Matemáticas II

J. Miguel Farto Álvarez

Curso 2024-2025

Índice general

License

Parte I

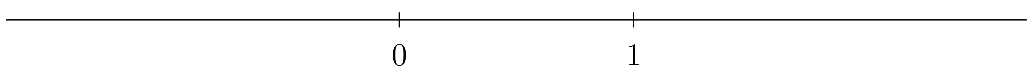
Cálculo en varias variables y Geometría diferencial

Capítulo 1

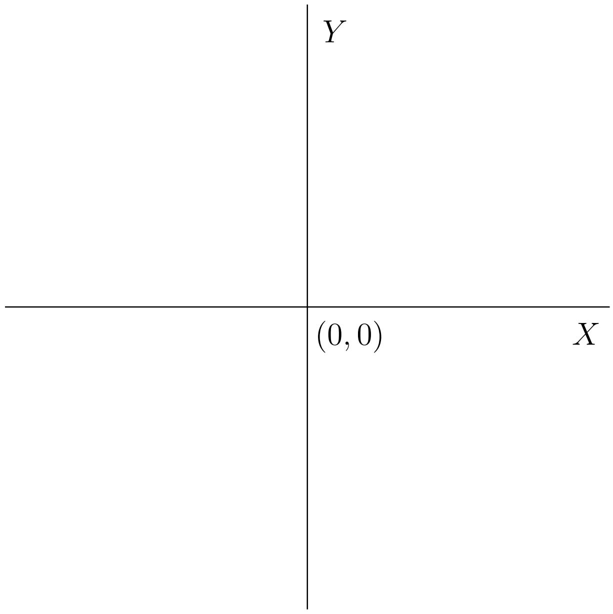
Topología de $\mathbb{R}^n$

1.1 Representación gráfica

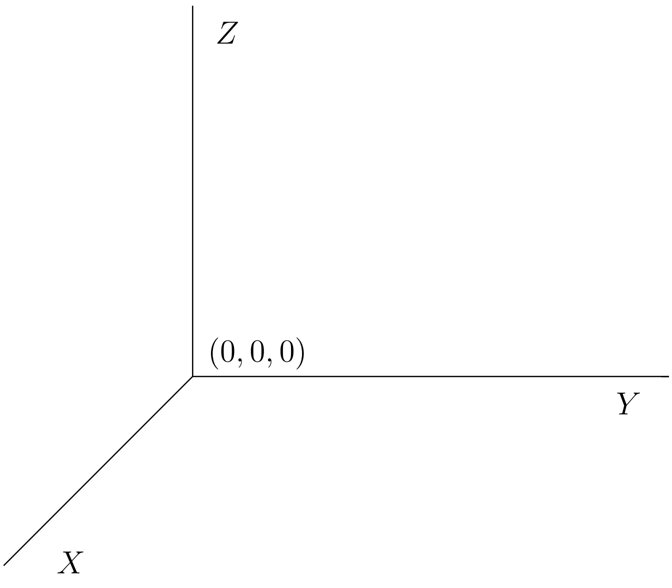
Utilizaremos las representaciones gráficas habituales. Así por ejemplo $\mathbb{R}$ $(= \mathbb{R}^1)$ se representa gráficamente mediante una recta en la que se fija el origen y la unidad y a la que se llama la *recta real*.



De la misma manera $\mathbb{R}^2$ se representa gráficamente mediante un plano en el que se fijan unos ejes coordenados que se cortan en $(0,0)$. El eje horizontal es el *eje de abscisas*, eje OX o *eje de las* x, en el se representa la primera coordenada de cada punto de $\mathbb{R}^2$. El eje vertical es el *eje de ordenadas*, eje OY o *eje de las* y, en el se representa la segunda coordenada de cada punto de $\mathbb{R}^2$



Se suele representar $\mathbb{R}^3$ mediante tres ejes que se cortan en $(0,0,0)$ dibujados en el plano de la siguiente manera



donde si $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, x, y, z se representan en los ejes X, Y, Z respectivamente. No existen representaciones gráficas útiles para $\mathbb{R}^n$ con $n > 3$.

1.2 Norma

Al igual que el valor absoluto nos proporciona una forma de medir distancias en $\mathbb{R}$, la *norma* nos proporcionará un medio para medir distancias en $\mathbb{R}^n$.

Definición 1.2.1 Sea $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. Se define la *norma* de $\boldsymbol{a}$ como

$$||\boldsymbol{a}|| := \sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}.$$

$\triangleleft$

Propiedades 1.2.2 Sean $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha \in \mathbb{R}$.

1) $||\boldsymbol{a}|| \geq 0$.

2) $||\boldsymbol{a}|| = 0 \Longleftrightarrow \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$.

3) $||\alpha \boldsymbol{a}|| = |\alpha| \, ||\boldsymbol{a}||$.

4) $||\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}|| \leq ||\boldsymbol{a}|| + ||\boldsymbol{b}||$ (desigualdad triangular).

$\triangleleft$

Nota 1.2.3 Para el caso particular $n = 1$, la norma coincide con el valor absoluto. $\triangleleft$

1.3 Acotación

Definición 1.3.1 Sea $n \in \mathbb{N}$. Diremos que un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es o está *acotado* si existe $M \in \mathbb{R}$ tal que

$$||\boldsymbol{a}|| \leq M, \quad \forall\, \boldsymbol{a} \in A.$$

$\triangleleft$

Nota 1.3.2 Intuitivamente, un conjunto de $\mathbb{R}^n$ está acotado cuando *se encuentra en una región finita de* $\mathbb{R}^n$. $\triangleleft$

1.4 Topología

Sea $n \in \mathbb{N}$. Los conceptos de intervalo en $\mathbb{R}$ se generalizan a $\mathbb{R}^n$ en cierta medida con la noción de *bola*.

Definición 1.4.1 Sean $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ y $\delta \in \mathbb{R}$ con $\delta > 0$. Llamaremos:

1) *Bola abierta* de centro $\boldsymbol{a}$ (o centrada en $\boldsymbol{a}$) y radio δ a

$$\mathrm{B}\left(\boldsymbol{a},\, \delta\right) = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \,/\, ||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}|| < \delta\right\}.$$

2) *Bola cerrada* de centro $\boldsymbol{a}$ (o centrada en $\boldsymbol{a}$) y radio δ a

$$\overline{\mathrm{B}}\left(\boldsymbol{a},\, \delta\right) = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \,/\, ||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}|| \leq \delta\right\}.$$

3) *Bola reducida* de centro $\boldsymbol{a}$ (o centrada en $\boldsymbol{a}$) y radio δ a

$$\mathrm{B}^*\left(\boldsymbol{a},\, \delta\right) = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \,/\, 0 < ||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}|| < \delta\right\} = \mathrm{B}\left(\boldsymbol{a},\, \delta\right) - \left\{\boldsymbol{a}\right\}.$$

$\triangleleft$

Definición 1.4.2 Sea $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$.

- Llamaremos *entorno* de $\boldsymbol{a}$ a cada bola abierta centrada en $\boldsymbol{a}$.
- Llamaremos *entorno reducido* de $\boldsymbol{a}$ a cada bola reducida centrada en $\boldsymbol{a}$.

$\triangleleft$

Para funciones definidas en $\mathbb{R}$ (de una variable), basta con considerar los intervalos. Sin embargo en $\mathbb{R}^n$ (varias variables), necesitamos trabajar con conjuntos un poco más complicados:

Definición 1.4.3 Diremos que $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es *abierto* si

$$\forall\, \boldsymbol{a} \in A, \text{existe un entorno } V \text{ de } \boldsymbol{a} \text{ tal que } V \subseteq A.$$

$\triangleleft$

Definición 1.4.4 Diremos que $F \subseteq \mathbb{R}^n$ es *cerrado* si $\mathbb{R}^n - F$ es abierto. $\triangleleft$

Definición 1.4.5 Dado $A \subseteq \mathbb{R}^n$, llamaremos *frontera* de A a

$$\mathrm{Fr}(A) = \left\{\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n \Bigg/ \begin{array}{l} V \cap A \neq \emptyset, \text{ y} \\ V \cap (\mathbb{R}^n - A) \neq \emptyset \end{array},\ \forall\, V \text{ entorno de } \boldsymbol{a}\right\}.$$

$\triangleleft$

Nota 1.4.6 Intuitivamente:

- La frontera de un conjunto es su *borde*.
- Un conjunto es abierto si no contiene a ninguna parte de su borde.
- Un conjunto es cerrado si contiene a todo su borde.

En la práctica:

- Los abiertos de $\mathbb{R}^n$ que manejaremos vendrán definidos por $<$, $>$.
- Los cerrados de $\mathbb{R}^n$ que manejaremos vendrán definidos por $\leq$, $\geq$, $=$.

$\triangleleft$

Definición 1.4.7 Diremos que $K \in \mathbb{R}^n$ es un *compacto* si es cerrado y acotado. $\triangleleft$

Definición 1.4.8 Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Diremos que $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ es un *punto de acumulación* de A si

$$\text{para cada entorno reducido } V \text{ de } \boldsymbol{a} \text{ se tiene que } V \cap A \neq \emptyset.$$

$\triangleleft$

Definición 1.4.9 Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Diremos que $\boldsymbol{a} \in A$ es un *punto aislado* de A si

$$\text{existe un entorno reducido } V \text{ de } \boldsymbol{a} \text{ tal que } V \cap A = \emptyset.$$

$\triangleleft$

1.5 Ejercicios

Ejercicio 1.1 Representar en $\mathbb{R}^2$ los puntos siguientes

a) $(1,0)$	**e)** $(1,1)$	**i)** $(2,1)$
b) $(0,1)$	**f)** $(1,-1)$	**j)** $(-2,3)$
c) $(-1,0)$	**g)** $(-1,1)$	**k)** $(4,-5)$
d) $(0,-1)$	**h)** $(1,2)$	**l)** $(-1/2,-3)$

Ejercicio 1.2 Representar en $\mathbb{R}^3$ los puntos siguientes

a) $(1, 0, 0,)$

b) $(0, 1, 0)$

c) $(0, 0, 1)$

d) $(-1, 0, 0)$

e) $(0, -1, 0)$

f) $(0, 0, -1)$

g) $(1, 1, 1)$

h) $(-1, 1, 1)$

i) $(1, -1, 1)$

j) $(1, 1, -1)$

k) $(-1, -1, 1)$

l) $(-1, 1, -1)$

m) $(1, -1, -1)$

n) $(-1, -1, -1)$

o) $(2, 1, 0)$

p) $(1, 0, -2)$

q) $(0, 2, -3)$

r) $(1, 3, 1)$

s) $(-2, 3, -4)$

t) $(2, -1, 3)$

u) $(1, 2, 3)$

v) $(2, 2, 1)$

w) $(1/2, 1/2, 3/2)$

x) $(-3, -2, -1)$

Ejercicio 1.3 Representar gráficamente los siguientes conjuntos

a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 2x + 3y = 0\}$.

b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 2x + 3y \leq 0\}$.

c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 2x + 3y > 0\}$.

d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 2x^2 + 3y^2 = 1\}$.

e) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 2x^2 + 3y^2 \leq 1\}$.

f) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 2x^2 + 3y^2 \geq 1\}$.

g) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 2x^2 - 3y^2 = 1\}$.

h) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 2x^2 - 3y^2 > 1\}$.

i) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 2x^2 - 3y^2 < 0\}$.

j) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y - 2x^2 = 0\}$.

k) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y^2 + 3x \leq 0\}$.

l) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, (x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 9\}$.

m) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2 + y^2 + 2x - 2y - 7 \leq 0\}$.

n) $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \Bigg/ \begin{array}{l} x^2 + y^2 - 4(x + y) \geq -4, \\ y \geq 0, \\ y \leq x \end{array}\right\}$.

o) $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \Big/ \begin{array}{l} x^2 + y^2 \geq 1, \\ x^2 + 4y^2 \leq 4 \end{array}\right\}$.

p) $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \Big/ \begin{array}{l} x^2 + y^2 \geq 1, \\ x^2 > y \end{array}\right\}$.

q) $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \Big/ \begin{array}{l} 4x^2 + y^2 - 4 \leq 0, \\ 4x^2 + y^2 - 8x - 4y \leq -4 \end{array}\right\}$.

r) $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \Big/ \begin{array}{l} x+2\geq 4y^2, \\ x-2\geq -4y^2 \end{array}\right\}.$

s) $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \Bigg/ \begin{array}{l} (x-1)^2+(y-1)^2\geq 1, \\ (x+1)^2+(y-1)^2\geq 1, \\ 0\leq y\leq 1 \end{array}\right\}.$

Ejercicio 1.4 Representar gráficamente los siguientes conjuntos

a) $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, 2x+y-z=1\}$. **d)** $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, x^2+y^2+z^2=16\}$.

b) $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, 2x+y-z\leq 1\}$. **e)** $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, x^2+y^2+z^2<16\}$.

c) $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, 2x+y-z\geq 1\}$. **f)** $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, x^2+y^2+z^2\geq 16\}$.

g) $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, (x-1)^2+2(y-1)^2+4(z-2)^2=16\}$.

h) $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, 2x^2+y^2-z=0\}$.

i) $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, 2x^2+y^2-z\leq 0\}$.

j) $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, 2x^2+y^2-z>0\}$.

k) $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, x^2+y^2-z^2=1\}$.

l) $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, x^2+y^2-z^2<1\}$.

m) $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, x^2+y^2-z^2\geq 1\}$.

n) $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, x^2+y^2=16\}$.

o) $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, x^2+4z^2=16\}$.

p) $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, x^2+y^2-z^2=0\}$.

q) $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, x^2-y^2-z=0\}$.

r) $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, z^2-x^2-y^2=1\}$.

s) $\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \Big/ \begin{array}{l} x^2+y^2-z^2\leq 0, \\ x^2+y^2+z^2\leq 1 \end{array}\right\}.$

Ejercicio 1.5 Describir por medio de desigualdades el conjunto de puntos dentro del paralelepípedo de vértices

$$(0,0,0)\,,\ (0,1,0)\,,\ (1,1,0)\,,\ (1,0,0)\,,\ (0,1,1)\,,\ (0,2,1)\,,\ (1,2,1)\,,\ (1,1,1)\,,$$

a) Incluyendo las caras.

b) Sin incluir las caras.

Ejercicio 1.6 Calcular la norma de los vectores siguientes

a) $(1,0)$

b) $(-1,1)$

c) $(2,3)$

d) $(-4,3)$

e) $(1,0,1)$

f) $(0,1,0)$

g) $(-2,1,3)$

h) $(1,1,1,1)$

i) $(-1,2,3)$

j) $(2,1,-4,5,1)$

k) $(2,3,4)$

l) $(-1,-1,-2,-2)$

Ejercicio 1.7 Sean $n \in \mathbb{N}$ y $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$. Probar que

$$\Big| \, ||\boldsymbol{a}|| - ||\boldsymbol{b}|| \, \Big| \leq ||\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}|| \, .$$

Ejercicio 1.8 Decir cuáles de los siguientes conjuntos son acotados

a) $\big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x \geq 0, \; y \geq 0\big\}$.

b) $\big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x + y = 0\big\}$.

c) $\big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, (x-1)^2 + (y-2)^2 \leq 1\big\}$.

d) $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \Big/ \begin{array}{l} x \geq y^2, \\ x^2 + y^2 \leq 1 \end{array} \right\}$.

e) $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \Big/ \begin{array}{l} 4x - y^2 \geq 0, \\ 4x^2 - y^2 \geq 4 \end{array} \right\}$.

f) $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \Big/ \begin{array}{l} 4x - y^2 \geq 0, \\ 3(x-1) - y^2 \leq 0 \end{array} \right\}$.

g) $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \Big/ \begin{array}{l} 4x - y^2 \geq 0, \\ 5(x-1) - y^2 \leq 0 \end{array} \right\}$.

h) $\big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, 2x^2 + (y-1)^2 + 2z^2 \leq 1\big\}$.

i) $\big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x \geq 0, \; y \geq 0, \; z \geq 0\big\}$.

j) $\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \Big/ \begin{array}{l} x \geq 0, \; y \geq 0, \; z \geq 0, \\ x + y + z \leq 1 \end{array} \right\}$.

Ejercicio 1.9 Sean $n \in \mathbb{N}$ y $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Probar que las siguientes propiedades son equivalentes.

(i) A es un conjunto acotado.

(ii) Existe $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ y una bola abierta centrada en $\boldsymbol{a}$ que contiene a A.

(iii) Para cada $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ existe una bola abierta centrada en $\boldsymbol{a}$ que contiene a A.

Ejercicio 1.10 Representar gráficamente los siguientes conjuntos

a) $\overline{\mathrm{B}}\left((0,0)\,,\,1\right)$.

b) $\mathrm{B}\left((1,1)\,,\,2\right)$.

c) $\mathrm{B}^*\left((-1,1)\,,\,1\right)$.

d) $\overline{\mathrm{B}}\left((2,4)\,,\,3\right)$.

e) $\mathrm{B}\left((0,0,0)\,,\,1\right)$.

f) $\overline{\mathrm{B}}\left((0,0,0)\,,\,1\right)$.

g) $\mathrm{B}^*\left((0,0,0)\,,\,1\right)$.

h) $\mathrm{B}\left((-1,2,1)\,,\,2\right)$.

i) $\overline{\mathrm{B}}\left((1,2,4)\,,\,3\right)$.

Ejercicio 1.11 Sean $n \in \mathbb{N}$ y $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$. Probar las siguientes propiedades.

a) Para cada bola abierta centrada en $\boldsymbol{a}$, existe una bola cerrada centrada en $\boldsymbol{a}$ que la contiene.

b) Para cada bola cerrada centrada en $\boldsymbol{a}$, existe una bola abierta centrada en $\boldsymbol{a}$ que la contiene.

c) Toda bola es un conjunto acotado.

d) Toda bola abierta es un conjunto abierto.

e) Toda bola reducida es un conjunto abierto.

f) Toda bola cerrada es un conjunto cerrado.

g) Toda bola cerrada es un conjunto compacto.

h) Las bolas no tienen puntos aislados.

Ejercicio 1.12 Sea $n \in \mathbb{N}$. Probar que para un conjunto $F \in \mathbb{R}^n$, son equivalentes las siguientes propiedades

(i) F es cerrado.

(ii) Para cada $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ verificando que para cada entorno V de $\boldsymbol{a}$, $V \cap F \neq \emptyset$ se tiene que $\boldsymbol{a} \in F$.

Ejercicio 1.13 Sea $n \in \mathbb{N}$. Para cada conjunto $A \in \mathbb{R}$, se define

1) El *interior* de A,

$$A^\circ = \{\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n \,/\, \text{Existe un entorno } V \text{ de } \boldsymbol{a} \text{ con } V \subseteq A\},$$

2) La *adherencia* de A,

$$\overline{A} = \{\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n \,/\, \text{Para cada entorno } V \text{ de } \boldsymbol{a},\ V \cap A \neq \emptyset\}.$$

3) El *derivado* de A,

$$A' = \{\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n \,/\, \boldsymbol{a} \text{ es un punto de acumulación de } A\}.$$

Sea $A \in \mathbb{R}^n$. Probar que

a) $A^\circ \subseteq A \subseteq \overline{A}$.

b) $A^\circ \subseteq A' \subseteq \overline{A}$.

c) A° es un conjunto abierto y además es el mayor conjunto abierto contenido en A.

d) $\overline{A}$ es un conjunto cerrado y además es el menor conjunto cerrado que contiene a A.

e) A es abierto si y sólo si $A = A^\circ$.

f) A es cerrado si y sólo si $A = \overline{A}$.

g) A' es cerrado.

h) El conjunto de puntos aislados de A es $A - (A \cap A')$.

i) A no tiene puntos aislados si si sólo si $A \subseteq A'$.

j) $\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \cap \overline{\mathbb{R}^n - A}$

k) $\overline{A} = A \cup \mathrm{Fr}(A)$.

l) $\mathrm{Fr}(A) = \mathrm{Fr}(\mathbb{R}^n - A)$.

m) $A^\circ = \mathbb{R}^n - \overline{\mathbb{R}^n - A}$.

n) $\overline{A} = \mathbb{R}^n - (\mathbb{R}^n - A)^\circ$.

o) $\boldsymbol{a} \in A'$ si y sólo si $\boldsymbol{a} \in \overline{A - \{\boldsymbol{a}\}}$.

p) $\mathbb{R}^n$ es abierto y cerrado.

q) $\emptyset$ es abierto y cerrado.

Ejercicio 1.14 Decir cuáles de los conjuntos siguientes son abiertos o cerrados. Calcular su frontera. Calcular su interior, adherencia y derivado (ver Ejercicio 1.13).

a) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,/\,x\geq 0,\ y\geq 0\}$.

b) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,/\,x>0,\ y>0\}$.

c) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,/\,x>0,\ y\geq 0\}$.

d) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,/\,x+y=0\}$.

e) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,/\,x+y=0,\ x\geq 0\}$.

f) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,/\,x+y=0,\ x>0\}$.

g) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,/\,(x-1)^2+(y-2)^2\leq 1\}$.

h) $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \Big/ \begin{array}{l} x>y^2, \\ x^2+y^2<1 \end{array}\right\}$.

i) $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \Big/ \begin{array}{l} 4x-y^2\geq 0, \\ 4x^2-y^2\geq 4 \end{array}\right\}$.

j) $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \Big/ \begin{array}{l} 4x-y^2\geq 0, \\ 3(x-1)-y^2<0 \end{array}\right\}$.

k) $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \Big/ \begin{array}{l} 4x-y^2\geq 0, \\ 5(x-1)-y^2\leq 0 \end{array}\right\}$.

l) $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,/\ 2x^2+(y-1)^2+2z^2\leq 1\}$.

m) $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,/\,x>0,\ y\geq 0,\ z\geq 0\}$.

n) $\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \Big/ \begin{array}{l} x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0, \\ x+y+z\leq 1 \end{array}\right\}$.

o) $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,/\,x^2+y^2<1,\ 0<z<1\}$.

Ejercicio 1.15 Calcular el derivado (ver Ejercicio 1.13) de los siguientes conjuntos

a) $\{(0,1/n)\in\mathbb{R}^2\,/\,n\in\mathbb{N}\}$.

b) $\{(x,x\operatorname{sen}(1/x))\in\mathbb{R}^2\,/\,x\in\mathbb{R}-\{0\}\}$.

c) $\{(x,\operatorname{sen}(1/x))\in\mathbb{R}^2\,/\,x\in\mathbb{R}-\{0\}\}$.

d) $\mathrm{B}^*\left((1,1,1)\,,\,1\right)$.

Capítulo 2

Funciones

2.1 Noción de función

Definición 2.1.1 Una *función* es una aplicación

$$\boldsymbol{f} : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \ ,$$

donde n y m son dos números naturales.

1) A se llama el *dominio* de la función.

2) Diremos que n es el *número de variables* de $\boldsymbol{f}$ y que $\boldsymbol{f}$ es una función de n variables.

3) En general, cuando $n > 1$ diremos que $\boldsymbol{f}$ es una función de *varias variables*.

4) Diremos que m es el *número de componentes* de $\boldsymbol{f}$.

5) Cuando $m = 1$ diremos emplearemos la notación f en vez de $\boldsymbol{f}$ y diremos que f es una *función escalar*.

6) Cuando $m > 1$, diremos que $\boldsymbol{f}$ es una *función vectorial*.

$\triangleleft$

Nota 2.1.2 Nótese que las funciones escalares de una variable ($n = m = 1$) son las funciones reales de variable real ya conocidas. Por lo tanto estamos generalizando el concepto de función que ya teníamos. $\triangleleft$

Nota 2.1.3 Las aplicaciones lineales estudiadas en Álgebra Lineal son un tipo particular de funciones, pero no debemos pensar que todas las funciones son aplicaciones lineales. $\triangleleft$

Nota 2.1.4 Cuando demos simplemente la expresión de una función sin precisar dónde está definida (ver ejercicio 2.1), entenderemos que su dominio es el conjunto más grande posible donde tiene sentido dicha expresión ◁

Ejemplo 2.1.5 Dos ejemplos de funciones son las siguientes

$$\begin{aligned} f: \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto e^x + y^2 - 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{g}: \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ (x,y,z) &\longmapsto \big(x^2+1, y^2+z^3, x+e^y \operatorname{sen} z, 3+xy\big) \end{aligned}$$

La función f es una función escalar de dos variables. La función $\boldsymbol{g}$ es una función vectorial de 3 variables con 4 componentes. Ninguna de ellas es una aplicación lineal. ◁

2.2 Representación gráfica

Definición 2.2.1 Sean n, $m \in \mathbb{N}$ y

$$\boldsymbol{f} : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \ ,$$

una función.

1) Llamaremos *grafo* de $\boldsymbol{f}$ al conjunto

$$\operatorname{graf} \boldsymbol{f} = \big\{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})) \in \mathbb{R}^{n+m} \,/\, \boldsymbol{x} \in A\big\} \,.$$

2) Llamaremos *soporte* de $\boldsymbol{f}$ al conjunto

$$\operatorname{sop} \boldsymbol{f} = \{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^m \,/\, \boldsymbol{x} \in A\} \,.$$

◁

Cuando el soporte se reduce a un punto, diremos que la función es *constante.*

El grafo y el soporte de una función contienen diversa información geométrica y resulta útil a veces representarlos gráficamente. Lamentablemente sólo existen representaciones gráficas útiles para unos pocos valores particulares de n y m.

