^4 \\ &= 1 - 2h + k + 4h^2 - 4hk + k^2 - 8h^3 + 12h^2k - 6hk^2 + k^3 \\ &\quad + 16h^4 - 32h^3k + 24h^2k^2 - 8hk^3 + k^4 \end{aligned}$$

4) El polinomio buscado es

$$\begin{aligned} P(x-1, y-1) = {} & 1 - 2(x-1) + (y-1) + 4(x-1)^2 - 4(x-1)(y-1) \\ & + (y-1)^2 - 8(x-1)^3 + 12(x-1)^2(y-1) \\ & - 6(x-1)(y-1)^2 + (y-1)^3 + 16(x-1)^4 \\ & - 32(x-1)^3(y-1) + 24(x-1)^2(y-1)^2 \\ & - 8(x-1)(y-1)^3 + (y-1)^4 \end{aligned}$$

$\triangleleft$

4.7 Ejercicios

Ejercicio 4.1 Calcular las derivadas parciales de

$$f(x,y,z) = x^2 \operatorname{sen}(y+2z),$$

en $(3, \pi, 0)$.

a) Utilizando la definición.

b) Utilizando las reglas automáticas de derivación y evaluando.

Ejercicio 4.2 Calcular la expresión de todas las derivadas parciales de

$$f(x,y,z) = e^{x+y} \operatorname{sen}(xy) + zx^2y,$$

hasta orden 3, si es posible y especificar el dominio de cada función obtenida.

Ejercicio 4.3 En los siguientes casos, calcular $\mathrm{J}\boldsymbol{f}$ y decir dónde es válida su expresión. Calcular $\mathrm{J}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$. En los casos en los que tenga sentido, calcular el jacobiano de $\boldsymbol{f}$ en $\boldsymbol{a}$. También cuando tenga sentido, calcular ∇f y $\nabla f(\boldsymbol{a})$.

a) $\boldsymbol{f}(x,y,z) = \left(x^2 \operatorname{sen}(y+2z), ye^x\right)$, $\boldsymbol{a} = (3, \pi, 0)$.

b) $\boldsymbol{f}(x,y) = \left(x^2 \operatorname{sen} y, ye^x\right)$, $\boldsymbol{a} = (3, \pi)$.

c) $f(x,y) = y^2 + e^y \operatorname{arc\,tg} x$, $\boldsymbol{a} = (1,0)$.

d) $f(x,y,z) = e^{x+y} \operatorname{sen}(xy) + zx^2y$, $\boldsymbol{a} = (\pi/2, 1/2, 1)$.

e) $f(x,y) = \log(x+y)$, $\boldsymbol{a} = (1,1)$.

f) $f(x,y) = x^3 + y^2 + xy^2$, $\boldsymbol{a} = (1,2)$.

g) $\boldsymbol{f}(x,y,z) = (e^x, \operatorname{sen}(x+y), e^z)$, $\boldsymbol{a} = (0,0,0)$.

h) $f(x,y) = y + x^2 + \operatorname{tg}(xy) + \displaystyle\int_0^{\operatorname{sen}(x^2+y^2)} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$, $\boldsymbol{a} = (0,0)$.

i) $\boldsymbol{f}(x,y,z) = \big(x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y, (x+z^2)e^{x(y^2+z^2+1)}\big)$, $\boldsymbol{a} = (0,1,1)$.

j) $\boldsymbol{f}(x,y,z) = \big(x\log x + y\log y + z\log z, \log x + \log y + 3\log z, x^2+y^2+z^2\big)$, $\boldsymbol{a} = \big(e, 1/e, e^2\big)$.

Ejercicio 4.4 Para cada función $\boldsymbol{f}$ estudiar su continuidad, diferenciabilidad y la existencia y continuidad de sus derivadas parciales en los lugares indicados.

a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$,
en $(0,0)$.

b) $f(x,y,z) = ye^{xy} + z$, en $\mathbb{R}^3$.

c) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y^4}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$,
en $(0,0)$.

d) $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2) \operatorname{sen} \dfrac{1}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$,
en $(0,0)$.

e) $f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$,
en $(0,0)$. En este caso, calcular además, si es posible

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0),\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0).$$

f) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x}{x^2+y^2}\operatorname{sen}x, & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases},$
en $(0,0)$.

g) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x\,|y|}{||(x,y)||}, & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases},$
en $(0,0)$.

h) $\boldsymbol{f}(x,y)=\begin{cases}\left(e^{x+y},\operatorname{sen}(x-y),x^2\operatorname{sen}(1/x)\right), & \text{si } x\neq 0\\ \left(e^{y},-\operatorname{sen}y,0\right), & \text{si } x=0\end{cases},$
en $(0,0)$.

