# Capítulo 3

# Continuidad y Límites

## 3.1 Continuidad

### 3.1.1 Noción de continuidad

**Definición 3.1.1** Sean $n$, $m \in \mathbb{N}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y $\boldsymbol{a} \in A$ donde $\boldsymbol{a}$ no es un punto aislado de $A$. Diremos que una función

$$\boldsymbol{f} : A \longrightarrow \mathbb{R}^m \ ,$$

es *continua* en $\boldsymbol{a}$, si para cada entorno $V$ de $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$ existe un entorno $U$ de $\boldsymbol{a}$ tal que

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \in V, \ \forall \boldsymbol{x} \in U \cap A.$$

$\triangleleft$

**Proposición 3.1.2** En las condiciones de la Definición 3.1.1, si $\boldsymbol{a} \in B \subseteq A$ y $\boldsymbol{a}$ no es un punto aislado de $B$, entonces

$$\boldsymbol{f} \text{ continua en } \boldsymbol{a} \Longrightarrow \boldsymbol{f}|_B \text{ continua en } \boldsymbol{a}.$$

$\triangleleft$

El recíproco de la Proposición 3.1.2 no es cierto.

**Definición 3.1.3** Sean $n$, $m \in \mathbb{N}$ y $A \subseteq \mathbb{R}^n$ sin puntos aislados. Diremos que una función

$$\boldsymbol{f} : A \longrightarrow \mathbb{R}^m \ ,$$

es *continua* en $A$, si es continua en cada punto de $A$. $\triangleleft$

En las condiciones de la Definición 3.1.3, si decimos que $\boldsymbol{f}$ es continua, nos referiremos a que es continua en $A$

**Proposición 3.1.4** En las condiciones de la Definición 3.1.3, si $B \subseteq A$ y $B$ tampoco tiene puntos aislados, entonces

$$\boldsymbol{f} \text{ continua en } A \Longrightarrow \boldsymbol{f}|_B \text{ continua en } B.$$

◁

El recíproco de la Proposición 3.1.4 no es cierto.

## 3.1.2 Casos particulares

### 3.1.2.1 Funciones vectoriales

**Proposición 3.1.5** Sean $n$, $m \in \mathbb{N}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{a} \in A$ donde $\boldsymbol{a}$ no es un punto aislado de $A$,

$$\boldsymbol{f} : A \longrightarrow \mathbb{R}^m \ ,$$

una función y

$$f_1, \ldots, f_m : A \longrightarrow \mathbb{R} \ ,$$

sus componentes (ver Definición 2.4.2). Se tiene que

$$\boldsymbol{f} \text{ es continua en } \boldsymbol{a} \Longleftrightarrow f_1, \ldots, f_m \text{ son continuas en } \boldsymbol{a}.$$

◁

**Proposición 3.1.6** Sean $n$, $m \in \mathbb{N}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ sin puntos aislados,

$$\boldsymbol{f} : A \longrightarrow \mathbb{R}^m \ ,$$

una función y

$$f_1, \ldots, f_m : A \longrightarrow \mathbb{R} \ ,$$

sus componentes. Se tiene que

$$\boldsymbol{f} \text{ es continua en } A \Longleftrightarrow f_1, \ldots, f_m \text{ son continuas en } A.$$

◁

Las Proposiciones 3.1.5 y 3.1.6 nos permiten reducir el estudio de la continuidad de las funciones vectoriales al estudio de la continuidad de las funciones escalares. Por ello a partir de ahora trataremos sobre todo el caso de las funciones escalares.

### 3.1.2.2 Funciones constantes

Las funciones constantes definidas en conjuntos sin puntos aislados son continuas.

#### 3.1.2.3 Proyecciones

Las proyecciones de $\mathbb{R}^n$ (ver la Definición 2.4.1) son funciones continuas en $\mathbb{R}^n$.

### 3.1.3 Aritmética

Se tiene que

**1)** La suma de funciones continuas es continua.

**2)** El producto de funciones escalares continuas es continua.

**3)** La composición de funciones continuas es continua.

Éstas propiedades, junto con las de los casos particulares de 3.1.2 nos permiten establecer la continuidad de muchas funciones cuyas expresiones estén dadas mediante combinaciones de funciones elementales.