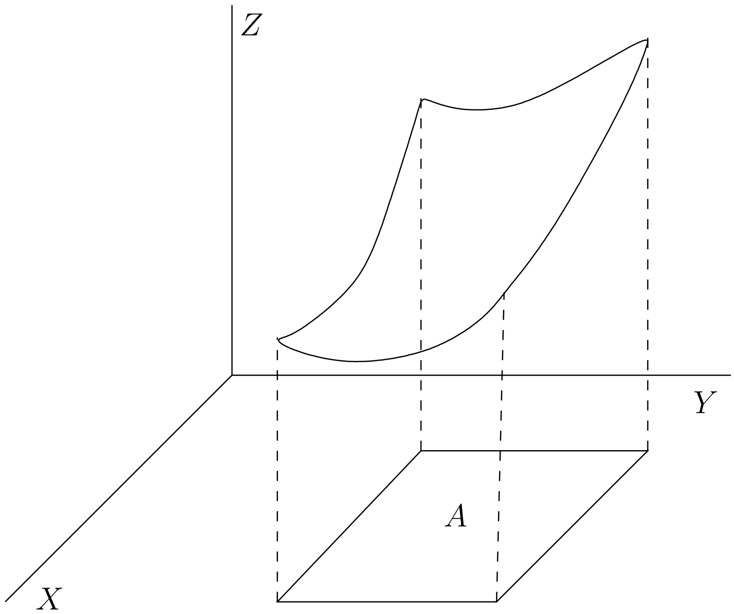
El grafo se puede representar directamente para $n+m \le 3$ y el soporte para $m \le 3$. En otros casos, a veces se representan ciertas proyecciones en $\mathbb{R}^3$ de dichas figuras, pero la mayor parte de las veces se proporcionan ideas intuitivas basadas en casos más simples que caen entre los representables directamente.

2.2.1 Representación del grafo

Consideramos $\boldsymbol{f}$ como en la Definición 2.2.1. Los casos representables son

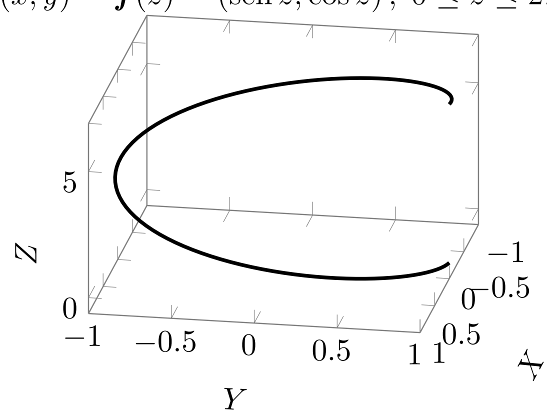
1) $n = m = 1$. Tenemos la representación gráfica de las funciones reales de una variable real que ya conocemos. Sabemos que la representación en general una línea en $\mathbb{R}^2$ que no puede volver sobre sí misma.

2) $n = 2$, $m = 1$. Estas funciones se representan en $\mathbb{R}^3$ tomando $z = f(x, y)$ y dan lugar a una de manera genérica a una superficie de la forma



3) $n = 1$, $m = 2$. La función se representa en $\mathbb{R}^3$ tomando $(x, y) = \boldsymbol{f}(z)$ y de manera genérica la gráfica es una curva en $\mathbb{R}^3$.

$$(x, y) = \boldsymbol{f}(z) = (\operatorname{sen} z, \cos z)\,,\ 0 \leq z \leq 2\pi,$$

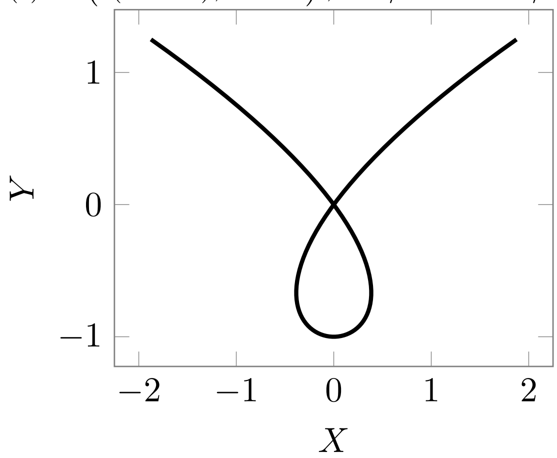


2.2.2 Representación del soporte

Consideramos $\boldsymbol{f}$ como en la Definición 2.2.1. En principio se puede representar directamente el soporte de $\boldsymbol{f}$ cuando $m \leq 3$. No obstante, los casos que tendrán interés para nosotros serán $2 \leq m \leq 3$ con $n < m$. Tendremos así

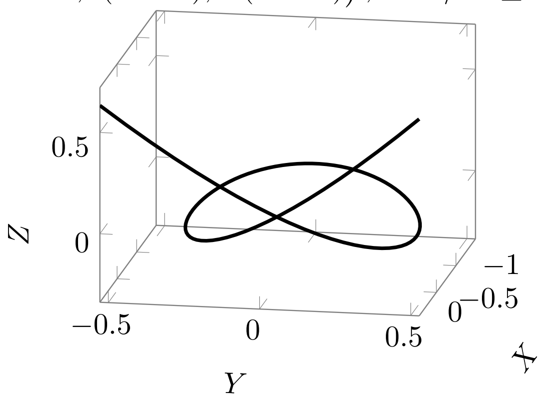
1) $n = 1$, $m = 2$. En este caso la figura es de manera genérica una curva en el plano.

$$\boldsymbol{f}(t) = \left(t(t^2-1), t^2-1\right), \ -3/2 \leq t \leq 3/2,$$



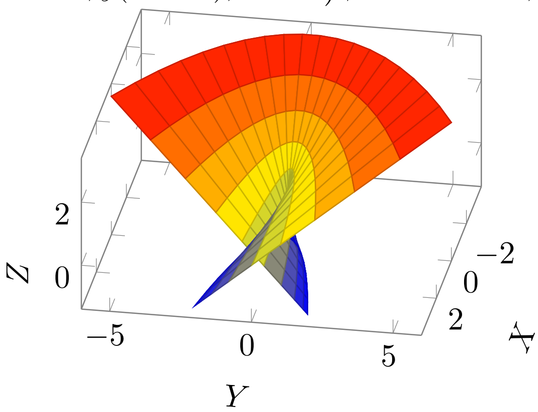
2) $n = 1$, $m = 3$. La figura es de manera genérica una curva en el espacio.

$$\boldsymbol{f}(t) = \left(t^2-1, t(1-t^2), t^2(t^2-1)\right), \ -11/10 \leq t \leq 11/10,$$



3) $n = 2$, $m = 3$. La figura genéricamente es una superficie en $\mathbb{R}^3$.

$$\boldsymbol{f}(x,y) = \left(y^2 - x^2, y(1-x^2), x^2-1\right), \ -2 \le x \le 2, \ -2 \le y \le 2,$$



2.2.3 Relación entre grafo y soporte

Sean n, $m \in \mathbb{N}$ y

$$\boldsymbol{f} : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \ ,$$

una función. Siempre podemos construir otra función

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F} : A &\longrightarrow \mathbb{R}^{n+m} \\ \boldsymbol{x} &\longmapsto (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})) \end{aligned} \ ,$$

y tiene claramente que

$$\operatorname{graf} \boldsymbol{f} = \operatorname{sop} \boldsymbol{F},$$

Luego cualquier grafo se puede expresar como un soporte (de otra función).

Podemos ahora plantearnos si es cierto el recíproco, ¿cualquier soporte puede expresarse como el grafo de otra función? La respuesta es que sólo bajo ciertas condiciones el grafo se puede expresar como una unión de los soportes de varias funciones. De todos modos esta cuestión es complicada y está relacionada con un resultado llamado *teorema de la función implícita*.

2.3 Aritmética de funciones

Definición 2.3.1 Sean n, m, $p \in \mathbb{N}$. Se definen las siguientes operaciones

1) *Suma*. Si

$$\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \ ,$$

definimos

$$(\boldsymbol{f} + \boldsymbol{g})(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}), \ \forall \, \boldsymbol{x} \in A.$$

2) *Producto* (Sólo funciones escalares). Si

$$f,\, g : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \ ,$$

definimos

$$(fg)(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})g(\boldsymbol{x}),\ \forall\, \boldsymbol{x} \in A.$$

3) *Producto por un escalar.* Sean

$$\boldsymbol{f} : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \ ,\ \alpha \in \mathbb{R}$$

definimos

$$(\alpha \boldsymbol{f})(\boldsymbol{x}) = \alpha \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}),\ \forall\, \boldsymbol{x} \in A.$$

4) *Composición.* Dadas

$$\boldsymbol{f} : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \ , \quad \boldsymbol{g} : B \in \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^p \ ,$$

con $\boldsymbol{f}(A) \subseteq B$, se define la composición de $\boldsymbol{f}$ con $\boldsymbol{g}$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f} : A \subseteq \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^p \\ \boldsymbol{x} &\longmapsto \boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})) \end{aligned} \ .$$

Esquemáticamente

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \arrow[r, "\boldsymbol{f}"] \arrow[rr, bend left, "\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f}"] & \mathbb{R}^m \arrow[r, "\boldsymbol{g}"] & \mathbb{R}^p \end{tikzcd}$$

◁

2.4 Proyecciones y componentes

Definición 2.4.1 Sea $n \in \mathbb{N}$. Para cada $i = 1, \ldots, n$, llamaremos i-ésima *proyección* de $\mathbb{R}^n$ a la función escalar

$$\begin{aligned} p_i : \quad \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, \ldots, x_n) &\longmapsto x_i \end{aligned} \ .$$

Llamaremos *proyecciones* de $\mathbb{R}^n$ a las funciones $p_1, \ldots, p_n$. ◁

Definición 2.4.2 Sean n $m \in \mathbb{N}$, $p_1, \ldots, p_m$ las proyecciones de $\mathbb{R}^m$ y

$$\boldsymbol{f} : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \ ,$$

una función. Para cada $i = 1, \ldots, m$, llamaremos i-ésima *componente* de $\boldsymbol{f}$ a la función escalar

$$f_i = p_i \circ \boldsymbol{f}.$$

Llamaremos *componentes* de $\boldsymbol{f}$ a las funciones $f_1, \ldots, f_m$. ◁

Las funciones vectoriales se pueden *descomponer* en sus componentes, que son funciones escalares. Así, con las notaciones de la Definición 2.4.2, tendremos

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f} : A \subseteq \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ \boldsymbol{x} &\longmapsto (f_1(\boldsymbol{x}), \ldots, f_m(\boldsymbol{x})) \end{aligned} \ ,$$

Ejemplo 2.4.3 Para la función vectorial

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f} : \qquad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ (x, y, z)) &\longmapsto \big(x^2 + 1, y^2 + z^3, x + e^y \operatorname{sen} z, 3 + xy\big) \end{aligned} \ ,$$

sus componentes son

$$\begin{aligned} f_1(x, y, z) &= x^2 + 1 \\ f_2(x, y, z) &= y^2 + z^3 \\ f_3(x, y, z) &= x + e^y \operatorname{sen} z \\ f_4(x, y, z) &= 3 + xy \end{aligned}$$

◁

2.5 Extremos de funciones escalares

Definición 2.5.1 Sean $n \in \mathbb{N}$, y $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función escalar.

1) Diremos que $\boldsymbol{a}$ es un *máximo absoluto* de f en A, si $f(\boldsymbol{x}) \leq f(\boldsymbol{a})$, $\forall\, \boldsymbol{x} \in A$.

2) Diremos que $\boldsymbol{a}$ es un *mínimo absoluto* de f en A, si $f(\boldsymbol{x}) \geq f(\boldsymbol{a})$, $\forall\, \boldsymbol{x} \in A$.

3) Diremos que $\boldsymbol{a}$ es un *máximo relativo* de f en A, si existe un entorno V de $\boldsymbol{a}$ tal que $f(\boldsymbol{x}) \leq f(\boldsymbol{a})$, $\forall\, \boldsymbol{x} \in V \cap A$.

4) Diremos que $\boldsymbol{a}$ es un *mínimo relativo* de f en A, si existe un entorno V de $\boldsymbol{a}$ tal que $f(\boldsymbol{x}) \geq f(\boldsymbol{a})$, $\forall\, \boldsymbol{x} \in V \cap A$.

A los máximos y mínimos absolutos se les llama *extremos absolutos*.
A los máximos y mínimos relativos se les llama *extremos relativos*. ◁

2.6 Acotación

Definición 2.6.1 Sean $n, m \in \mathbb{N}$. Diremos que una función $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es *acotada* (en A) si su imagen es un conjunto acotado. ◁

2.7 Ejercicios

Ejercicio 2.1 Dar el número de variables, el número de componentes y el dominio de las funciones siguientes. Decir cuáles son de varias variables, cuáles escalares, cuáles vectoriales y cuáles constantes.

a) $f(x, y) = xy$.

b) $\boldsymbol{f}(x) = \big(x^2, -x, 2, \log x\big)$.

c) $\boldsymbol{f}(x, y, z, t) = \Big(x^2 - t + 2y, z^2\sqrt{1 - xy}\cos t\Big)$.

d) $\boldsymbol{f}(x_1, x_2, x_3) = (2, 1)$.

e) $f(r, s, t) = \log(1 - r^2)\log(s^2 + t^2)$.

f) $\boldsymbol{f}(h, k) = \big(h - k, k - h, k, 1, h^3, \tan k\big)$.

g) $\boldsymbol{f}(x, y) = \begin{cases} \left(\dfrac{x^2(2 + y) + 2y^2}{x^2 + y^2}, \operatorname{sen}(x + y)\right), & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ (2, 0), & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$

h) $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x - y}{x + y}, & \text{si } y \neq -x \\ 0, & \text{si } y = -x \end{cases}.$

i) $f(x) = x^2$.

j) $\boldsymbol{f}(x, y) = (y/x, x/y)$.

k) $\boldsymbol{f}(x, y, z, t, s) = (t - 1, 0)$.

l) $\boldsymbol{f}(x, y, z) = (y, z, x)$.

Ejercicio 2.2 Representar gráficamente el soporte de las siguientes funciones

a) $\boldsymbol{f}(t) = (2\cos t, \operatorname{sen} t)$, para $t \in [0, 6\pi]$.

b) $\boldsymbol{f}(t) = (\operatorname{ch} t, \operatorname{sh} t)$, para $t \in [0, 1]$.

c) $\boldsymbol{f}(t) = \left(t^2, t^3\right)$, para $t \in [-1, 1]$.

d) $\boldsymbol{f}(t) = (t, 2t)$, para $t \in [0, 1]$.

e) $\boldsymbol{f}(t) = (t, 0)$, para $t \in [0, 1]$.

f) $\boldsymbol{f}(t) = (1, t)$, para $t \in [0, 1]$.

g) $\boldsymbol{f}(t) = (\operatorname{sen} 3t, \cos 3t, t)$, para $t \in [0, 6\pi]$

h) $\boldsymbol{f}(s, t) = (s, t, \cos s + \sin t)$, para $s, t \in [-2\pi, 2\pi]$.

Ejercicio 2.3 Representar gráficamente el grafo de las siguientes funciones

a) $f(x, y) = x^2 - y^2$.

b) $f(x, y) = x + y$, definida en $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1 - x\}$.

c) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$, definida en $\mathrm{B}\left((0, 0)\,, 1\right)$.

d) $f(x, y) = e^x \cos y$ definida sobre el triángulo de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, \pi/2)$.

e) $f(x, y) = 2\sqrt{x}$ definida en $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x \geq 0\}$.

f) $\boldsymbol{f}(z) = (2 \cos z, \operatorname{sen} z)$, para $z \in [0, 6\pi]$.

g) $\boldsymbol{f}(z) = (\operatorname{ch} z, \operatorname{sh} z)$, para $z \in [0, 1]$.

h) $\boldsymbol{f}(z) = \left(z^2, z^3\right)$, para $z \in [-1, 1]$.

i) $\boldsymbol{f}(z) = (z, 2z)$, para $z \in [0, 1]$.

j) $\boldsymbol{f}(z) = (z, 0)$, para $z \in [0, 1]$.

k) $\boldsymbol{f}(z) = (1, z)$, para $z \in [0, 1]$.

Ejercicio 2.4 Escribir la expresión de $(\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f})(x, y, z)$ donde

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f}(x, y, z) &= \left(e^x \cos y + z, 2xz^2 + y^3\right), \\ \boldsymbol{g}(h, k) &= \left(h - k, kh^2\right). \end{aligned}$$

Ejercicio 2.5 Escribir las componentes de cada una de las funciones del Ejercicio 2.1.

Capítulo 3

Continuidad y Límites

3.1 Continuidad

3.1.1 Noción de continuidad

Definición 3.1.1 Sean n, $m \in \mathbb{N}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y $\boldsymbol{a} \in A$ donde $\boldsymbol{a}$ no es un punto aislado de A. Diremos que una función

$$\boldsymbol{f} : A \longrightarrow \mathbb{R}^m \ ,$$

es *continua* en $\boldsymbol{a}$, si para cada entorno V de $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$ existe un entorno U de $\boldsymbol{a}$ tal que

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \in V, \ \forall\, \boldsymbol{x} \in U \cap A.$$

$\triangleleft$

Proposición 3.1.2 En las condiciones de la Definición 3.1.1, si $\boldsymbol{a} \in B \subseteq A$ y $\boldsymbol{a}$ no es un punto aislado de B, entonces

$$\boldsymbol{f} \text{ continua en } \boldsymbol{a} \Longrightarrow \boldsymbol{f}|_B \text{ continua en } \boldsymbol{a}.$$

$\triangleleft$

El recíproco de la Proposición 3.1.2 no es cierto.

Definición 3.1.3 Sean n, $m \in \mathbb{N}$ y $A \subseteq \mathbb{R}^n$ sin puntos aislados. Diremos que una función

$$\boldsymbol{f} : A \longrightarrow \mathbb{R}^m \ ,$$

es *continua* en A, si es continua en cada punto de A. $\triangleleft$

En las condiciones de la Definición 3.1.3, si decimos que $\boldsymbol{f}$ es continua, nos referiremos a que es continua en A

Proposición 3.1.4 En las condiciones de la Definición 3.1.3, si $B \subseteq A$ y B tampoco tiene puntos aislados, entonces

$$\boldsymbol{f} \text{ continua en } A \Longrightarrow \boldsymbol{f}|_B \text{ continua en } B.$$

$\triangleleft$

El recíproco de la Proposición 3.1.4 no es cierto.

3.1.2 Casos particulares

3.1.2.1 Funciones vectoriales

Proposición 3.1.5 Sean n, $m \in \mathbb{N}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{a} \in A$ donde $\boldsymbol{a}$ no es un punto aislado de A,

$$\boldsymbol{f} : A \longrightarrow \mathbb{R}^m \ ,$$

una función y

$$f_1, \ldots, f_m : A \longrightarrow \mathbb{R} \ ,$$

sus componentes (ver Definición 2.4.2). Se tiene que

$$\boldsymbol{f} \text{ es continua en } \boldsymbol{a} \Longleftrightarrow f_1, \ldots, f_m \text{ son continuas en } \boldsymbol{a}.$$

$\triangleleft$

Proposición 3.1.6 Sean n, $m \in \mathbb{N}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ sin puntos aislados,

$$\boldsymbol{f} : A \longrightarrow \mathbb{R}^m \ ,$$

una función y

$$f_1, \ldots, f_m : A \longrightarrow \mathbb{R} \ ,$$

sus componentes. Se tiene que

$$\boldsymbol{f} \text{ es continua en } A \Longleftrightarrow f_1, \ldots, f_m \text{ son continuas en } A.$$

$\triangleleft$

Las Proposiciones 3.1.5 y 3.1.6 nos permiten reducir el estudio de la continuidad de las funciones vectoriales al estudio de la continuidad de las funciones escalares. Por ello a partir de ahora trataremos sobre todo el caso de las funciones escalares.

3.1.2.2 Funciones constantes

Las funciones constantes definidas en conjuntos sin puntos aislados son continuas.

3.1.2.3 Proyecciones

Las proyecciones de $\mathbb{R}^n$ (ver la Definición 2.4.1) son funciones continuas en $\mathbb{R}^n$.

3.1.3 Aritmética

Se tiene que

1) La suma de funciones continuas es continua.

2) El producto de funciones escalares continuas es continua.

3) La composición de funciones continuas es continua.

Éstas propiedades, junto con las de los casos particulares de 3.1.2 nos permiten establecer la continuidad de muchas funciones cuyas expresiones estén dadas mediante combinaciones de funciones elementales.

3.1.4 Propiedades

Teorema 3.1.7 [Teorema de Weierstraß]
Sean $n \in \mathbb{N}$, $K \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto compacto sin puntos aislados y $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Entonces f tiene al menos un máximo absoluto y al menos un mínimo absoluto en K. $\triangleleft$

Teorema 3.1.8 [Teorema de Bolzano]
Sean $n \in \mathbb{N}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ sin puntos aislados y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Sean $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ verificando que $f(\boldsymbol{a})f(\boldsymbol{b}) \leq 0$ y que existe un intervalo $[c, d]$ y una función continua $\boldsymbol{\varphi} : [c, d] \longrightarrow A$ con $\boldsymbol{\varphi}(c) = \boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{\varphi}(d) = \boldsymbol{b}$. Entonces existe $\boldsymbol{c} \in A$ tal que $f(\boldsymbol{c}) = 0$. $\triangleleft$

3.1.5 Discontinuidades

Definición 3.1.9 Sean n, $m \in \mathbb{N}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{a} \in A$ no siendo $\boldsymbol{a}$ un punto aislado de A y

$$\boldsymbol{f} : A \longrightarrow \mathbb{R}^m \ ,$$

una función. Diremos que $\boldsymbol{a}$ es una *discontinuidad* de $\boldsymbol{f}$, si $\boldsymbol{f}$ no es continua en $\boldsymbol{a}$. $\triangleleft$

La similitud entre la definición de continuidad para funciones de varias variables y funciones reales de variable real, puede inducir a pensar que el estudio y comportamiento de las discontinuidades es muy similar en ambos casos. En realidad esto no es cierto. El estudio de las discontinuidades de funciones de varias variables es muy complicado como veremos en la siguiente sección y aquí trataremos sólo algunos casos sencillos.

3.2 Límites

3.2.1 Noción de límite

Definición 3.2.1 Sean $n,\, m \in \mathbb{N}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y $\boldsymbol{a}$ un punto de acumulación de A. Diremos que una función

$$\boldsymbol{f} : A \longrightarrow \mathbb{R}^m \ ,$$

tiene *límite* en $\boldsymbol{a}$ si existe $\boldsymbol{L} \in \mathbb{R}^m$ tal que para cada entorno V de $\boldsymbol{L}$, existe un entorno reducido U de $\boldsymbol{a}$ con

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \in V,\ \forall\, \boldsymbol{x} \in U \cap A.$$

En este caso se dirá que $\boldsymbol{L}$ es el límite de $\boldsymbol{f}$ cuando $\boldsymbol{x}$ tiende hacia $\boldsymbol{a}$, y se denotará por

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{L}.$$

◁

Propiedades 3.2.2

1) El límite de una función en un punto puede no existir.

2) El límite si existe es único.

3) El límite de una función en un punto $\boldsymbol{a}$ no depende del valor de la función en $\boldsymbol{a}$. De hecho la función no tiene por qué estar definida en $\boldsymbol{a}$, ya que un punto de acumulación de un conjunto no tiene por qué pertenecer a dicho conjunto.

◁

Proposición 3.2.3 Sean $n,\, m \in \mathbb{N}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{a}$ un punto de acumulación de A,

$$\boldsymbol{f} : A \longrightarrow \mathbb{R}^m \ ,$$

y $B \subseteq A$, de forma que $\boldsymbol{a}$ es un punto de acumulación de B. Tenemos que

$$\text{Si existe } \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \text{ entonces también existe } \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \boldsymbol{f}|_B(\boldsymbol{x}).$$

En tal caso, además

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \boldsymbol{f}|_B(\boldsymbol{x}).$$

◁

El recíproco de la proposición 3.2.3, en general no es cierto.

Proposición 3.2.4 Sean n, $m \in \mathbb{N}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ sin puntos aislados $\boldsymbol{a} \in A$ y

$$\boldsymbol{f} : A \longrightarrow \mathbb{R}^m \ ,$$

una función. Se tiene que

$$\boldsymbol{f} \text{ es continua en } \boldsymbol{a} \Longleftrightarrow \ \exists \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}).$$

◁

La Proposición 3.2.4 sirve para evaluar límites en aquellos puntos en los que se pueda deducir directamente que la función es continua.

Ejemplo 3.2.5

$$\lim_{(x,y)\to(1,-1)} y\log(3x+y) = -\log 2$$

$$\lim_{(x,y,z)\to(1,0,1)} x^2y + z\operatorname{sen} y = 1^2 \cdot 0 + 1 \cdot \operatorname{sen} 0 = 0$$

◁

Por otra parte sirve también para estudiar la continuidad por medio de límites en puntos en los que no se pueda establecer aquella de manera directa.

Proposición 3.2.6 Sean n, $m \in \mathbb{N}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{a}$ un punto de acumulación de A,

$$\boldsymbol{f} : A \longrightarrow \mathbb{R}^m \ ,$$

una función y

$$f_1, \ldots, f_m : A \longrightarrow \mathbb{R} \ ,$$

sus componentes. Se tiene que

$$\text{Existe } \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \Longleftrightarrow \text{Existen } \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f_j(\boldsymbol{x}),\ j = 1, \ldots, m.$$

Además, en este caso, si

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f_j(\boldsymbol{x}) = L_j,\ j = 1, \ldots, m,$$

entonces

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = (L_1, \ldots, L_m)\,.$$

◁

3.2.2 Cálculo de límites

Proporcionaremos técnicas de cálculo de límites exclusivamente para funciones escalares, ya que los límites de funciones vectoriales se calculan a partir de sus componentes, como se estableció en la Proposición 3.2.6.

Puesto que la noción de límite para funciones de varias variables es análoga a la que teníamos para funciones reales de una variable real, podría pensarse que las técnicas que se tenían son similares a las que tendremos ahora. En general esto no es cierto. El cálculo de límites de funciones de varias variables es mucho más complicado que lo conocido hasta ahora, por lo que trataremos sólo algunos pocos casos particulares.

3.2.2.1 Aritmética

En general podremos aplicar la misma aritmética permitida que para límites de una variable, pero cuando el resultado sea uno de los infinitos, diremos que el límite no existe.
Las técnicas para la resolución de indeterminaciones no son aplicables aquí.

3.2.2.2 Coordenadas polares

Esta técnica sólo sirve para funciones de 2 variables y no proporciona respuestas en todos los casos. Su ventaja es que se trabaja con un límite en una variable.