i) $\boldsymbol{f}(x,y,z)=\begin{cases}\left(\cos(yz),xyz,1/z\right), & \text{si } z\neq 0\\ \left(1,0,0\right), & \text{si } z=0\end{cases},$
en $(0,0,0)$.

j) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{(xy)^{4/3}}{(x^2+y^2)^{\alpha}}, & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases},$
en $\mathbb{R}^2$, donde $\alpha\in\mathbb{R}$.

k) $f(x,y)=\begin{cases}(x+y)^n\operatorname{sen}\dfrac{1}{||(x,y)||}, & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases},$
en $(0,0)$, donde $n\in\mathbb{N}$.

l) $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\operatorname{sen}\dfrac{1}{||(x,y)||}, & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases},$
en $(0,0)$.

m) $f(x,y)=\begin{cases}xy\operatorname{sen}\dfrac{1}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases},$
en $(0,0)$.

n) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2\,|y|}{||(x,y)||}, & \text{si } y\geq -x,\ (x,y)\neq(0,0)\\ \dfrac{xy}{2}\operatorname{sen}\dfrac{1}{||(x,y)||}, & \text{si } y<-x\\ 0, & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases},$

en $(0,0)$.

o) $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$ en $(0,0)$.

p) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}^2(x+y)}{x+y}, & \text{si } x+y \neq 0 \\ 0, & \text{si } x+y = 0 \end{cases},$

en $(0,0)$.

q) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases},$

en $(0,0)$.

Ejercicio 4.5 Sean $n, m \in \mathbb{N}$, A un abierto de $\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{f} : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una función y $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$ con $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}$. Diremos que $\boldsymbol{f}$ es *derivable* en $\boldsymbol{a}$ respecto del vector $\boldsymbol{u}$ si existe y es finito el siguiente límite

$$\lim_{h\to 0} \frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}+h\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})}{h}.$$

A su valor le llamaremos *derivada* de $\boldsymbol{f}$ en $\boldsymbol{a}$ respecto de $\boldsymbol{u}$ y la denotaremos por alguno de los símbolos siguientes

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{u}}(\boldsymbol{a}),\ \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{a}).$$

Si además $||\boldsymbol{u}|| = 1$, entonces llamaremos a lo anterior *derivada direccional* de $\boldsymbol{f}$ en $\boldsymbol{a}$ respecto de $\boldsymbol{u}$.

a) Probar que si $\boldsymbol{f}$ es diferenciable en $\boldsymbol{a}$, entonces

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{u}}(\boldsymbol{a}) = \mathrm{J}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})\boldsymbol{u}.$$

b) Sean

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 \operatorname{sen} y + y^2 \operatorname{sen} x}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$\boldsymbol{a} = (0,0)$, $\boldsymbol{u} = (1,2)$. Calcular $\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{u}}(\boldsymbol{a})$.

c) Para $\boldsymbol{f}(x,y,z) = \big(x^2 \operatorname{sen}(y+2z), ye^x\big)$, calcular la derivada de $\boldsymbol{f}$ respecto del vector $(1,2,-1)$ en $(3,\pi,0)$.

Ejercicio 4.6 Escribir, si es posible, la ecuación de la recta tangente a la figuras siguientes en los puntos indicados.

a) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, 2x+3y=0\}$, en $(3,-2)$.

b) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, 2x^2+3y^2=1\}$, en $\left(1/\sqrt{2},0\right)$ y en $\left(1/3,\sqrt{7}/(3\sqrt{3})\right)$.

c) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, 2x^2-3y^2=1\}$, en $\left(1/\sqrt{2},0\right)$ y en $\left(1,1/\sqrt{3}\right)$.

d) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, 2x^2-3y^2=0\}$, en $\left(\sqrt{3},\sqrt{2}\right)$ y en $(0,0)$.

e) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, y-2x^2=0\}$, en $(0,0)$ y en $(1,2)$.

f) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, y^2+3x=0\}$, en $(0,0)$ y en $(-3,3)$.

g) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, (x+1)^2+(y-1)^2=9\}$, en $(2,1)$, en $\left(0,1+\sqrt{8}\right)$ y en $(-1,4)$.

h) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, x^2+y^2-4(x+y)=-4\}$, en $\left(2-\sqrt{3},1\right)$ y en $(0,2)$.

i) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, 4x^2+y^2-8x-4y=-4\}$, en $(0,2)$ y en $(1,0)$.

j) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, x+2=4y^2\}$, en $(-2,0)$ y en $(2,-1)$.