### 3.1.4 Propiedades

**Teorema 3.1.7 [Teorema de Weierstraß]**
Sean $n \in \mathbb{N}$, $K \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto compacto sin puntos aislados y $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Entonces $f$ tiene al menos un máximo absoluto y al menos un mínimo absoluto en $K$. ◁

### 3.1.5 Discontinuidades

**Definición 3.1.8** Sean $n$, $m \in \mathbb{N}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{a} \in A$ no siendo $\boldsymbol{a}$ un punto aislado de $A$ y

$$\boldsymbol{f} : A \longrightarrow \mathbb{R}^m \ ,$$

una función. Diremos que $\boldsymbol{a}$ es una *discontinuidad* de $\boldsymbol{f}$, si $\boldsymbol{f}$ no es continua en $\boldsymbol{a}$. ◁

La similitud entre la definición de continuidad para funciones de varias variables y funciones reales de variable real, puede inducir a pensar que el estudio y comportamiento de las discontinuidades es muy similar en ambos casos. En realidad esto no es cierto. El estudio de las discontinuidades de funciones de varias variables es muy complicado como veremos en la siguiente sección y aquí trataremos sólo algunos casos sencillos.

# 3.2 Límites

## 3.2.1 Noción de límite

**Definición 3.2.1** Sean $n$, $m \in \mathbb{N}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y $\boldsymbol{a}$ un punto de acumulación de $A$. Diremos que una función

$$\boldsymbol{f} : A \longrightarrow \mathbb{R}^m \ ,$$

tiene *límite* en $\boldsymbol{a}$ si existe $\boldsymbol{L} \in \mathbb{R}^m$ tal que para cada entorno $V$ de $\boldsymbol{L}$, existe un entorno reducido $U$ de $\boldsymbol{a}$ con

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \in V, \ \forall\, \boldsymbol{x} \in U \cap A.$$

En este caso se dirá que $\boldsymbol{L}$ es el límite de $\boldsymbol{f}$ cuando $\boldsymbol{x}$ tiende hacia $\boldsymbol{a}$, y se denotará por

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{L}.$$

$\triangleleft$

**Propiedades 3.2.2**

**1)** El límite de una función en un punto puede no existir.

**2)** El límite si existe es único.

**3)** El límite de una función en un punto $\boldsymbol{a}$ no depende del valor de la función en $\boldsymbol{a}$. De hecho la función no tiene por qué estar definida en $\boldsymbol{a}$, ya que un punto de acumulación de un conjunto no tiene por qué pertenecer a dicho conjunto.

$\triangleleft$

**Proposición 3.2.3** Sean $n$, $m \in \mathbb{N}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{a}$ un punto de acumulación de $A$,

$$\boldsymbol{f} : A \longrightarrow \mathbb{R}^m \ ,$$

y $B \subseteq A$, de forma que $\boldsymbol{a}$ es un punto de acumulación de $B$. Tenemos que

$$\text{Si existe } \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \text{ entonces también existe } \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \boldsymbol{f}|_B(\boldsymbol{x}).$$

En tal caso, además

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \boldsymbol{f}|_B(\boldsymbol{x}).$$

$\triangleleft$

El recíproco de la proposición 3.2.3, en general no es cierto.

**Proposición 3.2.4** Sean $n$, $m \in \mathbb{N}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ sin puntos aislados $\boldsymbol{a} \in A$ y

$$\boldsymbol{f} : A \longrightarrow \mathbb{R}^m \ ,$$

una función. Se tiene que

$$\boldsymbol{f} \text{ es continua en } \boldsymbol{a} \Longleftrightarrow \ \exists \lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}).$$

$\triangleleft$

La Proposición 3.2.4 sirve para evaluar límites en aquellos puntos en los que se pueda deducir directamente que la función es continua.