Definición 3.2.7 Sean (x, y) las coordenadas habituales en $\mathbb{R}^2$ y $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. El cambio a coordenadas polares en (a, b) viene dado por las expresiones

$$\begin{cases} x = a + \rho\cos\theta \\ y = b + \rho\operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

con $\rho \in (0, \infty)$ y $\theta \in [0, 2\pi)$. $\triangleleft$

Ejemplo 3.2.8 Haremos el cambio a coordenadas polares en $(1, 2)$ para la función

$$f(x, y) = xy + e^{x-y}.$$

El cambio resulta ser

$$\begin{cases} x = 1 + \rho\cos\theta \\ y = 2 + \rho\operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

y la función resultante es

$$f(1 + \rho\cos\theta, 2 + \rho\operatorname{sen}\theta) = (1 + \rho\cos\theta)(2 + \rho\operatorname{sen}\theta) + e^{(\cos\theta - \operatorname{sen}\theta - 1)\rho}$$

$\triangleleft$

Supongamos que queremos resolver el siguiente problema. Sean $A \subseteq \mathbb{R}^2$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ de forma que exista un entorno reducido $U = \mathrm{B}^*\left((a,b)\,,\,\delta\right)$ de (a,b) con $U \subseteq A$ y

$$f : A \longrightarrow \mathbb{R}\ ,$$

una función. Se pretende calcular

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y).$$

Algoritmo 3.2.9

1) Realizar el cambio a coordenadas polares en (a,b) sobre la función f

$$g(\rho,\theta) = f(a+\rho\cos\theta, b+\rho\operatorname{sen}\theta),$$

con $0<\rho<\delta$ y $\theta\in[0,2\pi)$.

2) Calcular el límite en una variable

$$\lim_{\rho\to 0^+} g(\rho,\theta),$$

donde $\theta\in[0,2\pi)$ es un parámetro.

3) Según sea el límite anterior, se tiene que

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \begin{cases} \text{No existe,} & \text{si } \displaystyle\lim_{\rho\to 0^+} g(\rho,\theta) = L(\theta) \\ \text{No existe,} & \text{si } \displaystyle\lim_{\rho\to 0^+} g(\rho,\theta) \text{ no existe o es } \pm\infty \\ L, & \text{si } \displaystyle\lim_{\rho\to 0^+} g(\rho,\theta) = L\in\mathbb{R},\ \forall\,\theta\in[0,2\pi) \\ & \quad \text{y además existe } h(\rho) \text{ con} \\ & \quad \displaystyle\lim_{\rho\to 0^+} h(\rho) = 0 \text{ y} \\ & \quad |g(\rho,\theta)-L| \le h(\rho),\ \forall\,\theta\in[0,2\pi) \\ \text{Indeterminado,} & \text{si se da cualquier otro caso.} \end{cases}$$

$\triangleleft$

Ejemplo 3.2.10 Estudiemos el límite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y),$$

donde

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2x^2(y+1)+y^2}{2x^2+y^2}, & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}.$$

El cambio de coordenadas que tenemos que considerar en este caso es

$$\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\ y=\rho\operatorname{sen}\theta\end{cases}$$

con $\rho\in(0,\infty)$ y $\theta\in[0,2\pi)$.
Sea

$$\begin{aligned}g(\rho,\theta)=&f(\rho\cos\theta,\rho\operatorname{sen}\theta)=\\ &\frac{2\rho^2\cos^2\theta(\rho\operatorname{sen}\theta+1)+\rho^2\operatorname{sen}^2\theta}{2\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\operatorname{sen}^2\theta}=\\ &\frac{\rho^2(2\rho\cos^2\theta\operatorname{sen}\theta+\cos^2\theta+1)}{\rho^2(1+\cos^2\theta)}=\\ &\rho\frac{2\cos^2\theta\operatorname{sen}\theta}{1+\cos^2\theta}+1.\end{aligned}$$

Ahora

$$\lim_{\rho\to0^+}g(\rho,\theta)=\lim_{\rho\to0^+}\left(\rho\frac{2\cos^2\theta\operatorname{sen}\theta}{1+\cos^2\theta}+1\right)=1.$$

Veamos si podemos encontrar la función $h(\rho)$ del Algoritmo 3.2.9

$$|g(\rho,\theta)-1|=\left|\rho\frac{2\cos^2\theta\operatorname{sen}\theta}{1+\cos^2\theta}+1-1\right|=\rho\frac{2\cos^2\theta\,|\operatorname{sen}\theta|}{1+\cos^2\theta}\leq$$

$$\rho\frac{2}{1+\cos^2\theta}\leq2\rho=h(\rho),$$

y se tiene que

$$\lim_{\rho\to0^+}h(\rho)=\lim_{\rho\to0^+}2\rho=0,$$

por lo que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=1$$

◁

Nota 3.2.11 Sean $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, un intervalo $I \subseteq [0, 2\pi)$ y $\delta > 0$. Llamaremos *sector* de amplitud I con radio δ y vértice (a,b) al conjunto

$$\mathrm{Sect}_I\left((a,b)\,,\,\delta\right) = \{(a + \rho\cos\theta, b + \rho\operatorname{sen}\theta) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 0 < \rho < \delta,\ \theta \in I\}.$$

Sean $A \subseteq$, tal que existe $\delta > 0$ y un intervalo $I \subseteq [0, 2\pi)$ verificando que

$$A \cap \mathrm{B}^*\left((a,b)\,,\,\delta\right) = \mathrm{Sect}_I\left((a,b)\,,\,\delta\right),$$

y una función

$$f : A \longrightarrow \mathbb{R}\ .$$

Para calcular

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y),$$

Se puede utilizar una versión del Algoritmo 3.2.9 en la que sustituiremos el intervalo $[0, 2\pi)$ por el intervalo I. ◁

Ejemplo 3.2.12 Sean

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 0 < y < x\}.$$

y la función

$$\begin{aligned} f :\quad A &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto \frac{y^2}{x} \end{aligned}\ .$$

Calculemos

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y).$$

Es fácil ver que A está en las condiciones de la Nota 3.2.11, por ejemplo para $\mathrm{Sect}_{(0,\pi/4)}\left((0,0)\,,\,1\right)$. Podemos utilizar por lo tanto la versión modificada del Algoritmo 3.2.9. El cambio de coordenadas es

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

con $0 < \rho < \infty$ y $\theta \in [0, \pi/4)$. ◁

$$g(\rho,\theta) = f(\rho\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\theta) = \frac{\rho^2\operatorname{sen}^2\theta}{\rho\cos\theta} = \rho\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos\theta}.$$

Se tiene que

$$\lim_{\rho\to 0^+} g(\rho,\theta) = \lim_{\rho\to 0^+} \rho\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos\theta} = 0.$$

Veamos si podemos acotar para $\theta \in (0, \pi/4)$.

$$|g(\rho,\theta) - 0| = \left|\rho\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos\theta}\right| =$$

$$\text{(ya que si } \theta \in (0,\pi/4),\ \cos\theta > 0)$$

$$= \rho\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos\theta} \leq \frac{\rho}{\cos\theta} \leq$$

$$\left(\text{ya que } \theta \in (0,\pi/4) \Rightarrow 1 > \cos\theta > \sqrt{2}/2 \Rightarrow 1 < 1/\cos\theta < 2/\sqrt{2}\right)$$

$$\leq \frac{2\rho}{\sqrt{2}} = h(\rho),$$

con

$$\lim_{\rho\to 0^+} h(\rho) = \lim_{\rho\to 0^+} \frac{2\rho}{\sqrt{2}} = 0,$$

por lo que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$$

3.2.2.3 Límites sobre conjuntos

Podemos utilizar 3.2.3 para probar que un límite no existe. Dados n, $m \in \mathbb{N}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{a}$ un punto de acumulación de A y

$$\boldsymbol{f} : A \longrightarrow \mathbb{R}^m \ ,$$

si encontrásemos o bien un subconjunto $B \subseteq A$ con $\boldsymbol{a}$ punto de acumulación de B de forma que no exista

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \boldsymbol{f}|_B(\boldsymbol{x}),$$

o bien dos subconjuntos $B_1 \subseteq A$ y $B_2 \subseteq A$ con $\boldsymbol{a}$ punto de acumulación de B_1 y de B_2 de forma que

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \boldsymbol{f}|_{B_1}(\boldsymbol{x}) \neq \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \boldsymbol{f}|_{B_2}(\boldsymbol{x}),$$

entonces

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}),$$

no podría existir.

Para utilizar en la práctica esta técnica con comodidad introduciremos la siguiente notación

Definición 3.2.13 Sean n, $m \in \mathbb{N}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{a}$ un punto de acumulación de A,

$$\boldsymbol{f} : A \longrightarrow \mathbb{R}^m \ ,$$

y $B \subseteq A$ con $\boldsymbol{a}$ punto de acumulación de B, llamaremos límite de $\boldsymbol{f}$ en $\boldsymbol{a}$ sobre el conjunto B a

$$\lim_{\substack{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}\\ \boldsymbol{x}\in B}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \boldsymbol{f}|_B(\boldsymbol{x})$$

◁

3.2.2.4 Límites sobre curvas

Consideramos ahora un caso particular de límite sobre conjuntos en los que los conjuntos son soportes de *curvas*. Aunque más adelante estudiaremos con detalle este tipo de conjuntos, por el momento será suficiente considerar la siguiente definición.

Definición 3.2.14 Sea $n \in \mathbb{N}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y $\boldsymbol{a}$ un punto de acumulación de A. Llamaremos *curva admisible* sobre A en $\boldsymbol{a}$ a una función continua e inyectiva

$$\boldsymbol{\varphi} : I \longrightarrow \mathbb{R}^n \ ,$$

definida en un intervalo abierto I y verificando las propiedades siguientes

1) $\boldsymbol{a} \in \operatorname{sop} \boldsymbol{\varphi}$.

2) Existe $\delta > 0$ tal que

$$\mathrm{B}^*(\boldsymbol{a},\, \delta) \cap \operatorname{sop} \boldsymbol{\varphi} \subseteq A,$$

◁

La utilidad de las curvas para probar que no existen ciertos límites se debe a que reducen nuestros cálculos a tratar con límites de una variable.

Proposición 3.2.15 Sean n, $m \in \mathbb{N}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{a}$ un punto de acumulación de A,

$$\boldsymbol{f} : A \longrightarrow \mathbb{R}^m \ ,$$

y $\boldsymbol{\varphi} : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una curva admisible sobre A en $\boldsymbol{a}$. Sea t_0 el único punto de I con $\boldsymbol{\varphi}(t_0) = \boldsymbol{a}$. Se tiene que

$$\lim_{\substack{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}\\ \boldsymbol{x}\in\operatorname{sop}\boldsymbol{\varphi}}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \lim_{t\to t_0} \boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{\varphi}(t)$$

◁

Nota 3.2.16 Podemos extender lo anterior a curvas definidas sobre intervalos cerrados. Con las notaciones de la Proposición 3.2.15, supongamos ahora además que $I = [a, b]$. Si $t_0 = a$ entonces se tendría que

$$\lim_{\substack{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}\\ \boldsymbol{x}\in\operatorname{sop}\boldsymbol{\varphi}}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \lim_{t\to a^+} \boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{\varphi}(t)$$

Si $t_0 = b$ entonces se tendría que

$$\lim_{\substack{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}\\ \boldsymbol{x}\in\operatorname{sop}\boldsymbol{\varphi}}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \lim_{t\to b^-} \boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{\varphi}(t)$$

$\triangleleft$

Ejemplo 3.2.17 Sea

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x}{y^3}, & \text{si } y \neq 0 \\ 0, & \text{si } y = 0 \end{cases}.$$

Estudiemos

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y),$$

Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, tomamos la curva

$$C_\alpha = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x = \alpha y^3\}$$

Para

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varphi}_\alpha : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \big(\alpha t^3, t\big) \end{aligned},$$

se tiene que $C_\alpha = \operatorname{sop}\boldsymbol{\varphi}_\alpha$. Es fácil ver que cada $\boldsymbol{\varphi}_\alpha$ es una curva admisible sobre $\mathbb{R}^2$ en $(0,0)$, y que $\boldsymbol{\varphi}(0) = (0,0)$. Teniendo en cuenta que la recta $y = 0$ sólo corta a cada C_α en $(0,0)$,

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ (x,y)\in C_\alpha}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ (x,y)\in C_\alpha}} \frac{x}{y^3} = \lim_{t\to 0} \frac{\alpha t^3}{t^3} = \lim_{t\to 0} \alpha = \alpha,$$

por tanto sobre dos curvas distintas de la familia los límites son distintos y

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y),$$

no existe.

Habitualmente no hace falta completar todos los detalles como en este ejemplo y, sin construir explícitamente $\boldsymbol{\varphi}_\alpha$, se podría escribir directamente lo siguiente

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ (x,y)\in C_\alpha}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=\alpha y^3}} \frac{x}{y^3} = \lim_{y\to 0} \frac{\alpha y^3}{y^3} = \lim_{y\to 0} \alpha = \alpha,$$

$\triangleleft$

Definición 3.2.18 Sean n, $m \in \mathbb{N}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{a}$ un punto de acumulación de A y

$$\boldsymbol{f} : A \longrightarrow \mathbb{R}^m \ .$$

Los límites sobre las rectas que pasan por $\boldsymbol{a}$ y que sean curvas admisibles sobre A de f, se llaman *límites direccionales* de $\boldsymbol{f}$ en $\boldsymbol{a}$. ◁

3.2.2.5 Acotación

Proposición 3.2.19 Sean $n \in \mathbb{N}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{a}$ un punto de acumulación de A y

$$f, g : A \longrightarrow \mathbb{R} \ ,$$

dos funciones escalares tales que $\boldsymbol{g}$ es acotada y

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = 0.$$

Entonces

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x})g(\boldsymbol{x}) = 0.$$

◁

Proposición 3.2.20 [Regla del Sandwich]
Sean $n \in \mathbb{N}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{a}$ un punto de acumulación de A y

$$f, g, h : A \longrightarrow \mathbb{R} \ ,$$

tres funciones escalares tales existe U entorno reducido de $\boldsymbol{a}$ con

$$f(\boldsymbol{x}) \leq g(\boldsymbol{x}) \leq h(\boldsymbol{x}), \ \forall\, \boldsymbol{x} \in U \cap A,$$

y tales que

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} h(\boldsymbol{x}) = L.$$

Entonces

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} g(\boldsymbol{x}) = L.$$

◁

3.3 Ejercicios

Ejercicio 3.1 Utilizando las propiedades de las Secciones 3.1.2 y 3.1.3 y de las funciones elementales, estudiar dónde se puede decir directamente que las siguientes funciones son continuas. Describir detalladamente cómo se aplican las distintas propiedades.

a) $f(x, y) = xy$.

b) $\boldsymbol{f}(x) = \big(x^2, -x, 2, \log x\big)$.

c) $\boldsymbol{f}(x, y, z, t) = \Big(x^2 - t + 2y, z^2\sqrt{1 - xy}\cos t\Big)$.

d) $\boldsymbol{f}(x_1, x_2, x_3) = (2, 1)$.

e) $f(r, s, t) = \log(1 - r^2)\log(s^2 + t^2)$.

f) $\boldsymbol{f}(h, k) = \big(h - k, k - h, k, 1, h^3, \tan k\big)$.

g) $\boldsymbol{f}(x, y) = \begin{cases} \left(\dfrac{x^2(2 + y) + 2y^2}{x^2 + y^2}, \operatorname{sen}(x + y)\right), & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ (2, 0), & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$

h) $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x - y}{x + y}, & \text{si } y \neq -x \\ 0, & \text{si } y = -x \end{cases}.$

i) $f(x) = x^2$.

j) $\boldsymbol{f}(x, y) = (y/x, x/y)$.

k) $\boldsymbol{f}(x, y, z, t, s) = (t - 1, 0)$.

l) $\boldsymbol{f}(x, y, z) = (y, z, x)$.

Ejercicio 3.2 Calcular, si existe, el límite en $(0, 0)$ de las siguientes funciones

a) $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$

b) $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x - y}{x + y}, & \text{si } y \neq -x \\ 0, & \text{si } y = -x \end{cases}.$

c) $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2 + y^4}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$

d) $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + y^2}{x^2 + y}, & \text{si } y \neq -x^2 \\ 0, & \text{si } y = -x^2 \end{cases}.$

e) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$

f) $f(x,y) = \begin{cases} x \operatorname{sen}(x/y), & \text{si } y \neq 0 \\ x, & \text{si } y = 0 \end{cases}.$

g) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y}{y+x^2}, & \text{si } y \neq -x^2 \\ 1, & \text{si } y = -x^2 \end{cases}.$

Ejercicio 3.3 Probar que los límites de la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x}{y^3}, & \text{si } y \neq 0 \\ 0, & \text{si } y = 0 \end{cases}.$$

en $(0,0)$ sobre las curvas

$$C_\alpha = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x = \alpha y^4\}$$

coinciden $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$, pero sin embargo f no tiene límite en $(0,0)$.

Ejercicio 3.4 Sean p, $q \in \mathbb{R}$ con $p > 0$ y $q > 0$, y

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x > 0,\ y > 0\}.$$

Estudiar

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ (x,y)\in D}} \frac{x^p y^q}{x^2+y^2-xy}.$$

Ejercicio 3.5 Estudiar la continuidad de

a) $\boldsymbol{f}(x,y) = \begin{cases} \left(\dfrac{x^2(2+y)+2y^2}{x^2+y^2}, \operatorname{sen}(x+y)\right), & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ (2,0), & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$

b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 1, & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$

c) $f(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{2x-y+z-2}{x+y-z-1}, & \text{si } x+y-z-1 \neq 0 \\ 0, & \text{si } x+y-z-1 = 0 \end{cases}.$

d) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y}{x}\operatorname{sen}(x^2+y^2), & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}.$

Capítulo 4

Cálculo diferencial

4.1 Diferenciabilidad

Vamos a establecer una forma alternativa de describir la derivabilidad en una variable.

Proposición 4.1.1 Sean I un intervalo abierto, $a \in I$ y $\; f : I \longrightarrow \mathbb{R}\;$ una función. Son equivalentes

(i) f es derivable en a.

(ii) Existe $b \in \mathbb{R}$ y una función $g(h)$ definida en un cierto U, entorno reducido de 0, con

$$\lim_{h \to 0} \frac{g(h)}{h} = 0,$$

y tal que para cada $h \in U$,

$$f(a+h) = f(a) + bh + g(h). \tag{4.1}$$

Además, en estas condiciones, $b = f'(a)$ y la expresión de $g(h)$ es única.
Demostración:
(i)⇒(ii)
Supongamos que f es derivable en a. Sea

$$g(h) = f(a+h) - f(a) - f'(a)h.$$

Se tiene que

$$\lim_{h \to 0} \frac{g(h)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - f'(a)h}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - \lim_{h \to 0} f'(a) =$$

$$= f'(a) - f'(a) = 0.$$

Por lo tanto, si f es derivable en a, existe una función $g(h)$ verificando

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(h)}{h} = 0,$$

tal que

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + g(h). \tag{4.2}$$

(ii)⇒(i)

Por otra parte, supongamos que existe $b \in \mathbb{R}$ y una función $g(h)$ definida en un entorno reducido de 0 con

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(h)}{h} = 0,$$

y tal que

$$f(a+h) = f(a) + bh + g(h).$$

entonces, despejando, tenemos que

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = b + \frac{g(h)}{h},$$

y tomando límites

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} b + \lim_{h\to 0} \frac{g(h)}{h} = b,$$

de donde se tiene que f es derivable en a y además $f'(a) = b$. $\triangleleft$

Nota 4.1.2 Con las notaciones de la Proposición 4.1.1, cuando f es derivable en a,

1) La fórmula de aproximación que, para h *pequeño*, proporcionaba la teoría de Taylor a orden 1

$$f(a+h) \approx f(a) + f'(a)h, \tag{4.3}$$

queda ahora directamente justificada.

2) Podemos escribir la fórmula de aproximación (4.3) como

$$f(a+h) - f(a) \approx f'(a)h. \tag{4.4}$$

Obsérvese que

$$\begin{array}{c} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ h \longmapsto f'(a)h \end{array}, \tag{4.5}$$

es una aplicación lineal. Por eso a veces se afirma que la derivada en a nos permite dar una aproximación al incremento de la función, lineal en el incremento de la variable.

3) La aplicación anterior (4.5) se llama la diferencial de f en a y se denota por $\mathbf{d}f(a)$.

4) La función $g(h)$ adopta la forma

$$g(h) = f(a+h) - f(a) - f'(a)h.$$

5) Se tiene

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(h)}{h} = 0 \Longleftrightarrow \lim_{h\to 0} \frac{g(h)}{|h|} = 0 \Longleftrightarrow \lim_{h\to 0} \frac{|g(h)|}{|h|} = 0. \tag{4.6}$$

$\triangleleft$

Utilizaremos la caracterización de la derivada de la Proposición 4.1.1 para extender la noción de derivada a funciones de varias variables. En este caso hablaremos de *diferenciabilidad* en vez de derivabilidad y de *diferencial* en vez de derivada.

Definición 4.1.3 Sean $n, m \in \mathbb{N}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto, $\boldsymbol{a} \in A$ y $\boldsymbol{f} : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Diremos que $\boldsymbol{f}$ es *diferenciable* en $\boldsymbol{a}$ si existen

1) una aplicación lineal $\mathbf{d}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$,

2) un entorno reducido U de $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$,

3) y una función
$$\boldsymbol{g} : U \longrightarrow \mathbb{R}^m \ ,$$
con
$$\lim_{\boldsymbol{h}\to \mathbf{0}} \frac{\boldsymbol{g}(\boldsymbol{h})}{||\boldsymbol{h}||} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^m,$$

tales que
$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) + \mathbf{d}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{h}) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{h}).$$
Además, cuando $\boldsymbol{f}$ es diferenciable en $\boldsymbol{a}$, la aplicación lineal $\mathbf{d}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$ es la única verificando lo anterior y recibe el nombre de *diferencial* de $\boldsymbol{f}$ en $\boldsymbol{a}$. $\triangleleft$

Nota 4.1.4 Con las notaciones de la Definición 4.1.3,

1) Las nociones de diferenciabilidad y diferencial generalizan las de derivabilidad y derivada respectivamente que se tenían para funciones de una variable.

2) Para $\boldsymbol{h}$ con $||\boldsymbol{h}||$ *pequeña*, se tiene la fórmula de aproximación

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) \approx \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) + \mathbf{d}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{h}), \tag{4.7}$$

3) Podemos escribir la fórmula de aproximación (4.7) como

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) \approx \mathbf{d}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{h}). \tag{4.8}$$

Así, podemos afirmar que la diferencial en $\boldsymbol{a}$ permite aproximar el incremento de la función linealmente respecto del incremento de la variable.

4) La función $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{h})$ adopta la forma

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{h})=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})-\mathbf{d}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{h}),$$

por eso la condición de diferenciabilidad de $\boldsymbol{f}$ en $\boldsymbol{a}$ se puede reducir a comprobar que existe una aplicación lineal $\mathbf{d}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{h})$ tal que

$$\lim_{\boldsymbol{h}\to\mathbf{0}} \frac{||\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})-\mathbf{d}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{h})||}{||\boldsymbol{h}||}=0 \tag{4.9}$$

Esto es debido a que,

5) se tiene

$$\lim_{\boldsymbol{h}\to\mathbf{0}} \frac{\boldsymbol{g}(\boldsymbol{h})}{||\boldsymbol{h}||}=\mathbf{0} \Longleftrightarrow \lim_{\boldsymbol{h}\to\mathbf{0}} \frac{||\boldsymbol{g}(\boldsymbol{h})||}{||\boldsymbol{h}||}=0. \tag{4.10}$$

6) Diremos que $\boldsymbol{f}$ es *diferenciable* en A, si es diferenciable en $\boldsymbol{a}$ para cada $\boldsymbol{a}\in A$.

◁

Proposición 4.1.5 Sean $n,m\in\mathbb{N}$, $A\subseteq\mathbb{R}^n$ un abierto, $\boldsymbol{a}\in A$ y $\boldsymbol{f}: A\longrightarrow\mathbb{R}^m$. Se tiene que

$$\boldsymbol{f} \text{ diferenciable en } \boldsymbol{a} \Longrightarrow \boldsymbol{f} \text{ continua en } \boldsymbol{a}.$$

◁

El recíproco de la Proposición 4.1.5 en general no es cierto.

Una consecuencia inmediata de la Proposición 4.1.5 es que si $\boldsymbol{f}$ es diferenciable en A, entonces es continua en A.

4.1.1 Interpretación geométrica

Definición 4.1.6 Sean $n,m\in\mathbb{N}$, A un abierto de $\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{a}\in A$ y

$$\begin{aligned}\boldsymbol{f}: A &\longrightarrow \mathbb{R}^m\\ \boldsymbol{x} &\longmapsto \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\end{aligned},$$

diferenciable en $\boldsymbol{a}$.
Sea la función auxiliar

$$\begin{aligned}\boldsymbol{T}: \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^m\\ \boldsymbol{x} &\longmapsto \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})+\mathbf{d}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})\end{aligned},$$

1) Llamaremos *variedad tangente* a graf $\boldsymbol{f}$ en $\boldsymbol{a}$ al grafo de la aplicación $\boldsymbol{T}$, es decir al conjunto de $\mathbb{R}^{n+m}$

$$\operatorname{graf} \boldsymbol{T} = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \,/\, \boldsymbol{z} = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})\}\,.$$

2) Llamaremos *variedad tangente* a sop $\boldsymbol{f}$ en $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$ al soporte de la aplicación T, es decir al conjunto de $\mathbb{R}^m$

$$\operatorname{sop} \boldsymbol{T} = \{\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^m \,/\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n\}\,.$$

3) Sean $G \subseteq A$ el lugar geométrico de los puntos que anulan $\boldsymbol{f}$,

$$G = \{\boldsymbol{x} \in A \,/\, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}\}\,,$$

y $\boldsymbol{a} \in G$. Llamaremos *variedad tangente* a G en $\boldsymbol{a}$ a

$$\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \,/\, \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}\}$$

$\triangleleft$

Para los casos representables gráficamente presentados en las Secciones 2.2.1 y 2.2.2, las variedades tangentes son rectas tangentes para las figuras que son curvas y planos tangentes para las figuras que son superficies, y tienen el significado geométrico habitual de tangencia.