Ejercicio 4.7 Escribir, si es posible, la ecuación del plano tangente a la figuras siguientes en los puntos indicados.

a) $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, 2x+y-z=1\}$, en $(1,-1,0)$.

b) $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, z=x^2+2y^2\}$, en $(1,2,9)$ y en $(0,0,0)$.

c) $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, x^2+y^2+z^2=16\}$, en $(0,4,0)$ y en $\left(2,2,2\sqrt{2}\right)$.

d) $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, (x-1)^2+2(y-1)^2+4(z-2)^2=16\}$, en $\left(3,1+\sqrt{6},2\right)$ y en $(1,1,4)$.

e) $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, x^2+y^2-z^2=1\}$, en $\left(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2},0\right)$ y en $\left(\sqrt{3},\sqrt{2},2\right)$.

f) $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, x^2+y^2=16\}$, en $\left(3,\sqrt{7},0\right)$ y en $\left(3,\sqrt{7},3\right)$.

g) $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, x^2+y^2-z^2=0\}$, en $\left(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2},1\right)$ y en $(0,0,0)$.

h) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x^2 - y^2 - z = 0\}$, en $(1, 1, 0)$, en $(2, 1, 3)$ y en $(0, 0, 0)$.

i) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, z^2 - x^2 - y^2 = 1\}$, en $(1, 0, 0)$, en $(-1, 0, 0)$ y en $(2, 2, 3)$.

Ejercicio 4.8 Sean

$$\boldsymbol{f}(x, y, z) = \left(\operatorname{sen}(xy + z), \left(1 + x^2\right)^{yz}\right),$$

y

$$\boldsymbol{g}(u, v) = (u + e^v, v + e^u).$$

a) Probar que $\boldsymbol{f}$ es diferenciable en $(1, -1, 1)$ y calcular $\mathrm{J}\boldsymbol{f}(1, -1, 1)$.

b) Probar que $\boldsymbol{g}$ es diferenciable en $(0, 1/2)$ y calcular $\mathrm{J}\boldsymbol{g}(0, 1/2)$.

c) Calcular $\mathrm{J}(\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f})(1, -1, 1)$.

Ejercicio 4.9 Sea $g(x, y)$ la función obtenida al aplicar el cambio de variable

$$(u, v) = \left(x + y, xy^2\right),$$

a $f(u, v)$. Calcular $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(1, 1)$ sabiendo que

$$\frac{\partial f}{\partial v}(2, 1) = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(2, 1) = \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(2, 1) = \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(2, 1) = 1.$$

Se supone que f es de clase $\mathcal{C}^2$.

Ejercicio 4.10 Transformar

$$x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = z^2,$$

haciendo el cambio de variables independientes

$$u = x,\ v = \frac{1}{y} - \frac{1}{x}$$

y el cambio de variable dependiente

$$w = \frac{1}{z} - \frac{1}{x}.$$

Ejercicio 4.11 Transformar

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

con $a \neq 0$ haciendo el cambio de variables independientes

$$\alpha = x - at,\ \beta = x + at.$$

Ejercicio 4.12 Transformar

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

haciendo el cambio de variables independientes

$$x = e^u,\ y = e^v,$$

con $x > 0$, $y > 0$.

Ejercicio 4.13 Transformar

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0,$$

haciendo el cambio de variables independientes

$$u = \frac{x}{y},\ v = xy.$$

Ejercicio 4.14 El beneficio anual de una empresa es

$$B(x, y) = 6 - 6x - y^2,$$

con $x, y \in \mathbb{R}$ parámetros económicos que verifican $x^2 + y^2 = 1$. Determinar los valores de x, y para que el beneficio sea máximo.

Ejercicio 4.15 Un alambre de longitud L se corta en dos trozos de longitudes a y b. Con un trozo se hace una cuadrado y con el otro una circunferencia. ¿Cómo ha de cortarse el alambre para que la suma de las áreas de las dos figuras sea máxima? ¿Y para que sea mínima?

Ejercicio 4.16 La cilindrada de un motor de explosión es $n\pi x^2 y/4$, siendo n el número de cilindros, x el diámetro e y la carrera. Se quiere desarrollar una nueva familia de motores de 6 cilindros y 2430 cm^3, cuyo par motor máximo viene dado por

$$23 + \cos\left(\frac{\pi y x^2 (x-1)}{1620}\right).$$

Por razones constructivas, los cilindros deberán tener un diámetro mayor o igual que 2π y una carrera mayor o igual que $180\pi^{-3}$. Determinar el valor del diámetro para que el motor proporcione un par máximo lo más elevado posible.

Ejercicio 4.17 Hallar la longitud de los lados del triángulo isósceles de perímetro 1 que tiene área máxima.