**Ejemplo 3.2.5**

$$\lim_{(x,y)\to(1,-1)} y \log(3x + y) = -\log 2$$

$$\lim_{(x,y,z)\to(1,0,1)} (x^2 y + z \operatorname{sen} y) = 1^2 \cdot 0 + 1 \cdot \operatorname{sen} 0 = 0$$

$\triangleleft$

Por otra parte sirve también para estudiar la continuidad por medio de límites en puntos en los que no se pueda establecer aquella de manera directa.

**Proposición 3.2.6** Sean $n$, $m \in \mathbb{N}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{a}$ un punto de acumulación de $A$,

$$\boldsymbol{f} : A \longrightarrow \mathbb{R}^m \ ,$$

una función y

$$f_1, \ldots, f_m : A \longrightarrow \mathbb{R} \ ,$$

sus componentes. Se tiene que

$$\text{Existe } \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \Longleftrightarrow \text{Existen } \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f_j(\boldsymbol{x}), \ j = 1, \ldots, m.$$

Además, en este caso, si

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f_j(\boldsymbol{x}) = L_j, \ j = 1, \ldots, m,$$

entonces

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = (L_1, \ldots, L_m) \, .$$

$\triangleleft$

## 3.2.2 Cálculo de límites

Proporcionaremos técnicas de cálculo de límites exclusivamente para funciones escalares, ya que los límites de funciones vectoriales se calculan a partir de sus componentes, como se estableció en la Proposición 3.2.6.

Puesto que la noción de límite para funciones de varias variables es análoga a la que teníamos para funciones reales de una variable real, podría pensarse que las técnicas que se tenían son similares a las que tendremos ahora. En general esto no es cierto. El cálculo de límites de funciones de varias variables es mucho más complicado que lo conocido hasta ahora, por lo que trataremos sólo algunos pocos casos particulares.

### 3.2.2.1 Aritmética

En general podremos aplicar la misma aritmética permitida que para límites de una variable, pero cuando el resultado sea uno de los infinitos, diremos que el límite no existe.
Las técnicas para la resolución de indeterminaciones no son aplicables aquí.

### 3.2.2.2 Límites direccionales

**Definición 3.2.7** Sean $n$, $m \in \mathbb{N}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{a} \in A^\circ$, $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n - \{\boldsymbol{0}\}$.

$$\boldsymbol{f} : A \longrightarrow \mathbb{R}^m \ .$$

Llamaremos límite direccional de $\boldsymbol{f}$ en $\boldsymbol{a}$ en la dirección $\boldsymbol{v}$ a

$$\lim_{h\to 0} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a} + h\boldsymbol{v}),$$

y lo denotaremos por

$$\lim_{\substack{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}+h\boldsymbol{v}}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}).$$

$\triangleleft$

Con las notaciones anteriores, para calcular un límite direccional solo importa cómo esté definida $\boldsymbol{f}$ en las partes de la recta $\boldsymbol{a} + h\boldsymbol{v}$ contenidas en el dominio salvo el punto $\boldsymbol{a}$.

Para funciones escalares, los límites direccionales son límites de funciones reales de una variable real y se pueden utilizar las técnicas de Matemáticas I para su estudio. La única diferencia es que cuando uno de estos límites sea un infinito, diremos que el límite direccional correspondiente no existe.

**Proposición 3.2.8** Sean $n$, $m \in \mathbb{N}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{a} \in A^\circ$,

$$\boldsymbol{f} : A \longrightarrow \mathbb{R}^m \ .$$

Si existe

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}),$$

entonces existen

$$\lim_{\substack{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}\\ \boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}+h\boldsymbol{v}}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}),$$

y valen

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}),$$

para cada $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n - \{\boldsymbol{0}\}$. $\triangleleft$

El recíproco de la Proposición 3.2.8 no es cierto.