También para los puntos de las curvas y superficies de los Ejercicios 1.3 y 1.4 dados por igualdades, las variedades tangentes son las rectas y planos tangentes en el sentido habitual

Cuando en las siguientes secciones veamos expresiones que permiten manejar la diferencial, podremos describir estas variedades con fórmulas concretas.

4.2 La matriz jacobiana

El estudio de la diferenciabilidad utilizando su definición es, en general, muy difícil. La primera dificultad surge del hecho de que por el momento ni siquiera conocemos una expresión de la aplicación lineal diferencial que debe existir de forma única. Lo primero que debemos hacer es encontrar una expresión que nos permita manejar la diferencial. Como es una aplicación lineal, bastará con conocer una expresión para su matriz asociada.

Definición 4.2.1 Sean $n, m \in \mathbb{N}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto, $\boldsymbol{a} \in A$ y $\boldsymbol{f} : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$ diferenciable en $\boldsymbol{a}$. Llamaremos *matriz jacobiana* de $\boldsymbol{f}$ en $\boldsymbol{a}$ a la matriz asociada a $\mathbf{d}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$. Denotaremos a esta matriz $m \times n$ por $\mathrm{J}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$. $\triangleleft$

4.2.1 Cálculo de la matriz jacobiana

Supongamos que estamos en las condiciones de la Definición 4.2.1. Intentaremos describir $\mathrm{J}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$. Como $\boldsymbol{f}$ es diferenciable en $\boldsymbol{a}$, tenemos que

$$\lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}} \frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})-\mathrm{J}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})\boldsymbol{h}}{||\boldsymbol{h}||}=\boldsymbol{0}.$$

Por lo tanto existirán los límites direccionales en $\boldsymbol{0}$ y todos valdrán $\boldsymbol{0}\in\mathbb{R}^m$. En particular, si $[\boldsymbol{e_1},\ldots,\boldsymbol{e_n}]$ es la base canónica de $\mathbb{R}^n$, tendremos que para $j=1,2,\ldots n$,

$$\lim_{h\to 0} \frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}+h\boldsymbol{e_j})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})-h\mathrm{J}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})\boldsymbol{e_j}}{||h\boldsymbol{e_j}||}=\lim_{h\to 0} \frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}+h\boldsymbol{e_j})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})-h\mathrm{J}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})\boldsymbol{e_j}}{|h|}=\boldsymbol{0}.$$

por lo que

$$\lim_{h\to 0} \frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}+h\boldsymbol{e_j})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})-h\mathrm{J}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})\boldsymbol{e_j}}{h}=\lim_{h\to 0}\left(\frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}+h\boldsymbol{e_j})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})}{h}-\mathrm{J}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})\boldsymbol{e_j}\right)=\boldsymbol{0}.$$

Pero como $\mathrm{J}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})\boldsymbol{e_j}$ es constante respecto de h,

$$\lim_{h\to 0}\mathrm{J}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})\boldsymbol{e_j}=\mathrm{J}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})\boldsymbol{e_j},$$

y por la aritmética de límites,

$$\mathrm{J}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})\boldsymbol{e_j}=\lim_{h\to 0}\frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}+h\boldsymbol{e_j})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})}{h},$$

pero $\mathrm{J}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})\boldsymbol{e_j}$ es la columna j-ésima de $\mathrm{J}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$. Luego las columnas de $\mathrm{J}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$ se pueden obtener calculando n límites en una variable. Cada uno de ellos se puede obtener calculando los límites de las componentes de las funciones que aparecen, con lo que $\mathrm{J}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$ (y por tanto $\mathrm{J}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$) se obtiene calculando nm *sencillos* límites de funciones escalares de una variable.
Resumiendo, para $i=1,2,\ldots m$ y $j=1,2,\ldots n$, el elemento i,j de $\mathrm{J}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$ es

$$\lim_{h\to 0}\frac{f_i(\boldsymbol{a}+h\boldsymbol{e_j})-f_i(\boldsymbol{a})}{h}.$$

4.3 Derivadas parciales

Definición 4.3.1 Sean $n,m,j\in\mathbb{N}$ con $j\leq n$, $A\subseteq\mathbb{R}^n$ un abierto, $[\boldsymbol{e_1},\ldots,\boldsymbol{e_n}]$ la base canónica de $\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{a}\in A$ y

$$\begin{aligned}\boldsymbol{f}:\qquad A &\longrightarrow \mathbb{R}^m\\ (x_1,\ldots,x_n) &\longmapsto \boldsymbol{f}(x_1,\ldots,x_n)\end{aligned}.$$

Diremos que $\boldsymbol{f}$ es *derivable* respecto de la variable x_j si existe y es finito el siguiente límite

$$\lim_{h\to 0} \frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}+h\boldsymbol{e_j})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})}{h}.$$

A su valor le llamaremos *derivada parcial* de $\boldsymbol{f}$ respecto de x_j en $\boldsymbol{a}$ y la denotaremos por alguno de los símbolos siguientes

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_j}(\boldsymbol{a}),\ \boldsymbol{f}_{x_j}(\boldsymbol{a}).$$

$\triangleleft$

Proposición 4.3.2 Sean $n, m \in \mathbb{N}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto, $\boldsymbol{a} \in A$ y $\boldsymbol{f} : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una función. Se tiene que

$$\boldsymbol{f} \text{ es diferenciable en } \boldsymbol{a} \Longrightarrow \text{ existen todas las derivadas parciales de } \boldsymbol{f} \text{ en } \boldsymbol{a}.$$

Demostración:
El resultado se deduce del desarrollo presentado en el apartado 4.2.1. $\triangleleft$

Nota 4.3.3 El recíproco de la Proposición 4.3.2 en general no es cierto. Existen funciones $\boldsymbol{f}$ derivables respecto de todas sus variables en un cierto punto $\boldsymbol{a}$ y que sin embargo no son diferenciables en $\boldsymbol{a}$. Para estas funciones es posible definir su matriz Jacobiana $\mathrm{J}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$, pero no tiene sentido decir que es la matriz asociada a la diferencial en $\boldsymbol{a}$ si tal diferencial no existe. $\triangleleft$

Nota 4.3.4 Las funciones $\boldsymbol{f}$ para las que existen todas sus derivadas parciales en un punto $\boldsymbol{a}$, pero que no son diferenciables en $\boldsymbol{a}$, mencionadas en la Nota 4.3.3, ponen de manifiesto que la existencia de las derivadas parciales **no** es la generalización de la derivada en una variable, ya que tales funciones $\boldsymbol{f}$

1) No tienen por qué ser continuas en $\boldsymbol{a}$.

2) Si bien se puede construir la expresión que aparece en la Ecuación (4.7),

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) + \mathrm{J}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})\boldsymbol{h},$$

ésta no tiene por qué aproximar el valor de $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h})$.

Repetimos una vez más que en varias variables es la diferenciabilidad la noción que generaliza a la derivada en una variable. $\triangleleft$

Definición 4.3.5 Sean $n \in \mathbb{N}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto, $\boldsymbol{a} \in A$ y

$$f : \begin{array}{rcl} A & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & f(x_1, \ldots, x_n) \end{array},$$

una función escalar diferenciable en $\boldsymbol{a}$. Llamaremos *gradiente* de f en $\boldsymbol{a}$ a la matriz Jacobiana $\mathrm{J}f(\boldsymbol{a})$ interpretada como un vector de $\mathbb{R}^n$. Es decir, su expresión es

$$\nabla f(\boldsymbol{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\boldsymbol{a}), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{a}) \right)$$

◁

Definición 4.3.6 Sean $n \in \mathbb{N}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto, $\boldsymbol{a} \in A$ y $\boldsymbol{f} : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ diferenciable en $\boldsymbol{a}$. Llamaremos *jacobiano* de $\boldsymbol{f}$ en $\boldsymbol{a}$ al determinante de la matriz jacobiana $\mathrm{J}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$. ◁

Proposición 4.3.7 Sean $n, m \in \mathbb{N}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto, $\boldsymbol{a} \in A$ y $\boldsymbol{f} : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$ diferenciable en $\boldsymbol{a}$, con componentes $f_1, f_2, \ldots, f_m$. Entonces las componentes de $\mathbf{d}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$ son

$$\mathbf{d}f_1(\boldsymbol{a}), \mathbf{d}f_2(\boldsymbol{a}), \ldots, \mathbf{d}f_m(\boldsymbol{a}).$$

◁

Nota 4.3.8 La Proposición 4.3.7 tiene las siguientes consecuencias. Sean $n, m \in \mathbb{N}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto, $\boldsymbol{a} \in A$ y

$$\boldsymbol{f} : \begin{array}{rcl} A & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & \boldsymbol{f}(x_1, \ldots, x_n) \end{array},$$

diferenciable en $\boldsymbol{a}$, con componentes $f_1, f_2, \ldots, f_m$.

1) La fila j-ésima de $\mathrm{J}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$ es la matriz fila $\mathrm{J}f_j(\boldsymbol{a})$, $j = 1, 2, \ldots, m$.

2) $\mathrm{J}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$ es la matriz por filas del sistema de vectores

$$[\nabla f_1(\boldsymbol{a}), \nabla f_2[\boldsymbol{a}], \ldots, \nabla f_m[\boldsymbol{a}]]$$

3) La expresión general de $\mathrm{J}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$ es

$$\mathrm{J}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\boldsymbol{a}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\boldsymbol{a}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\boldsymbol{a}) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\boldsymbol{a}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\boldsymbol{a}) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\boldsymbol{a}) \end{pmatrix} \tag{4.11}$$

A veces para denotar a la matriz jacobiana, se emplea lo siguiente

$$\mathrm{J}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) = \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial\left(x_1, \ldots, x_n\right)}(\boldsymbol{a}) = \frac{\partial\left(f_1, \ldots, f_n\right)}{\partial\left(x_1, \ldots, x_n\right)}(\boldsymbol{a})$$

$\triangleleft$

4.4 Diferenciabilidad y derivabilidad en un abierto

Definición 4.4.1 Sean $n, j, m \in \mathbb{N}$ con $j \leq n$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto, $\boldsymbol{a} \in A$ y

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f}: \quad & A \longrightarrow \mathbb{R}^m \\ & \left(x_1, \ldots, x_n\right) \longmapsto \boldsymbol{f}\left(x_1, \ldots, x_n\right) \end{aligned} .$$

Diremos que $\boldsymbol{f}$ es *derivable* en A respecto de x_j si $\boldsymbol{f}$ es derivable en $\boldsymbol{a}$ respecto de x_j para cada $\boldsymbol{a} \in A$. En este caso tendremos una nueva función también definida en A llamada *derivada parcial* o simplemente *parcial* de $\boldsymbol{f}$ dada por

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_j}: A & \longrightarrow \mathbb{R}^m \\ \boldsymbol{a} & \longmapsto \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_j}(\boldsymbol{a}) \end{aligned} ,$$

a la que también podremos denotar por $\boldsymbol{f}_{x_j}$. $\triangleleft$

4.4.1 Derivadas sucesivas

Sean $n, j, k, m \in \mathbb{N}$ con $j, k \leq n$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto, $\boldsymbol{a} \in A$ y

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f}: \quad & A \longrightarrow \mathbb{R}^m \\ & \left(x_1, \ldots, x_n\right) \longmapsto \boldsymbol{f}\left(x_1, \ldots, x_n\right) \end{aligned}$$

derivable respecto de x_j en A. Supongamos que la función $\dfrac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_j}$ es derivable respecto de x_k en A. Entonces tendremos una nueva función definida en A a la que llamaremos derivada parcial (o simplemente parcial) de orden 2 de $\boldsymbol{f}$ respecto de x_j y x_k dada por

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}: A & \longrightarrow \mathbb{R}^m \\ \boldsymbol{a} & \longmapsto \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_j}\right)(\boldsymbol{a}) \end{aligned} .$$

También se puede llamar a esta función parcial dos veces de $\boldsymbol{f}$ respecto de x_j y x_k. Otra notación válida para esta función será

$$\boldsymbol{f}_{x_j x_k}.$$

Si esta nueva función fuese derivable en A respecto de otra variable x_h, podríamos obtener otra nueva función siguiendo el mismo procedimiento. Podremos iterar el proceso siempre que sigamos teniendo derivabilidad en A respecto de alguna variable en cada paso. De esta forma, Si $p \in \mathbb{N}$, siempre que tenga sentido, tendremos

1) Si podemos derivar sucesivamente f respecto de las variables $x_{j_1}, \ldots, x_{j_p}$, en A, llamaremos a la función definida en A así obtenida parcial de orden p de $\boldsymbol{f}$ respecto de las variables $x_{j_1}, \ldots, x_{j_p}$ o bien parcial p veces de $\boldsymbol{f}$ respecto de las variables $x_{j_1}, \ldots, x_{j_p}$ y se denotará por

$$\frac{\partial^p \boldsymbol{f}}{\partial x_{j_1} \cdots \partial x_{j_p}}.$$

o por

$$\boldsymbol{f}_{x_{j_1} \cdots x_{j_p}}.$$

2) La notación para una misma variable repetida p veces

$$\frac{\partial^p \boldsymbol{f}}{\partial x_j \cdots \partial x_j},$$

se abreviará como

$$\frac{\partial^p \boldsymbol{f}}{\partial x_j^p}.$$

3) Este tipo de abreviatura se podrá usar cuando tengamos una misma variable repetida de manera consecutiva entre otras variables. Por ejemplo

$$\frac{\partial^8 \boldsymbol{f}}{\partial x \partial y \partial y \partial y \partial z \partial x \partial x \partial y},$$

se escribirá como

$$\frac{\partial^8 \boldsymbol{f}}{\partial x \partial y^3 \partial z \partial x^2 \partial y},$$

4) Si $\boldsymbol{f}$ tiene por componentes $f_1, \ldots, f_m$, entonces las componentes de

$$\frac{\partial^p \boldsymbol{f}}{\partial x_{j_1} \cdots \partial x_{j_p}}.$$

son

$$\frac{\partial^p f_1}{\partial x_{j_1} \cdots \partial x_{j_p}}, \frac{\partial^p f_2}{\partial x_{j_1} \cdots \partial x_{j_p}}, \ldots, \frac{\partial^p f_m}{\partial x_{j_1} \cdots \partial x_{j_p}}.$$

Definición 4.4.2 Sean $n, m, p \in \mathbb{N}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto, $\boldsymbol{a} \in A$ y $\boldsymbol{f} : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Diremos que $\boldsymbol{f}$ es de clase $\mathcal{C}^p$ en A, denotado por $\boldsymbol{f} \in \mathcal{C}^p A$ si existen todas las derivadas parciales de $\boldsymbol{f}$ desde orden 1 hasta p y todas son continuas en A. $\triangleleft$

Nota 4.4.3 Con las notaciones de la Definición 4.4.2, extenderemos la notación

1) $\boldsymbol{f} \in \mathcal{C}^0(A)$ significa que $\boldsymbol{f}$ es continua en A.

2) $\boldsymbol{f} \in \mathcal{C}^\infty(A)$ significa que existen todas las parciales de cualquier orden de $\boldsymbol{f}$ y todas son continuas en A.

◁

Proposición 4.4.4 Sean $n, m \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto, $\boldsymbol{a} \in A$ y $\boldsymbol{f} : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$ con componentes $f_1, \ldots, f_m$. Entonces

$$\boldsymbol{f} \in \mathcal{C}^p(A) \Longleftrightarrow f_j \in \mathcal{C}^p(A),\ \forall\, j \in \{1, 2, \ldots, m\}.$$

◁

Teorema 4.4.5 [Teorema de Schwarz]
Sean $n, m \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ con $p > 1$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto, $\boldsymbol{a} \in A$ y $\boldsymbol{f} : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$ con $\boldsymbol{f} \in \mathcal{C}^p(A)$. Entonces se puede intercambiar el orden de derivación en todas las derivadas de orden 2 hasta p. ◁

Si tuviéramos, por ejemplo que $\boldsymbol{f} \in \mathcal{C}^8(A)$, entonces

$$\frac{\partial^8 \boldsymbol{f}}{\partial x \partial y \partial y \partial y \partial z \partial x \partial x \partial y} = \frac{\partial^8 \boldsymbol{f}}{\partial x \partial x \partial x \partial y \partial y \partial y \partial y \partial z} = \frac{\partial^8 \boldsymbol{f}}{\partial x^3 \partial y^4 \partial z}.$$

Proposición 4.4.6 [Condición suficiente de diferenciabilidad]
Sean $n, m \in \mathbb{N}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto y $\boldsymbol{f} : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Se tiene

$$\boldsymbol{f} \in \mathcal{C}^1(A) \Longrightarrow \boldsymbol{f} \text{ es diferenciable en } A.$$

◁

Nota 4.4.7

1) El recíproco de la Proposición 4.4.6 no es cierto en general.

2) La mayor parte de las funciones que manejaremos serán al menos de clase $\mathcal{C}^1$

◁

Corolario 4.4.8 Sean $n, m \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto, $\boldsymbol{a} \in A$ y $\boldsymbol{f} : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$ con $\boldsymbol{f} \in \mathcal{C}^p(A)$. Entonces $\boldsymbol{f}$ es continua en A, o expresado de otra manera, $\boldsymbol{f} \in \mathcal{C}^0(A)$. ◁

Por tanto, si $\boldsymbol{f} \in \mathcal{C}^p(A)$, entonces $\boldsymbol{f} \in \mathcal{C}^q(A)$ para cada $q \leq p$.

4.4.2 Cálculo de derivadas

Sean $n, j, m \in \mathbb{N}$ con $j \leq n$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto, $\boldsymbol{a} \in A$ y

$$\boldsymbol{f} : \begin{array}{rcl} A & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & \boldsymbol{f}(x_1, \ldots, x_n) \end{array}.$$

Cuando se puedan utilizar las reglas de derivación en una variable para la expresión de $\boldsymbol{f}$, considerando dicha expresión como si fuera una función sólo de la variable x_j y tomando el resto como parámetros, la expresión resultante será $\dfrac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_j}$ en los puntos en los que esté bien definida.

Ejemplo 4.4.9 Consideramos

$$f(x, y, z) = \cos(2x + 3y)e^{xy^2z^3} + 4y^2 z.$$

Tendremos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= -2\operatorname{sen}(2x + 3y)e^{xy^2z^3} + y^2z^3\cos(2x + 3y)e^{xy^2z^3}, \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= -3\operatorname{sen}(2x + 3y)e^{xy^2z^3} + 2xyz^3\cos(2x + 3y)e^{xy^2z^3} + 8yz, \\
\frac{\partial f}{\partial z} &= 3xy^2z^2\cos(2x + 3y)e^{xy^2z^3} + 4y^2. \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \\
&= -6\cos(2x + 3y)e^{xy^2z^3} - 4xyz^3\sin(2x + 3y)e^{xy^2z^3} + \\
&+ 2yz^3\cos(2x + 3y)e^{xy^2z^3} - 3y^2z^3\operatorname{sen}(2x + 3y)e^{xy^2z^3} + \\
&+ 2xy^3z^6\cos(2x + 3y)e^{xy^2z^3} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \\
&= -6\cos(2x + 3y)e^{xy^2z^3} - 3y^2z^3\operatorname{sen}(2x + 3y)e^{xy^2z^3} + \\
&+ 2yz^3\cos(2x + 3y)e^{xy^2z^3} - 4xyz^3\sin(2x + 3y)e^{xy^2z^3} + \\
&+ 2xy^3z^6\cos(2x + 3y)e^{xy^2z^3} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) 6xy^2z\cos(2x + 3y)e^{xy^2z^3} + 9x^2y^4z^4\cos(2x + 3y)e^{xy^2z^3}
\end{aligned}$$

$\triangleleft$

Nota 4.4.10 Con las notaciones anteriores, si $\boldsymbol{f} \in \mathcal{C}^1(A)$, podemos definir la matriz de funciones

$$\mathrm{J}\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \tag{4.12}$$

Cuando se evalúa dicha matriz en cada punto $\boldsymbol{a} \in A$, se tiene exactamente la matriz jacobiana de $\boldsymbol{f}$ en $\boldsymbol{a} \in A$, con lo cual no hay ambigüedad con la notación $\mathrm{J}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$.

Podemos proceder de la misma manera para el gradiente en caso de que la función f sea escalar

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$$

◁

Ejemplo 4.4.11 Sea $\boldsymbol{f}(x, y) = \left(xy^2, y + \cos x, e^{x-y^3}\right)$. Tendremos que

$$\mathrm{J}\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} y^2 & 2xy \\ -\operatorname{sen} x & 1 \\ e^{x-y^3} & -3y^2 e^{x-y^3} \end{pmatrix}$$

y que

$$\mathrm{J}\boldsymbol{f}(0,1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ e^{-1} & -3e^{-1} \end{pmatrix}$$

◁

4.5 Cambio de variable

Teorema 4.5.1 [Regla de la cadena]
Sean $p, n, m \in \mathbb{N}$, $A \subseteq \mathbb{R}^p$ y $B \subseteq \mathbb{R}^n$ abiertos, $\boldsymbol{a} \in A$ $\boldsymbol{g} : A \longrightarrow B \subseteq \mathbb{R}^n$ diferenciable en $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{f} : B \longrightarrow \mathbb{R}^m$ diferenciable en $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{a})$. Entonces $\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g}$ es diferenciable en a y además

$$\mathrm{J}(\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g})(\boldsymbol{a}) = \mathrm{J}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{a}))\mathrm{J}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{a}).$$

Por tanto se tiene también que

$$\mathbf{d}(\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g})(\boldsymbol{a}) = \mathbf{d}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{a})) \circ \mathbf{d}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{a}).$$

◁

Nota 4.5.2 Adoptaremos las notaciones del Teorema 4.5.1. Supondremos además que $\boldsymbol{g} \in \mathcal{C}^1(A)$ y $\boldsymbol{f} \in \mathcal{C}^1(B)$. Denotemos por $\boldsymbol{y} = (y_1, \dots, y_p)$ a las variables de $\boldsymbol{g}$ y por $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n)$ las variables de $\boldsymbol{f}$ y tomemos $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g}$.

1) Tenemos que
$$\mathrm{J}\boldsymbol{h} = \mathrm{J}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}))\mathrm{J}\boldsymbol{g}.$$
Podemos considerar además que
$$\mathrm{J}\boldsymbol{h} = \mathrm{J}\boldsymbol{f}\mathrm{J}\boldsymbol{g},$$
si una vez efectuado el producto de matrices hacemos $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{y})$ en las expresiones resultantes. Este último será el criterio que seguiremos si no se especifica lo contrario.

2) Para cada $j = 1, \dots, m$, sean p_j la j-ésima proyección de $\mathbb{R}^m$, f_j la componente j-ésima de $\boldsymbol{f}$ y h_j la componente j-ésima de $\boldsymbol{h}$. Se tiene que
$$h_j = p_j \circ \boldsymbol{h} = p_j \circ (\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g}) = (p_j \circ \boldsymbol{f}) \circ \boldsymbol{g} = f_j \circ \boldsymbol{g},$$
lo que nos permite afirmar que la componente j-ésima de $\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g}$ se obtiene componiendo $\boldsymbol{g}$ con la componente j-ésima de $\boldsymbol{f}$. Por lo tanto, en lo que sigue vamos a considerar que $m = 1$, es decir que $\boldsymbol{f} \equiv f$ es una función escalar, por lo que $\boldsymbol{h} \equiv h$ también será escalar.

Debido a la relación aquí descrita y a que las derivadas parciales pueden ser calculadas por componentes, todas las fórmulas que obtendremos a continuación para $m = 1$, serán formalmente iguales para $m > 1$.

$\triangleleft$

Asumamos ahora todas las notaciones, convenios y consideraciones de la Nota 4.5.2. Además escribiremos $\boldsymbol{g} = (g_1, \dots, g_n)$ en términos de sus componentes. Desarrollando la igualdad
$$\mathrm{J}h = \mathrm{J}f\mathrm{J}\boldsymbol{g},$$
se tiene
$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial h}{\partial y_1} & \dfrac{\partial h}{\partial y_2} & \cdots & \dfrac{\partial h}{\partial y_p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial g_1}{\partial y_2} & \cdots & \dfrac{\partial g_1}{\partial y_p} \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial g_2}{\partial y_2} & \cdots & \dfrac{\partial g_2}{\partial y_p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial g_n}{\partial y_1} & \dfrac{\partial g_n}{\partial y_2} & \cdots & \dfrac{\partial g_n}{\partial y_p} \end{pmatrix}.$$

Haciendo el producto de matrices e igualando componente a componente, la anterior igualdad matricial es equivalente a

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{\partial h}{\partial y_1} = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}\dfrac{\partial g_1}{\partial y_1} + \dfrac{\partial f}{\partial x_2}\dfrac{\partial g_2}{\partial y_1} + \cdots + \dfrac{\partial f}{\partial x_n}\dfrac{\partial g_n}{\partial y_1} \\ \dfrac{\partial h}{\partial y_2} = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}\dfrac{\partial g_1}{\partial y_2} + \dfrac{\partial f}{\partial x_2}\dfrac{\partial g_2}{\partial y_2} + \cdots + \dfrac{\partial f}{\partial x_n}\dfrac{\partial g_n}{\partial y_2} \\ \cdots\cdots \\ \dfrac{\partial h}{\partial y_p} = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}\dfrac{\partial g_1}{\partial y_p} + \dfrac{\partial f}{\partial x_2}\dfrac{\partial g_2}{\partial y_p} + \cdots + \dfrac{\partial f}{\partial x_n}\dfrac{\partial g_n}{\partial y_p} \end{cases}}. \tag{4.13}$$

que son las fórmulas con las que normalmente se aplica la regla de la cadena. Podrían obtenerse fórmulas para las derivadas de orden superior a partir de éstas, pero en general son inmanejables, por lo que se prefiere en la práctica ir aplicando sucesivamente estas fórmulas de orden uno a cada caso concreto.