Ejercicio 4.18 Calcular los extremos absolutos de $f(x, y, z) = x^2+y^2+z^2-2z-1$ en el conjunto

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, 4x^2 + y^2 \leq 4,\ 0 \leq z \leq 2\}$$

Ejercicio 4.19 Calcular los extremos absolutos de $f(x, y) = x(y + 1)$ en el conjunto

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2 + y^2 \leq 1\}$$

Ejercicio 4.20 Calcular los extremos absolutos de $f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + z^2 - xy$ en el conjunto

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, 4x^2 + 2y^2 + z^2 \leq 8\}$$

Ejercicio 4.21 Calcular los extremos absolutos de

$$f(x, y) = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

en el conjunto

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, (x - 5)^2 + y^2 = 1\}$$

Ejercicio 4.22 Una placa cuya forma viene dada por los puntos (x, y) tales que $x^2 + y^2 \leq 1$ presenta en cada punto una distribución de temperaturas dada por $t(x, y) = x^2 + 2y^2 - x$. Ver cuáles son lo puntos más calientes o fríos de la placa y obtener la temperatura en cada uno de ellos.

Ejercicio 4.23 Se descubre un planeta esférico de radio 6. La fuerza de su campo magnético es $M(x, y, z) = 6x - y^2 + xz + 60$ en un sistema coordenado fijo centrado en el centro del planeta. Calcular el lugar de la superficie del planeta donde situar un radiotelescopio para que sufra la menor interferencia magnética posible.

Ejercicio 4.24 Una sala tiene forma de media esfera de radio 4 y su distribución de temperaturas en °C es

$$T(x, y, z) = \frac{1}{8}(x^2 + 2y^2 + z^2 - xz + A),$$

donde $A > 0$ es un parámetro del sistema de calefacción. Calcular el valor de A para que la temperatura en cualquier punto de la sala no sea inferior a 18 °C ni superior a 22 °C. El sistema de coordenadas tiene su centro en el centro del suelo de la sala.

Ejercicio 4.25 Calcular las distancias máxima y mínima de la elipse

$$5x^2 + 6xy + 5y^2 = 8,$$

al punto $(0,0)$.

Ejercicio 4.26 Se dice que en una ocasión durante la Primera Edad, encontrándose en Doriath, Beren, hijo de Barahir, decidió visitar al rey Thingol para intentar aclarar lo suyo con Lúthien. Thingol vivía en Menegroth a orillas del río Esgalduin, en el corazón del bosque de Doriath. Accedíase a Menegroth a través de una senda rectilínea que atravesaba Doriath, la cual distaba 20 km del lugar en el que se encontraba Beren. Si Beren se dirigiese directamente hacia la senda, por el camino más corto, al alcanzarla todavía se encontraría a 50 km de Menegroth. La velocidad que Beren podía alcanzar en el interior del bosque era de 9 km/h, mientras que por la senda podría desplazarse a 15 km/h. Por lo tanto ¿qué trayectoria debería seguir Beren para lograr entrevistarse con Thingol en el menor tiempo posible?

Ejercicio 4.27 El hangar de carga número 2 de la nave interplanetaria Coriolanus era un cubo de 12 metros de lado. Antes de la catástrofe, Momssen, comandante de la Coriolanus, decidió construir un recinto metálico de 2 m^3 sin tapa, con forma de prisma triangular y ajustado a uno de los rincones del hangar, con el fin de almacenar parte del cemento repara-fugas del reactor principal. Teniendo en cuenta que fue construido empleando la menor superficie posible de metal, ¿cuáles eran sus dimensiones?

Ejercicio 4.28 Probar que si $-4 \leq x \leq 0$ y $-3 \leq y \leq 1$, entonces

$$-11 \leq x^2 + 2xy - y^2 + 4x \leq 15.$$

Ejercicio 4.29 Sea $s > 0$ Expresar s como la suma de tres números $a, b, c > 0$ de forma que abc sea máximo.

Ejercicio 4.30 Calcular los puntos de la intersección de esfera de centro $(0,0,0)$ y radio 1 con el plano $x + y + z = 1$ cuya distancia a $(0,3,3)$ sea máxima y mínima.

Ejercicio 4.31 Calcular el polinomio de Taylor de orden 3 en $(1,1)$ de

$$f(x,y) = \log(x+y)$$

Ejercicio 4.32 Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$, con $c \neq 0$. Calcular el polinomio de Taylor de orden 1 en $(0,0,1)$ de

$$f(x,y,z) = ax - ye^{b-z} + \frac{\operatorname{sen}(x+y)}{c} + (a-b)z.$$

Para $a = 3$, $b = 1$ y $c = 2$, aproximar f en el punto $(-0{,}02, 0{,}03, 0{,}98)$ con el polinomio obtenido.

Ejercicio 4.33 Sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Calcular el polinomio de Taylor de orden 4 en $(0,0,0)$ de

$$f(x,y,z) = e^{\alpha(x+y+z)}.$$