Podemos utilizar 3.2.8 para probar que un límite no existe. Dados $n$, $m \in \mathbb{N}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{a} \in A^\circ$ y

$$\boldsymbol{f} : A \longrightarrow \mathbb{R}^m \ ,$$

si encontrásemos o bien $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n - \{\boldsymbol{0}\}$ de forma que

$$\lim_{\substack{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}\\ \boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}+h\boldsymbol{v}}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}),$$

no exista o bien $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in \mathbb{R}^n - \{\boldsymbol{0}\}$ de forma que

$$\lim_{\substack{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}\\ \boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}+h\boldsymbol{v}_1}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \neq \lim_{\substack{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}\\ \boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}+h\boldsymbol{v}_2}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}),$$

entonces

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}),$$

no podría existir.

#### 3.2.2.3 Acotación

**Proposición 3.2.9** Sean $n \in \mathbb{N}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{a}$ un punto de acumulación de $A$ y

$$f, g : A \longrightarrow \mathbb{R} \ ,$$

dos funciones escalares tales que $\boldsymbol{g}$ es acotada y

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = 0.$$

Entonces

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x})g(\boldsymbol{x}) = 0.$$

$\triangleleft$

## 3.3 Ejercicios

**Ejercicio 3.1** Utilizando las propiedades de las Secciones 3.1.2 y 3.1.3 y de las funciones elementales, estudiar dónde se puede decir directamente que las siguientes funciones son continuas. Describir detalladamente cómo se aplican las distintas propiedades.

**a)** $f(x,y) = xy$.

**b)** $\boldsymbol{f}(x) = \big(x^2, -x, 2, \log x\big)$.

**c)** $\boldsymbol{f}(x,y,z,t) = \Big(x^2 - t + 2y, z^2\sqrt{1-xy}\cos t\Big)$.

**d)** $\boldsymbol{f}(x_1,x_2,x_3) = (2,1)$.

**e)** $f(r,s,t) = \log(1-r^2)\log(s^2+t^2)$.

**f)** $\boldsymbol{f}(h,k) = \big(h-k, k-h, k, 1, h^3, \tan k\big)$.

**g)** $\boldsymbol{f}(x,y) = \begin{cases} \left(\dfrac{x^2(2+y)+2y^2}{x^2+y^2}, \operatorname{sen}(x+y)\right), & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ (2,0), & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$

**h)** $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x-y}{x+y}, & \text{si } y \neq -x \\ 0, & \text{si } y = -x \end{cases}.$

**i)** $f(x) = x^2$.

**j)** $\boldsymbol{f}(x,y) = (y/x, x/y)$.

**k)** $\boldsymbol{f}(x,y,z,t,s) = (t-1, 0)$.

**l)** $\boldsymbol{f}(x,y,z) = (y,z,x)$.

**Ejercicio 3.2** Estudiar el límite en $(0,0)$ de las siguientes funciones

**a)** $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$

**b)** $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x-y}{x+y}, & \text{si } y \neq -x \\ 0, & \text{si } y = -x \end{cases}.$

**c)** $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}, & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}.$

**d)** $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2+y^2}{x^2+y}, & \text{si } y\neq -x^2\\ 0, & \text{si } y=-x^2\end{cases}.$

**e)** $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}.$

**f)** $f(x,y)=\begin{cases}x\operatorname{sen}(x/y), & \text{si } y\neq 0\\ x, & \text{si } y=0\end{cases}.$

**g)** $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y}{y+x^2}, & \text{si } y\neq -x^2\\ 1, & \text{si } y=-x^2\end{cases}.$

**Ejercicio 3.3** Estudiar la continuidad de

**a)** $\boldsymbol{f}(x,y)=\begin{cases}\left(\dfrac{x^2(2+y)+2y^2}{x^2+y^2},\operatorname{sen}(x+y)\right), & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ (2,0), & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}.$

**b)** $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}, & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 1, & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}.$

**c)** $f(x,y,z)=\begin{cases}\dfrac{2x-y+z-2}{x+y-z-1}, & \text{si } x+y-z-1\neq 0\\ 0, & \text{si } x+y-z-1=0\end{cases}.$

**d)** $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y}{x}\operatorname{sen}(x^2+y^2), & \text{si } x\neq 0\\ 0, & \text{si } x=0\end{cases}.$