Un caso particular de gran importancia en el que se aplican estas fórmulas es el del *cambio de variable*. Se tiene entonces $n = p$ y se entiende que la expresión

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}), \tag{4.14}$$

denota el cambio de variables de $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ a $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ y la función $h(\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}))$ es la que resulta de hacer dicho cambio a $f(\boldsymbol{x})$. Cuando se manejan cambios de variable, es habitual denotar las componentes de $\boldsymbol{g}$ por $(x_1, \ldots, x_n)$ en vez de por $(g_1, \ldots, g_n)$. Con estas notaciones, y desarrollando la fórmula del cambio (4.14), tendríamos

$$\begin{cases} x_1 = x_1(y_1, \ldots, y_n) \\ x_2 = x_2(y_1, \ldots, y_n) \\ \cdots \\ x_n = x_n(y_1, \ldots, y_n) \end{cases} \tag{4.15}$$

Esto puede parecer confuso, pues cada símbolo x_j se utiliza para denotar dos cosas distintas. Sin embargo es muy útil, pues permite interpretar cada *antigua* variable x_j como algo que a su vez depende de las *nuevas* variables $(y_1, \ldots, y_n)$ y sobre todo, porque permite escribir las fórmulas de cambio de variable para las derivadas parciales que se siguen de (4.13) de una manera muy sencilla de recordar y utilizar

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{\partial h}{\partial y_1} = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}\dfrac{\partial x_1}{\partial y_1} + \dfrac{\partial f}{\partial x_2}\dfrac{\partial x_2}{\partial y_1} + \cdots + \dfrac{\partial f}{\partial x_n}\dfrac{\partial x_n}{\partial y_1} \\ \dfrac{\partial h}{\partial y_2} = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}\dfrac{\partial x_1}{\partial y_2} + \dfrac{\partial f}{\partial x_2}\dfrac{\partial x_2}{\partial y_2} + \cdots + \dfrac{\partial f}{\partial x_n}\dfrac{\partial x_n}{\partial y_2} \\ \dots\dots \\ \dfrac{\partial h}{\partial y_n} = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}\dfrac{\partial x_1}{\partial y_n} + \dfrac{\partial f}{\partial x_2}\dfrac{\partial x_2}{\partial y_n} + \cdots + \dfrac{\partial f}{\partial x_n}\dfrac{\partial x_n}{\partial y_n} \end{cases}}. \tag{4.16}$$

No existe ninguna ambigüedad en estas fórmulas. En ellas se sabe perfectamente cuándo cada x_j debe ser interpretada como una variable y cuándo como una función que depende de $\boldsymbol{y}$.

Finalmente, se suele realizar una simplificación más. Si f representa a la función en las variables antiguas, h representa a la misma función en las variables nuevas. Obviamente las expresiones de f y h no tienen por qué coincidir, pero de alguna manera representan al mismo objeto visto desde dos perspectivas diferentes. Por eso a menudo se identifica $h \equiv f$, y las fórmulas (4.16) se escriben entonces como

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial y_1} = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}\dfrac{\partial x_1}{\partial y_1} + \dfrac{\partial f}{\partial x_2}\dfrac{\partial x_2}{\partial y_1} + \cdots + \dfrac{\partial f}{\partial x_n}\dfrac{\partial x_n}{\partial y_1} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y_2} = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}\dfrac{\partial x_1}{\partial y_2} + \dfrac{\partial f}{\partial x_2}\dfrac{\partial x_2}{\partial y_2} + \cdots + \dfrac{\partial f}{\partial x_n}\dfrac{\partial x_n}{\partial y_2} \\ \dots\dots \\ \dfrac{\partial f}{\partial y_n} = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}\dfrac{\partial x_1}{\partial y_n} + \dfrac{\partial f}{\partial x_2}\dfrac{\partial x_2}{\partial y_n} + \cdots + \dfrac{\partial f}{\partial x_n}\dfrac{\partial x_n}{\partial y_n} \end{cases}}. \tag{4.17}$$

Tampoco hay ninguna duda en cuáles son las partes de la fórmula en las que f debe ser interpretada en unas variables y cuáles son aquéllas en las que debe ser interpretada como una función en las otras.

Las consideraciones que se hicieron para las derivadas de orden superior después de presentar las fórmulas 4.13, siguen siendo válidas aquí.

Otra ventaja de esta última formulación es que si el cambio de variable es inversible, es decir, si las variables $\boldsymbol{y}$ se pueden despejar en función de las variables $\boldsymbol{x}$,

$$\begin{cases} y_1 = y_1(x_1, \dots, x_n) \\ y_2 = y_2(x_1, \dots, x_n) \\ \cdots \\ y_n = y_n(x_1, \dots, x_n) \end{cases},$$

entonces las expresiones del cambio de variable para las derivadas parciales son completamente simétricas,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} = \dfrac{\partial f}{\partial y_1}\dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial f}{\partial y_2}\dfrac{\partial y_2}{\partial x_1} + \cdots + \dfrac{\partial f}{\partial y_n}\dfrac{\partial y_n}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2} = \dfrac{\partial f}{\partial y_1}\dfrac{\partial y_1}{\partial x_2} + \dfrac{\partial f}{\partial y_2}\dfrac{\partial y_2}{\partial x_2} + \cdots + \dfrac{\partial f}{\partial y_n}\dfrac{\partial y_n}{\partial x_2} \\ \cdots\cdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n} = \dfrac{\partial f}{\partial y_1}\dfrac{\partial y_1}{\partial x_n} + \dfrac{\partial f}{\partial y_2}\dfrac{\partial y_2}{\partial x_n} + \cdots + \dfrac{\partial f}{\partial y_n}\dfrac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{cases} .$$

Por supuesto, las fórmulas de cambio de variable siguen siendo válidas para funciones vectoriales.

Ejemplo 4.5.3 Realizar el cambio de variables polares centradas en $(0, 0)$

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

con $\rho \in (0, \infty)$ y $\theta \in [0, 2\pi)$, al sistema de ecuaciones en derivadas parciales

$$\begin{cases} y\dfrac{\partial f}{\partial x} - x\dfrac{\partial f}{\partial y} = 1 \\ x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = x^2 + y^2 \end{cases}$$

Las fórmulas de cambio de variable para las derivadas parciales son en este caso

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial \rho} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial \rho} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial \rho} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\cos\theta + \dfrac{\partial f}{\partial y}\operatorname{sen}\theta \\ \dfrac{\partial f}{\partial \theta} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial \theta} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial x}{\partial \theta} = -\dfrac{\partial f}{\partial x}\rho\operatorname{sen}\theta + \dfrac{\partial f}{\partial y}\rho\cos\theta \end{cases} ,$$

y despejando obtenemos

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial \rho}\cos\theta - \dfrac{\partial f}{\partial \theta}\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\rho} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial \rho}\operatorname{sen}\theta + \dfrac{\partial f}{\partial \theta}\dfrac{\cos\theta}{\rho} \end{cases} ,$$

y sustituyendo en las ecuaciones donde debemos hacer el cambio

$$\begin{cases} \rho\sin\theta\left(\dfrac{\partial f}{\partial\rho}\cos\theta-\dfrac{\partial f}{\partial\theta}\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\rho}\right)-\rho\cos\theta\left(\dfrac{\partial f}{\partial\rho}\operatorname{sen}\theta+\dfrac{\partial f}{\partial\theta}\dfrac{\cos\theta}{\rho}\right)=1\\ \rho\cos\theta\left(\dfrac{\partial f}{\partial\rho}\cos\theta-\dfrac{\partial f}{\partial\theta}\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\rho}\right)+\rho\sin\theta\left(\dfrac{\partial f}{\partial\rho}\operatorname{sen}\theta+\dfrac{\partial f}{\partial\theta}\dfrac{\cos\theta}{\rho}\right)=\rho^2 \end{cases}$$

y simplificando, se obtiene

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial\theta}=-1\\ \dfrac{\partial f}{\partial\rho}=\rho \end{cases}$$

◁

4.6 Extremos absolutos

Veremos como calcular extremos absolutos (ver 2.5) para ciertas funciones escalares de varias variables. Sea $n\in\mathbb{N}$

Definición 4.6.1 Sean $n\in\mathbb{R}^n$ y $A\subseteq\mathbb{R}^n$. Diremos que A admite un *descomposición admisible* si puede expresarse como

$$A=A_1\cup\cdots\cup A_s,$$

donde cada conjunto $A_j\neq\emptyset$ y se puede describir con desigualdades estrictas y/o igualdades. ◁

Algoritmo 4.6.2 En lo que sigue supondremos que $n\in\mathbb{N}$, $K\subseteq A\subseteq\mathbb{R}^n$ con A abierto y K compacto que admite una descomposición admisible y que $f:A\longrightarrow\mathbb{R}$ es una función de clase $\mathcal{C}^2$ en A. Para calcular los extremos absolutos de f en K, se puede seguir el siguiente procedimiento.

1) Realizamos una descomposición admisible para K,

$$K=K_1\cup\cdots\cup K_s.$$

2) Construir un subconjunto $P\subseteq\mathbb{R}^n$ de la siguiente forma. Para cada $j=1,2\dots,s$

2.1) Si en la definición de K_j sólo aparecen desigualdades estrictas, entonces añadir a P las soluciones de

$$\frac{\partial f}{\partial\left(x_1,\dots,x_n\right)}=\mathbf{0},$$

que cumplan las desigualdades que aparezcan en la definición de K_j

2.2) Si en la definición de K_j aparecen igualdades, despejar hasta convertirlas todas en igualdades a 0. Supongamos que quedan

$$\phi_1(\boldsymbol{x}) = 0, \ldots, \phi_r(\boldsymbol{x}) = 0.$$

Construir la función auxiliar

$$F(x_1, \ldots, x_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_r) = f(\boldsymbol{x}) + \alpha_1\phi_1(\boldsymbol{x}) + \cdots + \alpha_r\phi_r(\boldsymbol{x}),$$

Resolver el sistema de ecuaciones

$$\frac{\partial F}{\partial\,(x_1, \ldots, x_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_r)} = \mathbf{0},$$

y para cada solución, tomar sólo la parte que corresponde a las variables $(x_1, \ldots, x_n)$. Si esta parte cumple las desigualdades estrictas que pudieran aparecer en la definición de K_j, añadirla a P.

3) Sea
$$V = f(P) = \{f(\boldsymbol{a}) \,/\, \boldsymbol{a} \in P\}.$$

4) Obtener $m = \text{mín}\, V$ y $M = \text{máx}\, V$.

5) Los mínimos absolutos buscados son

$$\{\boldsymbol{a} \in P \,/\, f(\boldsymbol{a}) = m\}.$$

6) Los máximos absolutos buscados son

$$\{\boldsymbol{a} \in P \,/\, f(\boldsymbol{a}) = M\}.$$

◁

Nota 4.6.3

1) Si se añaden a P puntos adicionales de K, el algoritmo sigue proporcionando el resultado correcto. En particular si algún K_j se reduce a una cantidad finita de puntos, se añadirán sin más a P.

2) En los problemas que manejaremos, P será casi siempre un conjunto finito. En caso de no serlo, presentará propiedades que permitan completar el algoritmo.

◁

Ejemplo 4.6.4 Calcularemos los extremos absolutos de la función

$$f(x,y,z) = x + y + z,$$

en el conjunto compacto

$$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x^2 + y^2 - 2z^2 \leq 6,\ 0 \leq z \leq 2\}.$$

1) Obtengamos una descomposición admisible de K. Examinemos las condiciones que definen K:

$$x^2 + y^2 - 2z^2 \leq 6 \to \begin{cases} x^2 + y^2 - 2z^2 < 6 \\ x^2 + y^2 - 2z^2 = 6 \end{cases}$$

$$0 \leq z \to \begin{cases} z > 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$z \leq 2 \to \begin{cases} z < 2 \\ z = 2 \end{cases}$$

Se trata de tomar todas las posibles combinaciones de $<$ e $=$, tomando siempre exactamente una de cada uno de los tres grupos anteriores. Tendríamos así los siguientes conjuntos

1.1) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x^2 + y^2 - 2z^2 < 6,\ z > 0,\ z < 2\}$. Este conjunto no es vacío, así que será K_1 en nuestra descomposición

1.2) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x^2 + y^2 - 2z^2 < 6,\ z > 0,\ z = 2\}$, es un conjunto no vacío, pero la condición $z > 0$ es redundante y la podemos suprimir, por lo que $K_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x^2 + y^2 - 2z^2 < 6,\ z = 2\}$.

1.3) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x^2 + y^2 - 2z^2 < 6,\ z = 0,\ z < 2\}$, es no vacío y podemos suprimir la condición $z < 2$.
Así $K_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x^2 + y^2 - 2z^2 < 6,\ z = 0\}$.

1.4) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x^2 + y^2 - 2z^2 = 6,\ z > 0,\ z < 2\}$, es no vacío y le llamaremos K_4

1.5) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x^2 + y^2 - 2z^2 < 6,\ z = 0,\ z = 2\}$. Las condiciones $z = 0$ y $z = 2$ son contradictorias, por lo que este conjunto es vacío, así que no forma parte de nuestra descomposición.

1.6) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x^2 + y^2 - 2z^2 = 6,\ z > 0,\ z = 2\}$, se puede escribir como $K_5 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x^2 + y^2 - 2z^2 = 6,\ z = 2\}$

1.7) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x^2 + y^2 - 2z^2 = 6,\ z = 0,\ z < 2\}$. A partir de aquí, tomaríamos $K_6 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x^2 + y^2 - 2z^2 = 6,\ z = 0\}$

1.8) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x^2+y^2-2z^2 = 6,\ z=0,\ z=2\} = \emptyset$ por lo que lo desechamos.

2) Construcción del conjunto P. Procedamos con cada uno de los conjuntos $K_1, K_2, K_3, K_4, K_5, K_6$.

2.1) $K_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x^2+y^2-2z^2 < 6,\ z > 0,\ z < 2\}$. Para este conjunto debemos resolver el sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 1 = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 1 = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} = 1 = 0, \end{cases}$$

y tomar aquellas que verifiquen las desigualdades que definen K_1, pero obviamente el sistema no tiene soluciones, por lo que este caso no aporta nada al conjunto P.

2.2) $K_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x^2+y^2-2z^2 < 6,\ z=2\}$. Convertimos $z=2$ en $z-2=0$ y construimos la función auxiliar

$$F(x,y,z,\alpha) = f(x,y,z) + \alpha(z-2) = x+y+z+\alpha(z-2).$$

Tenemos que resolver el sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = 1 = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = 1 = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial z} = 1+\alpha = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial \alpha} = z-2 = 0, \end{cases}$$

y tendríamos que quedarnos con la parte en x, y, z de las soluciones que además verificasen $x^2+y^2-2z^2 < 6$, pero el sistema no tiene ninguna solución.

2.3) $K_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x^2+y^2-2z^2 < 6,\ z=0\}$. Construimos la función auxiliar

$$F(x,y,z,\alpha) = f(x,y,z) + \alpha z = x+y+z+\alpha z.$$

Tenemos que resolver el sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = 1 = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = 1 = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial z} = 1 + \alpha = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial \alpha} = z = 0, \end{cases}$$

que no tiene ninguna solución.

2.4) $K_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x^2 + y^2 - 2z^2 = 6,\ z > 0,\ z < 2\}$. Convertimos $x^2 + y^2 - 2z^2 = 6$ en $x^2 + y^2 - 2z^2 - 6 = 0$ y construimos la función auxiliar

$$F(x, y, z, \alpha) = x + y + z + \alpha(x^2 + y^2 - 2z^2 - 6).$$

Tenemos que resolver el sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = 1 + 2\alpha x = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = 1 + 2\alpha y = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial z} = 1 - 4\alpha z = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial \alpha} = x^2 + y^2 - 2z^2 - 6 = 0, \end{cases}$$

cuyas únicas soluciones son $(x, y, z, \alpha) = (2, 2, -1, -1/4)$ y $(x, y, z, \alpha) = (-2, -2, 1, 1/4)$. Por tanto las soluciones en (x, y, z) son $(2, 2, -1)$ y $(-2, -2, 1)$, de las cuales la única que verifica $z > 0$ y $z < 2$ es $(-2, -2, 1)$, punto que añadimos al conjunto P.

2.5) $K_5 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x^2 + y^2 - 2z^2 = 6,\ z = 2\}$.
Convertimos $x^2 + y^2 - 2z^2 = 6$ en $x^2 + y^2 - 2z^2 - 6 = 0$ y $z = 2$ en $z - 2 = 0$. Construimos la función auxiliar

$$F(x, y, z, \alpha, \beta) = x + y + z + \alpha(x^2 + y^2 - 2z^2 - 6) + \beta(z - 2),$$

y resolvemos el sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = 1 + 2\alpha x = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = 1 + 2\alpha y = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial z} = 1 - 4\alpha z + \beta = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial \alpha} = x^2 + y^2 - 2z^2 - 6 = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial \beta} = z - 2 = 0, \end{cases}$$

cuyas únicas soluciones en (x, y, z) son $\left(\sqrt{7}, \sqrt{7}, 2\right)$ y $\left(-\sqrt{7}, -\sqrt{7}, 2\right)$, que debemos añadir a P porque no tenemos desigualdades estrictas adicionales que se deban verificar.

2.6) $K_6 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x^2 + y^2 - 2z^2 = 6,\ z = 0\}$.
Convertimos $x^2 + y^2 - 2z^2 = 6$ en $x^2 + y^2 - 2z^2 - 6 = 0$. Construimos la función auxiliar

$$F(x, y, z, \alpha, \beta) = x + y + z + \alpha(x^2 + y^2 - 2z^2 - 6) + \beta z,$$

y resolvemos el sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = 1 + 2\alpha x = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = 1 + 2\alpha y = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial z} = 1 - 4\alpha z + \beta = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial \alpha} = x^2 + y^2 - 2z^2 - 6 = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial \beta} = z = 0, \end{cases}$$

cuyas únicas soluciones en (x, y, z) son $\left(\sqrt{3}, \sqrt{3}, 0\right)$ y $\left(-\sqrt{3}, -\sqrt{3}, 0\right)$, que debemos añadir a P porque no tenemos desigualdades estrictas adicionales que se deban verificar.

Así tenemos que el conjunto P es

$$\left\{(-2,-2,1)\,,\left(\sqrt{7},\sqrt{7},2\right),\left(-\sqrt{7},-\sqrt{7},2\right),\left(\sqrt{3},\sqrt{3},0\right),\left(-\sqrt{3},-\sqrt{3},0\right)\right\}$$

3) Calculemos V

$$\begin{aligned}
&f(-2,-2,1)=-3,\\
&f(\sqrt{7},\sqrt{7},2)=2+2\sqrt{7},\\
&f(-\sqrt{7},-\sqrt{7},2)=2-2\sqrt{7},\\
&f(\sqrt{3},\sqrt{3},0)=2\sqrt{3},\\
&f(-\sqrt{3},-\sqrt{3},0)=-2\sqrt{3},
\end{aligned}$$

de donde

$$V=\left\{-3,2+2\sqrt{7},2-2\sqrt{7},2\sqrt{3},-2\sqrt{3}\right\}.$$

4) Así $m=-2\sqrt{3}$ y $M=2+2\sqrt{7}$.

5) Sólo hay un mínimo absoluto, que es $\left(-\sqrt{3},-\sqrt{3},0\right)$.

6) Sólo hay un máximo absoluto, que es $\left(\sqrt{7},\sqrt{7},2\right)$.

◁

4.7 Teoría de Taylor

4.7.1 Diferenciales de orden superior

Definición 4.7.1 Sean $n,m,k\in\mathbb{N}$, $A\subseteq\mathbb{R}^n$ un abierto $\boldsymbol{a}\in A$ y

$$\begin{aligned}\boldsymbol{f}:A&\longrightarrow\mathbb{R}^m\\ \boldsymbol{x}&\longmapsto\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\end{aligned}\,,$$

de clase $\mathcal{C}^k$ en A. Llamaremos *diferencial* de orden k de $\boldsymbol{f}$ en $\boldsymbol{a}$ a la aplicación

$$\begin{aligned}\mathbf{d}^k\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}):\mathbb{R}^n&\longrightarrow\mathbb{R}^m\\ \boldsymbol{h}&\longmapsto\sum_{i_1}^{n}\sum_{i_2}^{n}\cdots\sum_{i_k}^{n}\frac{\partial^k\boldsymbol{f}}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_k}}(\boldsymbol{a})h_{i_1}\cdots h_{i_k}\end{aligned}$$

◁

Proposición 4.7.2 Sean $n, m, k \in \mathbb{N}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto $\boldsymbol{a} \in A$ y $\boldsymbol{f} \in \mathcal{C}^k(A)$ con componentes $f_1, \ldots, f_m$. Las componentes de $\mathbf{d}^k \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$ son

$$\mathbf{d}^k f_1(\boldsymbol{a}), \mathbf{d}^k f_2(\boldsymbol{a}), \ldots, \mathbf{d}^k f_m(\boldsymbol{a})$$

◁

Nota 4.7.3

1) Por convenio $\mathbf{d}^0 \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{h}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$, $\forall\, \boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^n$

2) $\mathbf{d}^1 \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) = \mathbf{d}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$.

3) Debido a la Proposición 4.7.2, en lo que sigue sólo trataremos el caso escalar.

4) La fórmula de la diferencial de orden k no es útil para calcularla en la práctica, así que desarrollaremos un algoritmo más sencillo para su obtención.

◁

Algoritmo 4.7.4 Supongamos que estamos en las condiciones de la Definición 4.7.1 con $m = 1$. Para obtener $\mathbf{d}^k f(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{h})$, realizaremos las siguientes operaciones:

1) Construir la función auxiliar $g(t) = f(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{h})$.

2) Se tiene que $\mathbf{d}^k f(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{h}) = g^{(k)}(0)$.

3) Habitualmente se agrupa en potencias de

$$h_1, \ldots, h_n,$$

aunque esto no sea estrictamente necesario.

◁

Ejemplo 4.7.5 Para la función $f(x, y) = x^3 + y^2 + xy^2$, calcular $\mathbf{d}^1 f(1, 2)(h, k)$, $\mathbf{d}^2 f(1, 2)(h, k)$ y $\mathbf{d}^3 f(1, 2)(h, k)$.
Primero construimos

$$g(t) = f((1, 2) + t\,(h, k)) = f(1 + th, 2 + tk) = (1 + th)^3 + (2 + tk)^2 + (1 + th)(2 + tk)^2$$

1) Aunque $\mathbf{d}^1 f(1, 2)(h, k)$ es la diferencial y es muy sencillo calcularla directamente, utilizaremos el algoritmo para ver que funciona correctamente en este caso.

$$\begin{aligned} g'(t) &= 3h(1 + th)^2 + 2k(2 + tk) + h(2 + tk)^2 + 2k(1 + th)(2 + tk) \\ &= h\left(3(1 + th)^2 + (2 + tk)^2\right) + 2k(2 + tk)(2 + th), \end{aligned} \tag{4.18}$$

por lo que

$$\mathbf{d}^1 f(1, 2)(h, k) = g'(0) = 7h + 8k.$$

2) A partir de la expresión (4.18), calculamos

$$\begin{aligned} g''(t) &= h\left(6h(1+th)+2k(2+tk)\right)+2k\left(k(2+th)+h(2+tk)\right) \\ &= 6h^2(1+th)+4hk(2+tk)+2k^2(2+th) \end{aligned} \tag{4.19}$$

de donde

$$\mathbf{d}^2 f(1,2)(h,k) = g''(0) = 6h^2+8hk+4k^2$$

3) A partir de la expresión (4.19), calculamos

$$g'''(t) = 6h^3+4hk^2+2hk^2 = 6h^3+6hk^2$$

de donde

$$\mathbf{d}^3 f(1,2)(h,k) = g'''(0) = 6h^3+6hk^2$$

◁

4.7.2 El polinomio de Taylor

Definición 4.7.6 Sean $n, k \in \mathbb{N}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto $\boldsymbol{a} \in A$ y

$$f : A \longrightarrow \mathbb{R}\ ,$$

de clase $\mathcal{C}^{k+1}$ en A. Llamaremos *polinomio de Taylor* de orden k de f en $\boldsymbol{a}$ a la expresión

$$P_{k,\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{a}) + \frac{\mathbf{d}f(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})}{1!} + \frac{\mathbf{d}^2 f(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})}{2!} + \cdots + \frac{\mathbf{d}^k f(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})}{k!}.$$

◁

Teorema 4.7.7 [Teorema de Taylor]
Sean $n, k \in \mathbb{N}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto $\boldsymbol{a} \in A$ y

$$f : A \longrightarrow \mathbb{R}\ ,$$

de clase $\mathcal{C}^{k+1}$ en A. Sea $\boldsymbol{x} \in A$ tal que

$$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}] = \{\alpha\boldsymbol{a} + (1-\alpha)\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \,/\, \alpha \in [0,1]\} \subseteq A.$$

Entonces existe $\boldsymbol{\theta} \in [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}]$ tal que

$$f(\boldsymbol{x}) = P_{k,\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x}) + \frac{\mathbf{d}^{k+1} f(\boldsymbol{\theta})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})}{(k+1)!}.$$

Llamaremos a la expresión

$$R_{k,\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x}) = \frac{\mathbf{d}^{k+1} f(\boldsymbol{\theta})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})}{(k+1)!},$$

el *resto de Taylor* de orden k de f en $\boldsymbol{a}$. ◁

Propiedades 4.7.8 Con las notaciones de la Definición 4.7.6 y del Teorema 4.7.7:

1) $P_{k,\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x})$ es un polinomio de grado menor o igual que k.

2) Hay que dejar $P_{k,\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x})$ agrupado en potencias de

$$x_1 - a_1,\ x_2 - a_2,\ \ldots,\ x_n - a_n.$$

3) Si f es un polinomio de grado r, entonces su polinomio de Taylor de orden $k \geq r$ en $\boldsymbol{a}$ coincide con el propio polinomio f pero agrupado en potencias de

$$x_1 - a_1,\ x_2 - a_2,\ \ldots,\ x_n - a_n.$$

4) $P_{k,\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x})$ es una aproximación a $f(\boldsymbol{x})$ para cada $\boldsymbol{x}$ *cerca* de $\boldsymbol{a}$:

$$f(\boldsymbol{x}) \approx P_{k,\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x}).$$

5) Se tiene que

$$f(\boldsymbol{x}) - P_{k,\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x}) = R_{k,\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x}).$$

Por lo tanto el resto de Taylor *mide* la bondad de la aproximación, pero es desconocido, pues $\boldsymbol{\theta}$ no se conoce exactamente.

◁

Ejemplo 4.7.9 Sea $f(x,y) = e^x \operatorname{sen} y$. Calcular el polinomio de Taylor y el resto de orden 2 de f en $(0,0)$.
Tenemos que

$$f(x,y) = f(0,0) + \mathbf{d}f(0,0) + \frac{\mathbf{d}^2 f(0,0)(x,y)}{2!} + \frac{\mathbf{d}^3 f(\theta,\eta)(x,y)}{3!}. \tag{4.20}$$

Una posible estrategia podría ser

$$\mathbf{d}^i f(a,b)(h,k),\ i = 1,2,3,$$

y luego sustituir en los puntos correspondientes para aplicar la fórmula (4.20). Sea

$$g(t) = f((a,b) + t\,(h,k)) = e^{a+th} \operatorname{sen}(b+tk).$$

Derivando

$$\begin{aligned}
g'(t) &= e^{a+th}\left(h \operatorname{sen}(b+tk) + k\cos(b+tk)\right),\\
g''(t) &= e^{a+th}\left((h^2 - k^2)\operatorname{sen}(b+tk) + 2hk\cos(b+tk)\right),\\
g'''(t) &= e^{a+th}\left((h^3 - 3hk^2)\operatorname{sen}(b+tk) + (3h^2k - k^3)\cos(b+tk)\right),
\end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned}
\mathbf{d}^1 f(a,b)(h,k) &= g'(0) = e^a \left(h \operatorname{sen} b + k \cos b\right), \\
\mathbf{d}^2 f(a,b)(h,k) &= g''(0) = e^a \left((h^2 - k^2) \operatorname{sen} b + 2hk \cos b\right), \\
\mathbf{d}^3 f(a,b)(h,k) &= g'''(0) = e^a \left((h^3 - 3hk^2) \operatorname{sen} b + (3h^2k - k^3) \cos b\right),
\end{aligned}$$

por lo que

$$\begin{aligned}
\mathbf{d}^1 f(0,0)(x,y) &= y, \\
\mathbf{d}^2 f(0,0)(x,y) &= 2xy, \\
\mathbf{d}^3 f(\theta,\eta)(x,y) &= e^\theta \left((x^3 - 3xy^2) \operatorname{sen} \eta + (3x^2y - y^3) \cos \eta\right) \\
&= x^3 e^\theta \operatorname{sen} \eta + 3x^2 y e^\theta \cos \eta - 3xy^2 e^\theta \operatorname{sen} \eta - y^3 e^\theta \cos \eta,
\end{aligned}$$

y la fórmula de Taylor con resto queda

$$f(x) = y + xy + \frac{e^\theta \operatorname{sen} \eta}{6} x^3 + \frac{e^\theta \cos \eta}{2} x^2 y - \frac{e^\theta \operatorname{sen} \eta}{2} xy^2 - \frac{e^\theta \cos \eta}{6} y^3.$$

◁

4.7.2.1 Cálculo del polinomio de Taylor

Si sólo tuviéramos que calcular el polinomio de Taylor, sin el resto, podríamos seguir una estrategia similar a la del Ejemplo 4.7.9.

Ejemplo 4.7.10 Calculemos el polinomio de Taylor de orden 3 en $(1,2)$ de la función $f(x,y) = x^3 + y^2 + xy^2$. Haríamos los mismos cálculos del Ejemplo 4.7.5, de donde resultaba

$$\begin{aligned}
\mathbf{d}^1 f(1,2)(h,k) &= 7h + 8k, \\
\mathbf{d}^2 f(1,2)(h,k) &= 6h^2 + 8hk + 4k^2, \\
\mathbf{d}^3 f(1,2)(h,k) &= 6h^3 + 6hk^2,
\end{aligned}$$

por lo que

$$\begin{aligned}
\mathbf{d}^1 f(1,2)(x-1,y-2) &= 7(x-1) + 8(y-2), \\
\mathbf{d}^2 f(1,2)(x-1,y-2) &= 6(x-1)^2 + 8(x-1)(y-2) + 4(y-2)^2, \\
\mathbf{d}^3 f(1,2)(x-1,y-2) &= 6(x-1)^3 + 6(x-1)(y-2)^2,
\end{aligned}$$

fórmulas que se pueden sustituir directamente en la del polinomio de Taylor, obteniéndose que dicho polinomio será

$$9+7(x-1)+8(y-2)+3(x-1)^2+4(x-1)(y-2)+2(y-2)^2+(x-1)^3+(x-1)(y-2)^2.$$

◁

Sin embargo, para estos casos en los que sólo haya que calcular el polinomio de Taylor, es conveniente formular un algoritmo mejorado, en una de cuyas fases se podrán utilizar todas las técnicas que teníamos para el cálculo de polinomios de Taylor en una variable.

Algoritmo 4.7.11 Supongamos que estamos en las condiciones de la Definición 4.7.6. Para obtener $P_{k,\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x})$, realizaremos las siguientes operaciones:

1) Construir la función auxiliar $g(t) = f(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{h})$.

2) Construir el polinomio de Taylor de orden k de g en 0, al que denotaremos por $Q(t)$. En esta fase se pueden utilizar todas las técnicas para el cálculo de polinomios de Taylor en una variable, ya que t es la única variable. Los símbolos h_i, $i = 1, \ldots, n$ en esta fase se consideran parámetros.

3) Sea $P(\boldsymbol{h}) = Q(1)$. Agrupar $P(\boldsymbol{h})$ en potencias de $h_1, \ldots, h_n$.

4) El polinomio $P(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})$ es el polinomio de Taylor buscado.

◁

Ejemplo 4.7.12

$$f(x, y) = \frac{1}{2x - y}.$$

Vamos a calcular el polinomio de Taylor de orden 4 de f en $(1, 1)$.

1) Construimos la función auxiliar

$$g(t) = f((1,1) + t\,(h,k)) = \frac{1}{2 + 2th - 1 - tk} = \frac{1}{1 - (k - 2h)t}.$$

2) Para construir el polinomio de Taylor de $g(t)$ en $t = 0$, tengamos en cuenta que el polinomio de Taylor de orden 4 de

$$\frac{1}{1 - s},$$

es

$$1 + s + s^2 + s^3 + s^4,$$

por lo que, aplicando propiedades de los polinomios de Taylor en una variable, tendremos que el polinomio de Taylor de orden 4 de g en 0 es

$$Q(t) = 1 + (k - 2h)t + (k - 2h)^2t^2 + (k - 2h)^3t^3 + (k - 2h)^4t^4.$$

3) Sea

$$\begin{aligned}P(h,k) = Q(1) &= 1 + (k-2h) + (k-2h)^2 + (k-2h)^3 + (k-2h)^4 \\ &= 1 - 2h + k + 4h^2 - 4hk + k^2 - 8h^3 + 12h^2k - 6hk^2 + k^3 \\ &+ 16h^4 - 32h^3k + 24h^2k^2 - 8hk^3 + k^4\end{aligned}$$

4) El polinomio buscado es

$$\begin{aligned}P(x-1, y-1) = 1 &- 2(x-1) + (y-1) + 4(x-1)^2 - 4(x-1)(y-1) \\ &+ (y-1)^2 - 8(x-1)^3 + 12(x-1)^2(y-1) \\ &- 6(x-1)(y-1)^2 + (y-1)^3 + 16(x-1)^4 \\ &- 32(x-1)^3(y-1) + 24(x-1)^2(y-1)^2 \\ &- 8(x-1)(y-1)^3 + (y-1)^4\end{aligned}$$

◁

4.8 Ejercicios

Ejercicio 4.1 Calcular las derivadas parciales de

$$f(x,y,z) = x^2 \operatorname{sen}(y+2z),$$

en $(3, \pi, 0)$.

a) Utilizando la definición.

b) Utilizando las reglas automáticas de derivación y evaluando.

Ejercicio 4.2 Calcular la expresión de todas las derivadas parciales de

$$f(x,y,z) = e^{x+y} \operatorname{sen}(xy) + zx^2y,$$

hasta orden 3, si es posible y especificar el dominio de cada función obtenida.

Ejercicio 4.3 En los siguientes casos, calcular $\mathrm{J}\boldsymbol{f}$ y decir dónde es válida su expresión. Calcular $\mathrm{J}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$. En los casos en los que tenga sentido, calcular el jacobiano de $\boldsymbol{f}$ en $\boldsymbol{a}$. También cuando tenga sentido, calcular ∇f y $\nabla f(\boldsymbol{a})$.

a) $\boldsymbol{f}(x,y,z) = \big(x^2 \operatorname{sen}(y+2z), ye^x\big)$, $\boldsymbol{a} = (3, \pi, 0)$.

b) $\boldsymbol{f}(x,y) = \big(x^2 \operatorname{sen} y, ye^x\big)$, $\boldsymbol{a} = (3, \pi)$.

c) $f(x,y) = y^2 + e^y \operatorname{arc\,tg} x$, $\boldsymbol{a} = (1,0)$.

d) $f(x,y,z) = e^{x+y} \operatorname{sen}(xy) + zx^2y$, $\boldsymbol{a} = (\pi/2, 1/2, 1)$.

e) $f(x,y) = \log(x+y)$, $\boldsymbol{a} = (1,1)$.

f) $f(x,y) = x^3 + y^2 + xy^2$, $\boldsymbol{a} = (1,2)$.

g) $\boldsymbol{f}(x,y,z) = (e^x, \operatorname{sen}(x+y), e^z)$, $\boldsymbol{a} = (0,0,0)$.

h) $f(x,y) = y + x^2 + \operatorname{tg}(xy) + \displaystyle\int_0^{\operatorname{sen}(x^2+y^2)} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$, $\boldsymbol{a} = (0,0)$.

i) $\boldsymbol{f}(x,y,z) = \left(x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y, (x+z^2)e^{x(y^2+z^2+1)}\right)$, $\boldsymbol{a} = (0,1,1)$.

j) $\boldsymbol{f}(x,y,z) = \big(x\log x + y\log y + z\log z, \log x + \log y + 3\log z, x^2+y^2+z^2\big)$, $\boldsymbol{a} = \big(e, 1/e, e^2\big)$.

Ejercicio 4.4 Para cada función $\boldsymbol{f}$ estudiar su continuidad, diferenciabilidad y la existencia y continuidad de sus derivadas parciales en los lugares indicados.

a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$, en $(0,0)$.

b) $f(x,y,z) = ye^{xy} + z$, en $\mathbb{R}^3$.

c) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y^4}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$, en $(0,0)$.

d) $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\operatorname{sen}\dfrac{1}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$, en $(0,0)$.

e) $f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$, en $(0,0)$. En este caso, calcular además, si es posible

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0),\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0).$$

f) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x}{x^2+y^2}\operatorname{sen} x, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$,
en $(0,0)$.

g) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\,|y|}{||(x,y)||}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$,
en $(0,0)$.

h) $\boldsymbol{f}(x,y) = \begin{cases} \left(e^{x+y}, \operatorname{sen}(x-y), x^2\operatorname{sen}(1/x)\right), & \text{si } x \neq 0 \\ (e^y, -\operatorname{sen} y, 0), & \text{si } x = 0 \end{cases}$,
en $(0,0)$.

i) $\boldsymbol{f}(x,y,z) = \begin{cases} (\cos(yz), xyz, 1/z), & \text{si } z \neq 0 \\ (1,0,0), & \text{si } z = 0 \end{cases}$,
en $(0,0,0)$.

j) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(xy)^{4/3}}{(x^2+y^2)^\alpha}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$,
en $\mathbb{R}^2$, donde $\alpha \in \mathbb{R}$.

k) $f(x,y) = \begin{cases} (x+y)^n \operatorname{sen} \dfrac{1}{||(x,y)||}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$,
en $(0,0)$, donde $n \in \mathbb{N}$.

l) $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2) \operatorname{sen} \dfrac{1}{||(x,y)||}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$,
en $(0,0)$.

m) $f(x,y) = \begin{cases} xy \operatorname{sen} \dfrac{1}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$,
en $(0,0)$.

n) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2\,|y|}{||(x,y)||}, & \text{si } y \geq -x,\ (x,y) \neq (0,0) \\ \dfrac{xy}{2} \operatorname{sen} \dfrac{1}{||(x,y)||}, & \text{si } y < -x \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$, en $(0,0)$.

o) $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$ en $(0,0)$.

p) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{sen}^2(x+y)}{x+y}, & \text{si } x+y\neq 0\\ 0, & \text{si } x+y=0\end{cases},$

en $(0,0)$.

q) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases},$

en $(0,0)$.

Ejercicio 4.5 Sean $n,m\in\mathbb{N}$, A un abierto de $\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{a}\in\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{f}:A\longrightarrow\mathbb{R}^m$ una función y $\boldsymbol{u}\in\mathbb{R}^n$ con $\boldsymbol{u}\neq\mathbf{0}$. Diremos que $\boldsymbol{f}$ es *derivable* en $\boldsymbol{a}$ respecto del vector $\boldsymbol{u}$ si existe y es finito el siguiente límite

$$\lim_{h\to 0}\frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}+h\boldsymbol{u})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})}{h}.$$

A su valor le llamaremos *derivada* de $\boldsymbol{f}$ en $\boldsymbol{a}$ respecto de $\boldsymbol{u}$ y la denotaremos por alguno de los símbolos siguientes

$$\frac{\partial\boldsymbol{f}}{\partial\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{a}),\ \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{a}).$$

Si además $||\boldsymbol{u}||=1$, entonces llamaremos a lo anterior *derivada direccional* de $\boldsymbol{f}$ en $\boldsymbol{a}$ respecto de $\boldsymbol{u}$.

a) Probar que si $\boldsymbol{f}$ es diferenciable en $\boldsymbol{a}$, entonces

$$\frac{\partial\boldsymbol{f}}{\partial\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{a})=\mathrm{J}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})\boldsymbol{u}.$$

b) Sean

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2\operatorname{sen}y+y^2\operatorname{sen}x}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$\boldsymbol{a}=(0,0)$, $\boldsymbol{u}=(1,2)$. Calcular $\dfrac{\partial f}{\partial\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{a})$.

c) Para $\boldsymbol{f}(x,y,z)=\left(x^2\operatorname{sen}(y+2z),ye^x\right)$, calcular la derivada de $\boldsymbol{f}$ respecto del vector $(1,2,-1)$ en $(3,\pi,0)$.

Ejercicio 4.6 Escribir, si es posible, la ecuación de la recta tangente a la figuras siguientes en los puntos indicados.

a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 2x + 3y = 0\}$, en $(3, -2)$.

b) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 2x^2 + 3y^2 = 1\}$, en $\left(1/\sqrt{2}, 0\right)$ y en $\left(1/3, \sqrt{7}/(3\sqrt{3})\right)$.

c) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 2x^2 - 3y^2 = 1\}$, en $\left(1/\sqrt{2}, 0\right)$ y en $\left(1, 1/\sqrt{3}\right)$.

d) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 2x^2 - 3y^2 = 0\}$, en $\left(\sqrt{3}, \sqrt{2}\right)$ y en $(0, 0)$.

e) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y - 2x^2 = 0\}$, en $(0, 0)$ y en $(1, 2)$.

f) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y^2 + 3x = 0\}$, en $(0, 0)$ y en $(-3, 3)$.

g) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, (x+1)^2 + (y-1)^2 = 9\}$, en $(2, 1)$, en $\left(0, 1 + \sqrt{8}\right)$ y en $(-1, 4)$.

h) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2 + y^2 - 4(x+y) = -4\}$, en $\left(2 - \sqrt{3}, 1\right)$ y en $(0, 2)$.

i) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 4x^2 + y^2 - 8x - 4y = -4\}$, en $(0, 2)$ y en $(1, 0)$.

j) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x + 2 = 4y^2\}$, en $(-2, 0)$ y en $(2, -1)$.

Ejercicio 4.7 Escribir, si es posible, la ecuación del plano tangente a la figuras siguientes en los puntos indicados.

a) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, 2x + y - z = 1\}$, en $(1, -1, 0)$.

b) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, z = x^2 + 2y^2\}$, en $(1, 2, 9)$ y en $(0, 0, 0)$.

c) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x^2 + y^2 + z^2 = 16\}$, en $(0, 4, 0)$ y en $\left(2, 2, 2\sqrt{2}\right)$.

d) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, (x-1)^2 + 2(y-1)^2 + 4(z-2)^2 = 16\}$, en $\left(3, 1 + \sqrt{6}, 2\right)$ y en $(1, 1, 4)$.

e) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$, en $\left(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0\right)$ y en $\left(\sqrt{3}, \sqrt{2}, 2\right)$.

f) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x^2 + y^2 = 16\}$, en $\left(3, \sqrt{7}, 0\right)$ y en $\left(3, \sqrt{7}, 3\right)$.

g) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$, en $\left(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 1\right)$ y en $(0, 0, 0)$.

h) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x^2 - y^2 - z = 0\}$, en $(1,1,0)$, en $(2,1,3)$ y en $(0,0,0)$.

i) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, z^2 - x^2 - y^2 = 1\}$, en $(1,0,0)$, en $(-1,0,0)$ y en $(2,2,3)$.

Ejercicio 4.8 Sean

$$\boldsymbol{f}(x,y,z) = \left(\operatorname{sen}(xy+z), \left(1+x^2\right)^{yz}\right),$$

y

$$\boldsymbol{g}(u,v) = (u + e^v, v + e^u)\,.$$

a) Probar que $\boldsymbol{f}$ es diferenciable en $(1,-1,1)$ y calcular $\mathrm{J}\boldsymbol{f}(1,-1,1)$.

b) Probar que $\boldsymbol{g}$ es diferenciable en $(0,1/2)$ y calcular $\mathrm{J}\boldsymbol{g}(0,1/2)$.

c) Calcular $\mathrm{J}(\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f})(1,-1,1)$.

Ejercicio 4.9 Sea $g(x,y)$ la función obtenida al aplicar el cambio de variable

$$(u,v) = \left(x+y, xy^2\right),$$

a $f(u,v)$. Calcular $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(1,1)$ sabiendo que

$$\frac{\partial f}{\partial v}(2,1) = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(2,1) = \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(2,1) = \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(2,1) = 1.$$

Se supone que f es de clase $\mathcal{C}^2$.

Ejercicio 4.10 Transformar

$$x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = z^2,$$

haciendo el cambio de variables independientes

$$u = x,\ v = \frac{1}{y} - \frac{1}{x}$$

y el cambio de variable dependiente

$$w = \frac{1}{z} - \frac{1}{x}.$$

Ejercicio 4.11 Transformar

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

con $a \neq 0$ haciendo el cambio de variables independientes

$$\alpha = x - at,\ \beta = x + at.$$

Ejercicio 4.12 Transformar

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

haciendo el cambio de variables independientes

$$x = e^u,\ y = e^v,$$

con $x > 0$, $y > 0$.

Ejercicio 4.13 Transformar

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0,$$

haciendo el cambio de variables independientes

$$u = \frac{x}{y},\ v = xy.$$

Ejercicio 4.14 El beneficio anual de una empresa es

$$B(x, y) = 6 - 6x - y^2,$$

con $x, y \in \mathbb{R}$ parámetros económicos que verifican $x^2 + y^2 = 1$. Determinar los valores de x, y para que el beneficio sea máximo.

Ejercicio 4.15 Un alambre de longitud L se corta en dos trozos de longitudes a y b. Con un trozo se hace una cuadrado y con el otro una circunferencia. ¿Cómo ha de cortarse el alambre para que la suma de las áreas de las dos figuras sea máxima? ¿Y para que sea mínima?

Ejercicio 4.16 La cilindrada de un motor de explosión es $n\pi x^2 y/4$, siendo n el número de cilindros, x el diámetro e y la carrera. Se quiere desarrollar una nueva familia de motores de 6 cilindros y 2430 cm^3, cuyo par motor máximo viene dado por

$$23 + \cos\left(\frac{\pi y x^2 (x-1)}{1620}\right).$$

Por razones constructivas, los cilindros deberán tener un diámetro mayor o igual que 2π y una carrera mayor o igual que $180\pi^{-3}$. Determinar el valor del diámetro para que el motor proporcione un par máximo lo más elevado posible.

Ejercicio 4.17 Hallar la longitud de los lados del triángulo isósceles de perímetro 1 que tiene área máxima.

Ejercicio 4.18 Calcular los extremos absolutos de $f(x, y, z) = x^2+y^2+z^2-2z-1$ en el conjunto

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, 4x^2 + y^2 \leq 4,\ 0 \leq z \leq 2\}$$

Ejercicio 4.19 Calcular los extremos absolutos de $f(x, y) = x(y + 1)$ en el conjunto

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2 + y^2 \leq 1\}$$

Ejercicio 4.20 Calcular los extremos absolutos de $f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + z^2 - xy$ en el conjunto

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, 4x^2 + 2y^2 + z^2 \leq 8\}$$

Ejercicio 4.21 Calcular los extremos absolutos de

$$f(x, y) = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

en el conjunto

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, (x - 5)^2 + y^2 = 1\}$$

Ejercicio 4.22 Una placa cuya forma viene dada por los puntos (x, y) tales que $x^2 + y^2 \leq 1$ presenta en cada punto una distribución de temperaturas dada por $t(x, y) = x^2 + 2y^2 - x$. Ver cuáles son lo puntos más calientes o fríos de la placa y obtener la temperatura en cada uno de ellos.

Ejercicio 4.23 Se descubre un planeta esférico de radio 6. La fuerza de su campo magnético es $M(x, y, z) = 6x - y^2 + xz + 60$ en un sistema coordenado fijo centrado en el centro del planeta. Calcular el lugar de la superficie del planeta donde situar un radiotelescopio para que sufra la menor interferencia magnética posible.

Ejercicio 4.24 Una sala tiene forma de media esfera de radio 4 y su distribución de temperaturas en °C es

$$T(x, y, z) = \frac{1}{8}(x^2 + 2y^2 + z^2 - xz + A),$$

donde $A > 0$ es un parámetro del sistema de calefacción. Calcular el valor de A para que la temperatura en cualquier punto de la sala no sea inferior a 18 °C ni superior a 22 °C. El sistema de coordenadas tiene su centro en el centro del suelo de la sala.

Ejercicio 4.25 Calcular las distancias máxima y mínima de la elipse

$$5x^2 + 6xy + 5y^2 = 8,$$

al punto $(0,0)$.

Ejercicio 4.26 Se dice que en una ocasión durante la Primera Edad, encontrándose en Doriath, Beren, hijo de Barahir, decidió visitar al rey Thingol para intentar aclarar lo suyo con Lúthien. Thingol vivía en Menegroth a orillas del río Esgalduin, en el corazón del bosque de Doriath. Accedíase a Menegroth a través de una senda rectilínea que atravesaba Doriath, la cual distaba 20 km del lugar en el que se encontraba Beren. Si Beren se dirigiese directamente hacia la senda, por el camino más corto, al alcanzarla todavía se encontraría a 50 km de Menegroth. La velocidad que Beren podía alcanzar en el interior del bosque era de 9 km/h, mientras que por la senda podría desplazarse a 15 km/h. Por lo tanto ¿qué trayectoria debería seguir Beren para lograr entrevistarse con Thingol en el menor tiempo posible?

Ejercicio 4.27 El hangar de carga número 2 de la nave interplanetaria Coriolanus era un cubo de 12 metros de lado. Antes de la catástrofe, Momssen, comandante de la Coriolanus, decidió construir un recinto metálico de 2 m^3 sin tapa, con forma de prisma triangular y ajustado a uno de los rincones del hangar, con el fin de almacenar parte del cemento repara-fugas del reactor principal. Teniendo en cuenta que fue construido empleando la menor superficie posible de metal, ¿cuáles eran sus dimensiones?

Ejercicio 4.28 Probar que si $-4 \le x \le 0$ y $-3 \le y \le 1$, entonces

$$-11 \le x^2 + 2xy - y^2 + 4x \le 15.$$

Ejercicio 4.29 Sea $s > 0$ Expresar s como la suma de tres números $a, b, c > 0$ de forma que abc sea máximo.

Ejercicio 4.30 Calcular los puntos de la intersección de esfera de centro $(0,0,0)$ y radio 1 con el plano $x + y + z = 1$ cuya distancia a $(0,3,3)$ sea máxima y mínima.

Ejercicio 4.31 Calcular el polinomio de Taylor de orden 3 en $(1,1)$ de

$$f(x,y) = \log(x+y)$$

Ejercicio 4.32 Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$, con $c \neq 0$. Calcular el polinomio de Taylor de orden 1 en $(0,0,1)$ de

$$f(x,y,z) = ax - ye^{b-z} + \frac{\operatorname{sen}(x+y)}{c} + (a-b)z.$$

Para $a = 3$, $b = 1$ y $c = 2$, aproximar f en el punto $(-0{,}02, 0{,}03, 0{,}98)$ con el polinomio obtenido.

Ejercicio 4.33 Sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Calcular el polinomio de Taylor de orden 4 en $(0,0,0)$ de
$$f(x,y,z) = e^{\alpha(x+y+z)}.$$

Capítulo 5

Integrales múltiples

5.1 La integral doble

Trabajaremos con

$$f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \ ,$$

con D compacto y f continua en D. Trataremos de dar sentido a

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

5.1.1 Regiones elementales

Definición 5.1.1 Diremos que $D \subseteq \mathbb{R}^2$ es una *región elemental* de $\mathbb{R}^2$ si se puede describir de la forma

$$D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, a \leq x \leq b, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\big\}\,,$$

o de la forma

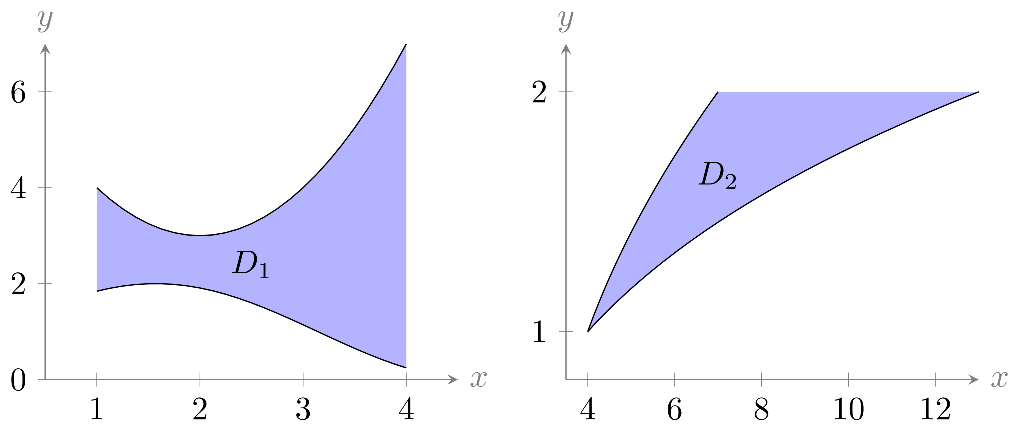
$$D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, a \leq y \leq b, \varphi(y) \leq x \leq \psi(y)\big\}\,,$$

para ciertos $a, b \in \mathbb{R}$ y $\varphi, \psi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continuas. $\triangleleft$

Ejemplo 5.1.2

1) $D_1 = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 1 \leq x \leq 4, 1 + \operatorname{sen} x \leq y \leq x^2 - 4x + 7\big\}$.

2) $D_2 = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 1 \leq y \leq 2, y^2 + 3 \leq x \leq y^3 + 2y + 1\big\}$.



◁

Nota 5.1.3

1) Hay conjuntos que vienen expresados de forma que no parecen regiones elementales, aunque en realidad si que lo son. Uno de los problemas que hemos de resolver es expresar un conjunto como una región elemental si ello es posible.

2) A veces un mismo conjunto puede representarse como región elemental de dos formas diferentes.

◁

Ejemplo 5.1.4 Consideramos el círculo unidad

$$C = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2 + y^2 \leq 1 \right\}.$$

No está expresado como una región elemental, pero escribiendo

$$C = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \Big/ -1 \leq x \leq 1, -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2} \right\},$$

vemos que en efecto es una región elemental. Es más, también podemos expresarlo como

$$C = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \Big/ -1 \leq y \leq 1, -\sqrt{1-y^2} \leq x \leq \sqrt{1-y^2} \right\},$$

Por lo que C se expresa como región elemental de dos formas diferentes. ◁

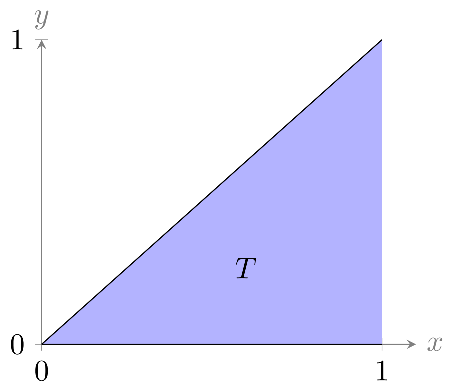
Veamos ahora cómo se calculan las integrales dobles sobre regiones elementales

1) Si
$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, a \leq x \leq b, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\right\},$$
entonces
$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

2) Si
$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, a \leq y \leq b, \varphi(y) \leq x \leq \psi(y)\right\},$$
entonces
$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Así, para calcular la integral doble sobre una región elemental, sólo hay que calcular dos integrales de una variable de manera iterada.

Ejemplo 5.1.5 Sea T el triángulo de vértices $(0,0)\,,(1,0)\,,(1,1)$.
Expresemos T como región elemental
$$T = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \Big/ \begin{array}{l} 0 \leq x \leq 1, \\ 0 \leq y \leq x \end{array}\right\}.$$

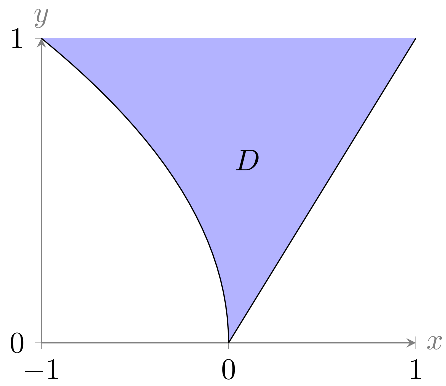


Calcularemos la integral
$$\iint_T e^{x+y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \int_0^x e^{x+y}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^1 \left(e^{x+y}\Big|_{y=0}^{y=x} \right) \mathrm{d}x = \int_0^1 \left(e^{2x} - e^x\right)\mathrm{d}x$$
$$= \left(\frac{1}{2}e^{2x} - e^x\right)\Bigg|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{2}e^2 - e - \left(\frac{1}{2} - 1\right) = \frac{1}{2}e^2 - e + \frac{1}{2}.$$

$\triangleleft$

Ejemplo 5.1.6 Consideramos el conjunto

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \Big/ \begin{array}{l} 0 \leq y \leq 1, \\ -y^2 \leq x \leq y \end{array} \right\},$$



sobre el que calcularemos la integral

$$\iint_D xy \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \int_{-y^2}^{y} xy \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} y \Big|_{x=-y^2}^{x=y} \right) \mathrm{d}y = \frac{1}{2} \int_0^1 (y^3 - y^5)\,\mathrm{d}y$$

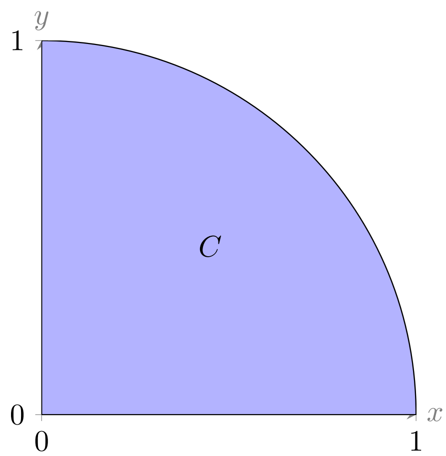
$$= \frac{1}{2} \left(\frac{y^4}{4} - \frac{y^6}{6} \right) \Big|_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{8} - \frac{1}{12} = \frac{1}{24}.$$

◁

Nota 5.1.7 Si D es una región elemental que se puede expresar de dos maneras distintas, entonces la integral doble se puede hacer de dos formas diferentes. El resultado final es el mismo, pero ambas formas no tienen por qué tener la misma dificultad. ◁

Ejemplo 5.1.8 Se considera la parte del círculo unidad que está en el primer cuadrante

$$C = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \Big/ \begin{array}{l} x^2 + y^2 \leq 1, \\ x \geq 0,\, y \geq 0 \end{array} \right\},$$



sobre el que calcularemos la integral

$$\iint_C \sqrt{1-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Podemos escribir C de dos maneras

$$C = \left\{ (x,y) \Big/ \begin{array}{l} 0 \leq x \leq 1, \\ 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2} \end{array} \right\}$$

$$= \left\{ (x,y) \Big/ \begin{array}{l} 0 \leq y \leq 1, \\ 0 \leq x \leq \sqrt{1-y^2} \end{array} \right\},$$

por lo que la integral se podrá hacer de dos formas diferentes,

$$\iint_C \sqrt{1-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-y^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \sqrt{1-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

pero la segunda forma es más corta que la primera. ◁

Nota 5.1.9 Si podemos descomponer una región D de $\mathbb{R}^2$ en una unión de regiones elementales

$$D = D_1 \cup \cdots \cup D_k,$$

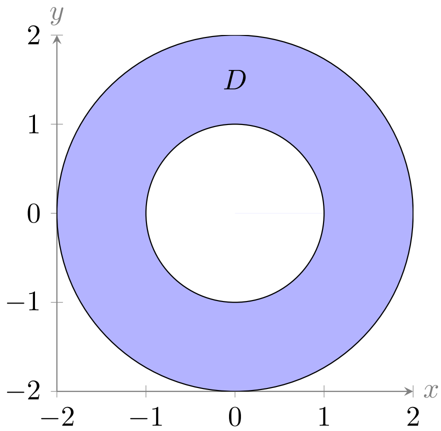
cuyas intersecciones dos a dos sean el vacío, o bien puntos o bien líneas, entonces

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{D_1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \cdots + \iint_{D_k} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

◁

Ejemplo 5.1.10 Consideramos la corona circular

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \Big/ \begin{array}{l} x^2+y^2 \geq 1, \\ x^2+y^2 \leq 4 \end{array} \right\},$$



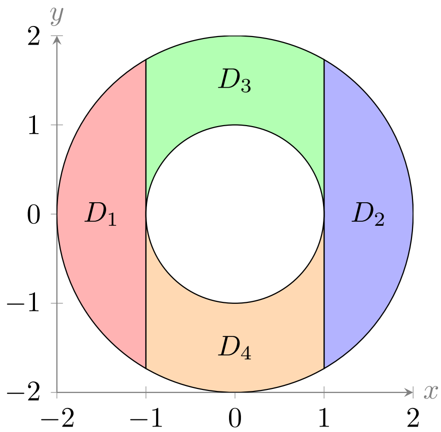
No puede ser expresada como región elemental, pero se puede descomponer en una unión de regiones elementales en las condiciones de la Nota 5.1.9 por ejemplo de la siguiente forma

$$D_1 = \left\{ (x,y) \Big/ \begin{array}{l} -2 \leq x \leq -1, \\ -\sqrt{4-x^2} \leq y \leq \sqrt{4-x^2} \end{array} \right\}$$

$$D_2 = \left\{ (x,y) \Big/ \begin{array}{l} 1 \leq x \leq 2, \\ -\sqrt{4-x^2} \leq y \leq \sqrt{4-x^2} \end{array} \right\}$$

$$D_3 = \left\{ (x,y) \Big/ \begin{array}{l} -1 \leq x \leq 1, \\ \sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{4-x^2} \end{array} \right\}$$

$$D_4 = \left\{ (x,y) \Big/ \begin{array}{l} -1 \leq x \leq 1, \\ -\sqrt{4-x^2} \leq y \leq -\sqrt{1-x^2} \end{array} \right\}$$



Se tiene que

$$D = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4,$$

y por lo tanto, para cualquier función continua $f(x,y)$ definida en D tendremos que

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{D_1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_{D_2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_{D_3} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_{D_4} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

◁

5.1.2 Cambio de variable

Sea el cambio de variable

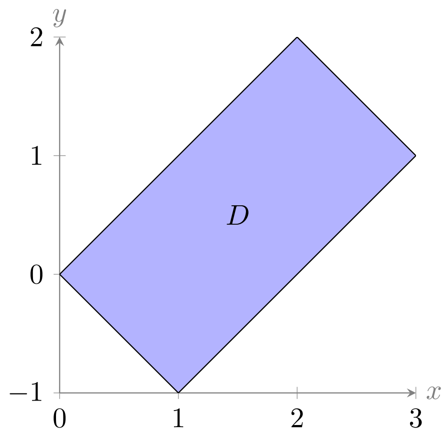
$$\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), \end{cases}$$

y supongamos que la región D en las variables (x,y) se transforma en la región D^* en las variables (u,v) por el cambio anterior. Entonces

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{D^*} f(x(u,v),y(u,v)) \left|\det \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v. \tag{5.1}$$

Ejemplo 5.1.11 Sea D la figura

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \Big/ \begin{array}{l} -x \leq y \leq 4-x, \\ x-2 \leq y \leq x \end{array} \right\}.$$

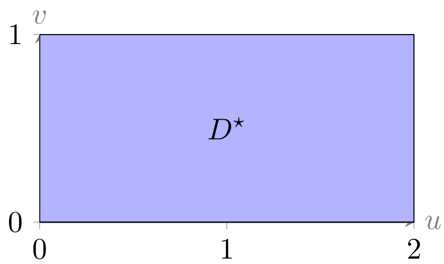


Podría expresarse como una región elemental utilizando funciones definidas a trozos o como unión de regiones elementales, pero vamos a utilizar un cambio de variable que la transformará en un producto de intervalos:

$$\begin{cases} x = u+v, \\ y = u-v, \end{cases}$$

operando sobre las inecuaciones que definen D, es sencillo ver que dicho conjunto se transforma en

$$D^* = \left\{ (u,v) \in \mathbb{R}^2 \Big/ \begin{array}{l} 0 \leq u \leq 2, \\ 0 \leq v \leq 1 \end{array} \right\}.$$



Si queremos utilizar este cambio de variable calcular integrales dobles sobre D, necesitamos calcular el valor absoluto del jacobiano

$$\left|\det \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \left|\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right| = 2.$$

Calculemos

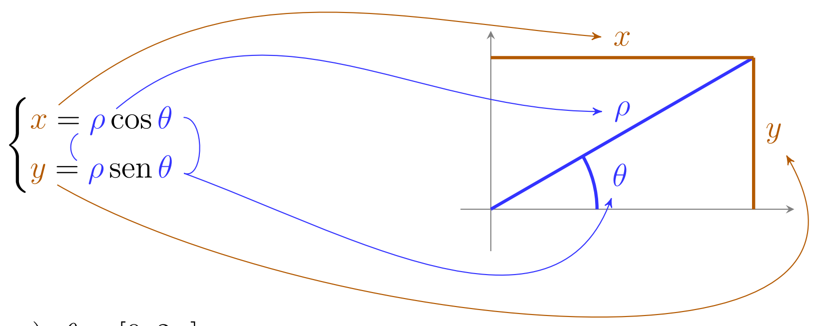
$$\begin{aligned}
&\iint_D \cos(x-2y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{D^*} 2\cos(3v-u)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \\
&= 2\int_0^2\int_0^1 \cos(3v-u)\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u = 2\int_0^2 \left(\frac{\operatorname{sen}(3v-u)}{3}\bigg|_{v=0}^{v=1}\right)\mathrm{d}u \\
&= \frac{2}{3}\int_0^2 (\operatorname{sen}(3-u)+\operatorname{sen}u)\,\mathrm{d}u = \frac{2}{3}\,(\cos(3-u)+\cos u)\big|_{u=0}^{u=2} \\
&= \frac{2}{3}(1+\cos 1-\cos 2-\cos 3).
\end{aligned}$$

◁

Nota 5.1.12 Puede ser adecuado realizar un cambio de variable o bien porque se simplifique D o bien porque se simplifique $f(x,y)$. ◁

5.1.2.1 Coordenadas polares

Es uno de los cambios más habituales consiste en hacer



con $\rho \in [0,\infty)$, $\theta \in [0,2\pi]$.

Calculemos el valor absoluto del jacobiano

$$\left|\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\theta)}\right| = \left|\det\begin{pmatrix}\cos\theta & -\rho\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \rho\cos\theta\end{pmatrix}\right| = |\rho| = \rho.$$

Ejemplo 5.1.13 Sea $r>0$. Consideramos el semicírculo de radio r en el semiplano superior

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2+y^2 \le r^2,\, y \ge 0\right\},$$

Haciendo el cambio a polares

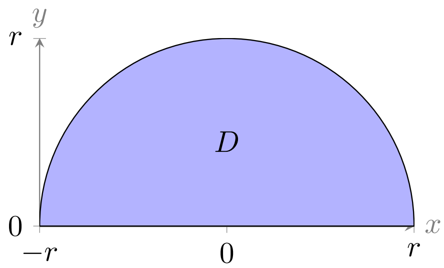
$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta, \\ y = \rho \operatorname{sen}\theta, \end{cases}$$

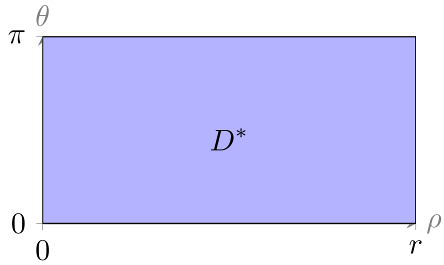
La región D se transforma en

$$D^* = \left\{(\rho,\theta) \,/\, \rho^2 \le r^2,\, \rho\operatorname{sen}\theta \ge 0\right\} =$$

$$= \left\{(\rho,\theta) \,/\, 0 \le \rho \le r,\, 0 \le \theta \le \pi\right\},$$

que es una sencilla región elemental, puesto que es un rectángulo. Vamos ahora a calcular una integral en la región D, transformándola en D^* por el cambio a polares





$$\iint_D x\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{D^*} \rho^2\cos\theta\sqrt{\rho^2(\cos^2\theta+\operatorname{sen}^2\theta)}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta$$

$$= \iint_{D^*} \rho^3\cos\theta\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta = \int_0^r\int_0^\pi \rho^3\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\rho$$

$$= \int_0^r \left(\rho^3\operatorname{sen}\theta\Big|_{\theta=0}^{\theta=\pi}\right)\mathrm{d}\rho = \int_0^r 0\,\mathrm{d}\rho = 0.$$

◁

Nota 5.1.14 El cambio a polares suele ser interesante cuando aparece x^2+y^2 en la función que hay que integrar o en las expresiones que definen el recinto D. ◁

5.2 La integral triple

Trabajaremos con

$$f : D \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \ ,$$

con D compacto y f continua en D. Trataremos de dar sentido a

$$\iiint_D f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

5.2.1 Regiones elementales

Definición 5.2.1 Diremos que un subconjunto de $\mathbb{R}^3$ es una *región elemental* de $\mathbb{R}^3$ si se puede describir alguna de las siguientes maneras

$$\begin{aligned}
D_1 &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, a \le x \le b, \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x), \psi_1(x,y) \le z \le \psi_2(x,y)\right\},\\
D_2 &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, a \le x \le b, \varphi_1(x) \le z \le \varphi_2(x), \psi_1(x,z) \le y \le \psi_2(x,z)\right\},\\
D_3 &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, a \le y \le b, \varphi_1(y) \le x \le \varphi_2(y), \psi_1(x,y) \le z \le \psi_2(x,y)\right\},\\
D_4 &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, a \le y \le b, \varphi_1(y) \le z \le \varphi_2(y), \psi_1(y,z) \le x \le \psi_2(y,z)\right\},\\
D_5 &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, a \le z \le b, \varphi_1(z) \le x \le \varphi_2(z), \psi_1(x,z) \le y \le \psi_2(x,z)\right\},\\
D_6 &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, a \le z \le b, \varphi_1(z) \le y \le \varphi_2(z), \psi_1(y,z) \le x \le \psi_2(y,z)\right\},
\end{aligned}$$

para ciertos $a, b \in \mathbb{R}$ y $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2$ continuas. ◁

Nota 5.2.2

1) Puede no ser evidente que un conjunto es una región elemental

2) A veces un mismo conjunto puede representarse como región elemental de dos formas diferentes.

◁

Ejemplo 5.2.3 Consideramos la esfera unidad

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x^2+y^2+z^2 \le 1\right\}.$$

Puede expresarse como

$$S = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\Big/\; \begin{array}{l} -1 \le x \le 1, \\ -\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2}, \\ -\sqrt{1-x^2-y^2} \le z \le \sqrt{1-x^2-y^2} \end{array} \right\},$$

es decir, es una región elemental. Además también se puede expresar como región elemental en cualquiera de las variantes de la Definición 5.2.1. Tan solo escribiremos otra de las formas, dejando las cuatro restantes como un simple ejercicio.

$$S = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\Big/\; \begin{array}{l} -1 \le y \le 1, \\ -\sqrt{1-y^2} \le x \le \sqrt{1-y^2}, \\ -\sqrt{1-x^2-y^2} \le z \le \sqrt{1-x^2-y^2} \end{array} \right\},$$

◁

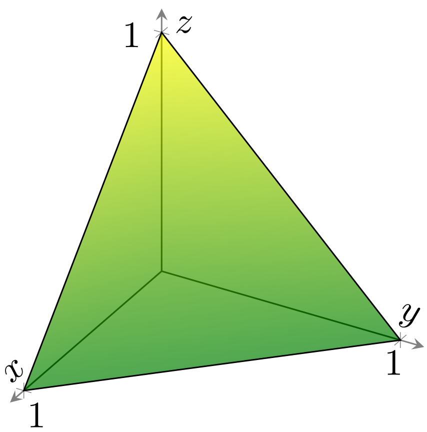
Veamos ahora cómo se calculan las integrales triples sobre cada tipo de región elemental presentada en la Definición 5.2.1.

$$\iiint_{D_1} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$
$$\iiint_{D_2} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \int_{\psi_1(x,z)}^{\psi_2(x,z)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x.$$
$$\iiint_{D_3} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_a^b \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} \int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$
$$\iiint_{D_4} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_a^b \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} \int_{\psi_1(y,z)}^{\psi_2(y,z)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y.$$
$$\iiint_{D_5} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_a^b \int_{\varphi_1(z)}^{\varphi_2(z)} \int_{\psi_1(x,z)}^{\psi_2(x,z)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z.$$
$$\iiint_{D_6} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_a^b \int_{\varphi_1(z)}^{\varphi_2(z)} \int_{\psi_1(y,z)}^{\psi_2(y,z)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

Así, para calcular la integral triple sobre una región elemental, sólo hay que calcular tres integrales de una variable de manera iterada.

Ejemplo 5.2.4
Sea T el tetraedro determinado por los planos

$$z=0,\ x=0,\ y=0,\ x+y+z=1.$$



Expresemos T como región elemental

$$T = \left\{ (x,y,z) \Big/ \begin{array}{l} 0 \le x \le 1, \\ 0 \le y \le 1-x, \\ 0 \le z \le 1-x-y \end{array} \right\}.$$

Calcularemos la integral

$$\iiint_T (x^2 y + e^z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} (x^2y + e^z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-x} (x^2yz + e^z)\Big|_{z=0}^{z=1-x-y}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-x} (y(x^2-x^3) - x^2y^2 + e^{1-x-y} - 1)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{y^2}{2}(x^2 - x^3) - \frac{y^3}{3}x^2 - e^{1-x-y} - y \right)\Big|_{y=0}^{y=1-x} \mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 \left(e^{1-x} - 2 + x + \frac{x^2}{6} - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{2} - \frac{x^5}{6} \right) \mathrm{d}x$$

$$= \left(-e^{1-x} - 2x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{18} - \frac{x^4}{8} + \frac{x^5}{10} - \frac{x^6}{36} \right)\Big|_{x=0}^{x=1} = e - \frac{899}{360}.$$

◁

Nota 5.2.5 Si D es una región elemental que se puede expresar de más de una forma, una integral triple sobre ella puede hacerse de más de una manera, y no todas han de tener el mismo grado de dificultad. ◁

Nota 5.2.6 Si una región D de $\mathbb{R}^3$ puede expresarse como una unión de regiones elementales

$$D = D_1 \cup \cdots \cup D_k,$$

cuyas intersecciones dos a dos sean el vacío, o bien puntos o bien líneas, o bien superficies, entonces

$$\iiint_D f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint_{D_1} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \cdots + \iiint_{D_k} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

◁

5.2.2 Cambio de variable

Sea el cambio de variable

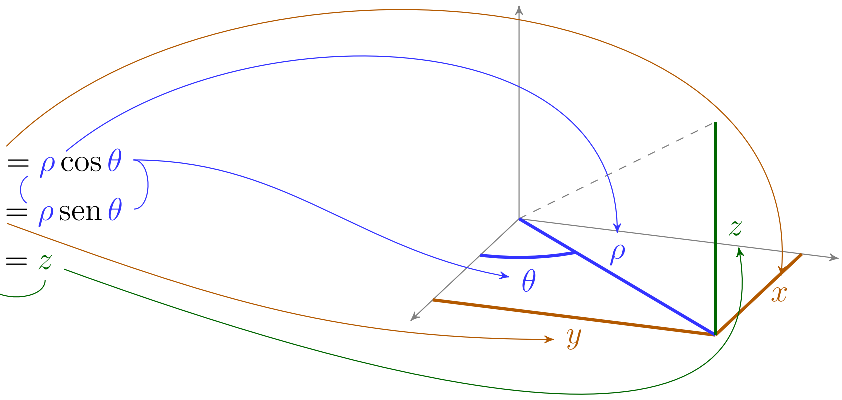
$$\begin{cases} x = x(u,v,w), \\ y = y(u,v,w), \\ z = z(u,v,w), \end{cases}$$

y supongamos que la región D en las variables (x,y,z) se transforma en la región D^* en las variables (u,v,w) por el cambio anterior. Entonces

$$\begin{aligned} &\iiint_D f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\ &= \iiint_{D^*} f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)) \left| \det \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \right| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w. \end{aligned} \tag{5.2}$$

5.2.2.1 Coordenadas cilíndricas

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z = z \end{cases}$$



con $\rho \in [0,\infty)$, $\theta \in [0,2\pi]$, $z \in \mathbb{R}$.

Calculemos el valor absoluto del jacobiano

$$\left|\det \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,z)}\right| = \left|\det \begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\,\mathrm{sen}\,\theta & 0 \\ \mathrm{sen}\,\theta & \rho\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right| = |\rho| = \rho.$$

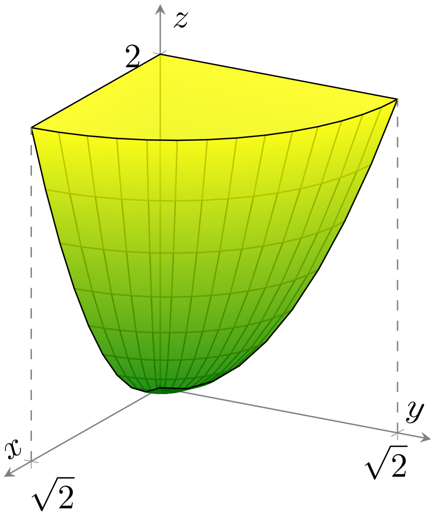
Por lo tanto si D se transforma en D^* por el cambio a cilíndricas

$$\iiint_D f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint_{D^*} \rho f(\rho\cos\theta, \rho\,\mathrm{sen}\,\theta, z)\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z.$$

Ejemplo 5.2.7

Consideraremos un recinto limitado por un paraboloide y un plano en el primer octante de $\mathbb{R}^3$

$$D = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \Big/ \begin{array}{l} x^2 + y^2 \leq z \leq 2, \\ x \geq 0,\ y \geq 0 \end{array} \right\}.$$

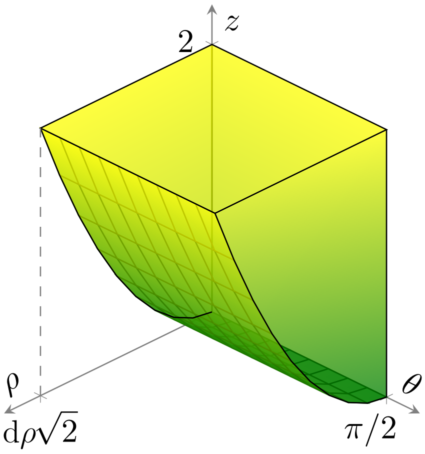


Haciendo el cambio a cilíndricas

$$\begin{cases} x = \rho \cos\theta, \\ y = \rho \operatorname{sen}\theta, \\ z = z, \end{cases}$$

la región D se transforma en

$$D^* = \left\{ (\rho, \theta, z) \Big/ \begin{array}{l} 0 \leq \rho \leq \sqrt{2}, \\ 0 \leq \theta \leq \pi/2 \\ \rho^2 \leq z \leq 2 \end{array} \right\}$$



que es una región elemental. Vamos ahora a calcular una integral en la región D, transformándola en D^* por el cambio a cilíndricas

$$\iiint_D xyz \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z$$

$$= \iiint_{D^*} \rho^3 z \operatorname{sen}\theta \cos\theta \,\mathrm{d}\rho \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}z$$

$$= \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{\pi/2} \int_{\rho^2}^2 \rho^3 z \operatorname{sen}\theta \cos\theta \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}\rho$$

$$= \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{\pi/2} \frac{z^2}{2} \rho^3 \operatorname{sen}\theta \cos\theta \Big|_{z=\rho^2}^{z=2} \mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}\rho$$

$$= \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{\pi/2} \left(2\rho^3 - \frac{\rho^7}{2} \right) \cos\theta \operatorname{sen}\theta \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}\rho$$

$$= \int_0^{\sqrt{2}} \left(\rho^3 - \frac{\rho^7}{4} \right) \operatorname{sen}^2\theta \Big|_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} \mathrm{d}\rho = \int_0^{\sqrt{2}} \left(\rho^3 - \frac{\rho^7}{4} \right) \mathrm{d}\rho$$

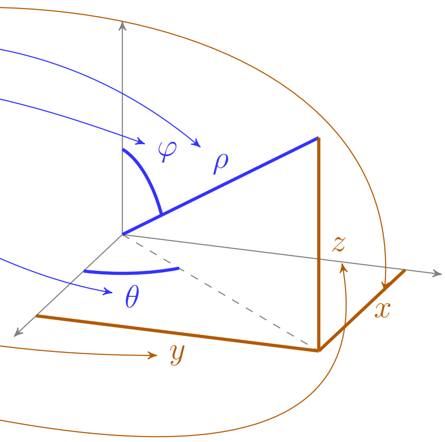
$$= \left(\frac{\rho^4}{4} - \frac{\rho^8}{32} \right) \Big|_{\rho=0}^{\rho=\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

◁

Nota 5.2.8 El cambio a cilíndricas suele ser útil cuando aparece $x^2 + y^2$ en la función o en la definición del recinto. $\triangleleft$

5.2.2.2 Coordenadas esféricas

$$\begin{cases} x = \rho \operatorname{sen}\varphi \cos\theta \\ y = \rho \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta \\ z = \rho \cos\varphi \end{cases}$$



con $\rho \in [0, \infty)$, $\theta \in [0, 2\pi]$ y $\phi \in [0, \pi]$.

Calculemos el valor absoluto del jacobiano

$$\left|\det \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\varphi)}\right| = \left|\det\begin{pmatrix} \operatorname{sen}\varphi\cos\theta & -\rho\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta & \rho\cos\varphi\cos\theta \\ \operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta & \rho\operatorname{sen}\varphi\cos\theta & \rho\cos\varphi\operatorname{sen}\theta \\ \cos\varphi & 0 & -\rho\operatorname{sen}\varphi \end{pmatrix}\right|$$

$$= \left|-\rho^2 \operatorname{sen}\varphi\right| = \rho^2 \operatorname{sen}\varphi.$$

Por lo tanto si D se transforma en D^* por el cambio a esféricas

$$\iiint_D f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

$$= \iiint_{D^*} f(\rho\operatorname{sen}\varphi\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta, \rho\cos\varphi)\rho^2\operatorname{sen}\varphi\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi.$$

Ejemplo 5.2.9

Se considera la esfera de radio 1 centrada en el origen

$$D = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x^2 + y^2 + z^2 \le 1\right\}.$$

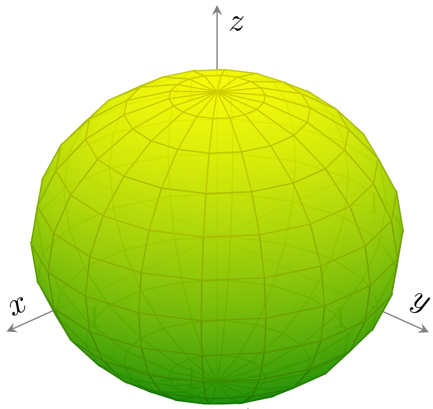
Haciendo el cambio a esféricas

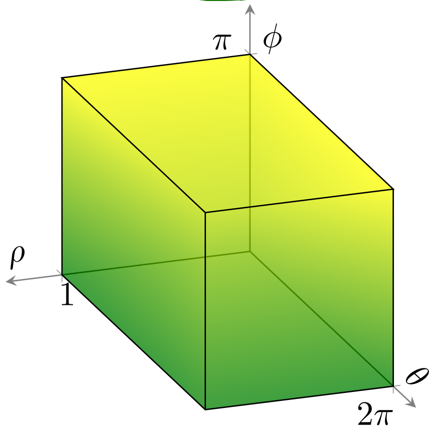
$$\begin{cases} x = \rho \sin\varphi \cos\theta, \\ y = \rho \sin\varphi \operatorname{sen}\theta, \\ z = \rho\cos\varphi, \end{cases}$$

la región D se transforma en

$$D^* = \left\{ (\rho, \theta, \phi) \Bigg/ \begin{array}{l} 0 \le \rho \le 1, \\ 0 \le \theta \le 2\pi, \\ 0 \le \varphi \le \pi \end{array} \right\}$$

que es una sencilla región elemental, puesto que es un prisma cuadrangular. Vamos ahora a calcular una integral en la región D, transformándola en D^* por el cambio a esféricas





$$\iiint_D \sqrt{x^2 + y^2}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z$$

$$= \iiint_{D^*} \rho^3 \operatorname{sen}^2\varphi\, \mathrm{d}\rho\, \mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}\varphi$$

$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \rho^3 \operatorname{sen}^2\varphi\, \mathrm{d}\varphi\, \mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}\rho$$

$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho^3 \left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2\varphi}{4}\right)\Bigg|_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} \mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}\rho$$

$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{\pi}{2}\rho^3\, \mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}\rho = \int_0^1 \frac{\pi}{2}\rho^3\theta\Big|_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \mathrm{d}\rho$$

$$= \pi^2 \int_0^1 \rho^3\, \mathrm{d}\rho = \pi^2 \frac{\rho^4}{4}\Bigg|_{\rho=0}^{\rho=1} = \frac{\pi^2}{4}.$$

$\triangleleft$

Nota 5.2.10 El cambio a esféricas suele ser útil cuando aparece $x^2 + y^2 + z^2$ en la función o en la definición del recinto. $\triangleleft$

5.3 Aplicaciones geométricas

5.3.1 Áreas

Si D es una región elemental de $\mathbb{R}^2$, el área de D es

$$\iint_D 1 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y.$$

5.3.2 Volúmenes

1) El volumen de una región elemental D de $\mathbb{R}^3$ es

$$\iiint_D 1 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z.$$

2) Sea D una región elemental de $\mathbb{R}^2$ y $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ con $f(x,y) \geq 0$ para cada $(x,y) \in D$. El volumen de la figura sobre D comprendida entre el grafo de f y el plano $z = 0$ es

$$\iint_D f(x,y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y.$$

5.4 Ejercicios

Ejercicio 5.1 Calcular el área de

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, / \, (x^2+y^2)^2 \leq 2xy, x \geq 0\}.$$

Ejercicio 5.2 Calcular el volumen del cuerpo limitado por la gráfica de

$$f(x,y) = e^x \cos y,$$

sobre el triángulo de vértices $(0,0)$, $(1,0)$, y $(0,\pi/2)$.

Ejercicio 5.3 Calcular el volumen de

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \, / \, x^2+y^2 \leq z^2, 0 \leq z \leq 1\}.$$

Ejercicio 5.4 Calcular

$$\int_0^2 \int_{x/2}^1 e^{-y^2} \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x.$$

Ejercicio 5.5 Calcular
$$\iint_D x \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y,$$
donde D es la región de $\mathbb{R}^2$ limitada por el eje OX y las circunferencias de radio 1 y centros $(-1, 1)$ y $(1, 1)$.

Ejercicio 5.6 Calcular
$$\iint_D y \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y,$$
con
$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, / \, x^2 + y^2 \leq 2, 0 \leq y \leq x^2\}.$$

Ejercicio 5.7 Calcular
$$\iiint_T x \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z,$$
con
$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, / \, x + z \leq 1, z \geq 0, y \geq 0, x \geq y^2\}.$$

Ejercicio 5.8 Calcular
$$\iiint_T x^2 y z^3 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z,$$
donde T es la región delimitada por las superficies $y^2 = x - x^2$ y $z^2 = 4x$ junto con las condiciones $y \geq 0$ y $z \geq 0$.

Ejercicio 5.9 Sea $a \in \mathbb{R}$ con $a > 0$. Calcular
$$\iiint_T (x + y - 2z) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z,$$
con
$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, / \, x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2\}.$$

Ejercicio 5.10 Calcular
$$\iiint_T y^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z,$$
con
$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, / \, x^2 + y^2 + (z+1)^2 \leq 4, z \geq 0\}.$$

Ejercicio 5.11 Calcular el volumen del cuerpo limitado por los paraboloides
$$y^2 + z^2 = 4(x + 9), \; y^2 + z^2 = 6(6 - x).$$

Ejercicio 5.12 Sea a un número real con $a > 0$. Hallar el volumen del sólido limitado por el paraboloide $2az = x^2 + y^2$ y la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$.

Ejercicio 5.13 Calcular el volumen del recinto de $\mathbb{R}^3$ limitado por

$$z = 0,\ x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1,\ x^2 + y^2 = 1.$$

Ejercicio 5.14 Sean $a, b \in \mathbb{R}$ ambos mayores que cero. Calcular el valor de

$$\iint_D xy \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

con

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1, 0 \leq y, 0 \leq x\}.$$

Ejercicio 5.15 Sean $r, R \in \mathbb{R}$ con $0 < r < R$. Calcular

$$\iint_D x \operatorname{sen} y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

donde D es la parte comprendida en el primer cuadrante de $\mathbb{R}^2$ de la corona circular centrada en $(0,0)$ de radios r y R.

Ejercicio 5.16 Sean $a > 0$, $b > 0$. Calcular el volumen del cuerpo

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, bz \leq a - y^2, bz \leq a - x^2, z \geq 0\}.$$

Ejercicio 5.17 Sea $a > 0$. Calcular el volumen de la región comprendida entre los cilindros

$$x^2 + y^2 \leq a^2,\ x^2 + z^2 \leq a^2.$$

Ejercicio 5.18 Sea

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} t}{t}, & \text{si } t \neq 0 \\ 1, & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

Calcular

$$\int_0^1 \int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x.$$

Ejercicio 5.19 Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ con $a < b$ y $c < d$. Calcular

$$\iint_D (x^2 + y^2 + xy)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

con

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}.$$

Ejercicio 5.20 Calcular

$$\iint_D \frac{xy}{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

con

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2+y^2 \geq 1, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}.$$

Ejercicio 5.21 Sea $a \in \mathbb{R}$ con $a > 0$. Sea D el círculo de centro $(0,0)$ y radio a. Calcular

$$\iint_D e^{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

Ejercicio 5.22 Sean $a > 0$ y $b > 0$. Calcular

$$\iint_D (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

con

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x \leq a, y^2 - 2bx \leq 0\}.$$

Ejercicio 5.23 Sean $a > 0$ y $b > 0$. Calcular

$$\iint_D (x^2-y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

donde D es la región limitada por la elipse centrada en $(0,0)$ con ejes sobre los ejes coordenados y longitudes a y b para los semiejes horizontal y vertical respectivamente

Ejercicio 5.24 Calcular

$$\iint_D xe^{-x^2/y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

con

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x \geq 0, 1 \leq y \leq 2, y \geq x^2\}.$$

Ejercicio 5.25 Calcular

$$\iint_D |x-y|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

con

$$D = [-1,1] \times [-1,1].$$

Ejercicio 5.26 Calcular

$$\iint_D \left|x^2-4y+1\right|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

con

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y \geq 0, x^2+y^2 \leq 4\}.$$

Ejercicio 5.27 Calcular

$$\iint_D \operatorname{sen} \frac{y^3+1}{2} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y,$$

con

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, \sqrt{x} \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq 1\}.$$

Ejercicio 5.28 Calcular el volumen del cuerpo limitado superiormente por la superficie $z = xye^{x+y}$ que está sobre el triángulo determinado, en el plano $z = 0$, por las rectas $y = 0$, $y = x$ e $y = 2 - x$.

Ejercicio 5.29 Utilizando integrales múltiples, calcular el área del círculo de radio $r > 0$.

Ejercicio 5.30 Calcular el volumen del cuerpo limitado por las superficies

$$z = x^2 + y^2, \; y = x^2, \; y = 1, \; z = 0,$$

utilizando una integral doble.

Ejercicio 5.31 Calcular el volumen del cuerpo limitado por el grafo de

$$f(x,y) = x^2 + y + 1,$$

sobre el triángulo de vértices $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, y $(0,1/2,0)$.

Ejercicio 5.32 Calcular el volumen del cuerpo limitado por el grafo de

$$f(x,y) = x^3 + y^3,$$

sobre el triángulo de vértices $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, y $(0,1,0)$.

Ejercicio 5.33 Sean $a > 0$ y $b > 0$, $c, d \in \mathbb{R}$. Calcular el volumen del cuerpo limitado por las superficies

$$(x-c)^2 + (y-d)^2 = a^2, \; x^2 + y^2 = 2bz, \; z = 0.$$

Ejercicio 5.34 Calcular

$$\iiint_T xyz \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z,$$

donde T es el tetraedro limitado por los planos coordenados y el plano dado por la ecuación $x + y + z - 1 = 0$.

Ejercicio 5.35 Calcular

$$\iiint_T z \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z,$$

con

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x \geq 0, y \geq 0, 0 \leq z \leq 1 - y^2, x + y \leq 1\}.$$

Ejercicio 5.36 Calcular

$$\iiint_T x^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z,$$

donde T es la esfera de centro $(0, 0, 0)$ y radio $a > 0$.

Ejercicio 5.37 Calcular

$$\iiint_T \frac{1}{(x + y + z + 1)^3} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z,$$

con

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 1\}.$$

Ejercicio 5.38 Calcular el volumen de un elipsoide con semiejes de longitudes a, b, c.

Ejercicio 5.39 Calcular el volumen de la figura limitada por las superficies

$$z = x^2, \; z = 4 - y^2,$$

en el primer octante de $\mathbb{R}^3$.

Ejercicio 5.40 Calcular el volumen de la figura limitada por las superficies

$$z = x^2 + y^2, \; z = 2 + 2x + 2y.$$

Ejercicio 5.41 Sea $a > 0$. Calcular el volumen de la figura

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2, \; x^2 + y^2 \leq ay.$$

Ejercicio 5.42 Calcular el volumen de la figura

$$D = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle/\, 0 \leq z \leq 2\pi, x^2 + y^2 \leq \operatorname{sen}^2 z\right\}$$

Capítulo 6

Campos, curvas y superficies

6.1 Campos

Definición 6.1.1 Sean $U \subseteq \mathbb{R}^2$ abierto y $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

1) Llamaremos *campo escalar* de clase $\mathcal{C}^k$ sobre U a toda aplicación de la forma

$$f : U \longrightarrow \mathbb{R} \ ,$$

con $f \in \mathcal{C}^k(U)$.

2) Llamaremos *campo vectorial* de clase $\mathcal{C}^k$ sobre U a toda aplicación de la forma

$$\boldsymbol{F} : U \longrightarrow \mathbb{R}^2 \ ,$$

con $f \in \mathcal{C}^k(U)$.

$\triangleleft$

Definición 6.1.2 Sean $U \subseteq \mathbb{R}^3$ abierto y $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

1) Llamaremos *campo escalar* de clase $\mathcal{C}^k$ sobre U a toda aplicación de la forma

$$f : U \longrightarrow \mathbb{R} \ ,$$

con $f \in \mathcal{C}^k(U)$.

2) Llamaremos *campo vectorial* de clase $\mathcal{C}^k$ sobre U a toda aplicación de la forma

$$\boldsymbol{F} : U \longrightarrow \mathbb{R}^3 \ ,$$

con $\boldsymbol{F} \in \mathcal{C}^k(U)$.

$\triangleleft$

En lo que sigue denotaremos por (x, y) a las variables en $\mathbb{R}^2$ y por (x, y, z) a las variables en $\mathbb{R}^3$. El símbolo $\cdot$ se utilizará para denotar el producto escalar habitual en $\mathbb{R}^2$ y en $\mathbb{R}^3$ y $\times$ denotará el producto vectorial en $\mathbb{R}^3$.

Definición 6.1.3 Los *operadores diferenciales* son mecanismos que involucran derivadas parciales, cuya entrada es un campo y cuya salida es otro campo. Consideraremos los siguientes:

1) Operadores *derivada parcial.* En $\mathbb{R}^2$ hay dos de ellos

$$\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}.$$

En $\mathbb{R}^3$ tenemos tres operadores

$$\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}.$$

actuando sobre una función de clase al menos $\mathcal{C}^1$, devuelven su derivada parcial correspondiente.

Pueden actuar sobre campos escalares, devolviendo otro campo escalar. También pueden actuar sobre campos vectoriales y en este caso devuelven otro campo vectorial.

2) *Gradiente.* Es un operador vectorial que se define en $\mathbb{R}^2$ como

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

Actúa sobre campos escalares y devuelve campos vectoriales:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right).$$

En $\mathbb{R}^3$, se define como

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

Actúa sobre campos escalares y devuelve campos vectoriales:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right).$$

3) *Divergencia.* Actúa sobre un campo vectorial y devuelve un campo escalar. Si $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2)$ es un campo vectorial sobre $\mathbb{R}^2$ se define como

$$\operatorname{div} \boldsymbol{F} = \nabla \cdot \boldsymbol{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y}.$$

Si $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2, F_3)$ es un campo vectorial sobre $\mathbb{R}^3$ se define como

$$\operatorname{div} \boldsymbol{F} = \nabla \cdot \boldsymbol{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}.$$

4) *Rotacional.* En principio se define para campos en $\mathbb{R}^3$. Actúa sobre un campo vectorial y devuelve un campo vectorial. Si $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2, F_3)$ es un campo vectorial sobre $\mathbb{R}^3$, se define como

$$\operatorname{Curl} \boldsymbol{F} = \operatorname{Rot} \boldsymbol{F} = \nabla \times \boldsymbol{F} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right).$$

El concepto se extiende para campos en $\mathbb{R}^2$ de la siguiente forma. Supongamos que $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2)$ es un campo vectorial en $\mathbb{R}^2$. Definiremos

$$\operatorname{Rot} \boldsymbol{F} = \operatorname{Rot}(F_1, F_2, 0) = \left(0, 0, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right).$$

5) *Laplaciano.* Actúa sobre un campo escalar y devuelve otro campo escalar. Si f es un campo escalar en $\mathbb{R}^2$,

$$\Delta f = \nabla \cdot \nabla f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Si f es un campo escalar en $\mathbb{R}^3$,

$$\Delta f = \nabla \cdot \nabla f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

6) *Diferencial.* Actúa sobre un campo escalar y devuelve un objeto que llamaremos diferencial. Sobre un campo escalar f en $\mathbb{R}^2$,

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y.$$

Sobre un campo escalar f en $\mathbb{R}^3$,

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial f}{\partial z}\,\mathrm{d}z.$$

◁

Definición 6.1.4 [Tipos de campos]

1) Diremos que un campo vectorial $\boldsymbol{F}$ es *conservativo* si existe un campo escalar f tal que $\nabla f = \boldsymbol{F}$.

2) Diremos que un campo vectorial $\boldsymbol{F}$ es *irrotacional* si $\operatorname{Rot} \boldsymbol{F} = \mathbf{0}$.

3) Diremos que un campo vectorial $\boldsymbol{F}$ es *incompresible* si $\operatorname{div} \boldsymbol{F} = 0$.

◁

Propiedades 6.1.5 Sea $\boldsymbol{F}$ un campo vectorial. Entonces $\operatorname{div}(\operatorname{Rot} \boldsymbol{F}) = 0$. ◁

6.2 Curvas paramétricas

Definición 6.2.1 Sean $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo y $k \in \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$. Una *curva paramétrica* de clase $\mathcal{C}^k$ es una aplicación

$$\boldsymbol{\gamma} : I \longrightarrow \mathbb{R}^3 \ ,$$

con $\boldsymbol{\gamma} \in \mathcal{C}^k(I)$. ◁

En general, cuando consideremos una curva paramétrica y no especifiquemos su clase $\mathcal{C}^k$, entenderemos que k es lo suficientemente grande para que tengan sentido nuestras afirmaciones y resultados.

El soporte de una curva paramétrica es una figura que corresponde a lo que intuitivamente entendemos por una curva. A veces se llama *curva* a dicho soporte, sobre todo cuando se quieren estudiar características de tipo geométrico. En este sentido se diría que la curva paramétrica $\boldsymbol{\gamma}$ sería una *parametrización* de su soporte.

Sin embargo, en otros contextos el aspecto más relevante es la propia función $\boldsymbol{\gamma}$, como cuando representamos mediante una curva paramétrica la trayectoria de un objeto puntual en el espacio en función del tiempo. En este caso no importa sólo la trayectoria en si misma, sino cómo se recorre. Dicha información no la proporciona $\operatorname{sop} \boldsymbol{\gamma}$ sino la propia función $\boldsymbol{\gamma}$.

Nota 6.2.2 En la Definición 6.2.1 se hace referencia a condiciones de derivabilidad en un cierto intervalo I, donde no se especifica que I sea abierto.

Diremos que una cierta función f definida sobre un intervalo de la forma $[a,b)$ o $[a,b]$ es derivable en a si existe y es finito el límite lateral

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a},$$

en cuyo caso llamaremos*derivada de f en a* a su valor.
Diremos que una cierta función f definida sobre un intervalo de la forma $(a,b]$ o $[a,b]$ es derivable en b si existe y es finito el límite lateral

$$\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a},$$

en cuyo caso llamaremos *derivada de f en b* a su valor. $\triangleleft$

Definición 6.2.3 Sea $\boldsymbol{\gamma}$ una curva paramétrica definida en un intervalo I.

1) Diremos que $\boldsymbol{\gamma}$ es *plana* si el soporte de $\boldsymbol{\gamma}$ está contenido en un plano. En particular $\boldsymbol{\gamma} : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ puede ser considerada como una curva paramétrica plana identificándola con

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{\gamma}} : I &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\longmapsto (\gamma_1(t), \gamma_2(t), 0) \end{aligned}$$

2) Si $I = [a,b)$ o $I = [a,b]$, diremos que $\boldsymbol{\gamma}(a)$ es el *punto inicial* de la curva.

3) Si $I = (a,b]$ o $I = [a,b]$, diremos que $\boldsymbol{\gamma}(b)$ es el *punto final* de la curva.

4) Diremos que $\boldsymbol{\gamma}$ es *cerrada* si I es un intervalo cerrado de la forma $I = [a,b]$ y además $\boldsymbol{\gamma}(a) = \boldsymbol{\gamma}(b)$. En otro caso diremos que es *abierta*.

5) Diremos que $\boldsymbol{\gamma}$ es *simple* si es abierta e inyectiva o bien si es cerrada e inyectiva en $[a,b)$, siendo $I = [a,b]$.

6) Diremos que $t \in I$ es un *punto regular* de $\boldsymbol{\gamma}$ si $\boldsymbol{\gamma}'(t) \neq \mathbf{0}$. En este caso $\boldsymbol{\gamma}'(t)$ es el *vector tangente* a $\boldsymbol{\gamma}$ en t.

7) Diremos que $\boldsymbol{\gamma}$ es una *curva regular* en I si cada $t \in I$ es un punto regular de $\boldsymbol{\gamma}$. En este caso definiremos para cada $t \in I$ el *vector tangente unitario* como

$$\frac{\boldsymbol{\gamma}'(t)}{||\boldsymbol{\gamma}'(t)||}.$$

$\triangleleft$

Definición 6.2.4 Sean I, J intervalos y $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Llamaremos *cambio de parámetro* a toda función
$$\theta : I \longrightarrow J \ ,$$
sobreyectiva, con $\theta \in \mathcal{C}^k(I)$ y $\theta'(t) \neq 0$ para cada $t \in I$. ◁

Proposición 6.2.5 Todo cambio de parámetro es inversible y su inversa también es un cambio de parámetro. ◁

Definición 6.2.6 Diremos que dos curvas paramétricas
$$\boldsymbol{\gamma} : I \longrightarrow \mathbb{R}^3 \ , \quad \boldsymbol{\xi} : J \longrightarrow \mathbb{R}^3 \ ,$$
son *equivalentes* si existe un cambio de parámetro
$$\theta : I \longrightarrow J \ ,$$
tal que $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\xi} \circ \theta$.

- Si $I = [a, b)$ o $I = [a, b]$, se exige además que los puntos iniciales de $\boldsymbol{\gamma}$ y $\boldsymbol{\xi}$ coincidan.
- Si $I = (a, b]$ o $I = [a, b]$, se exige además que los puntos finales de $\boldsymbol{\gamma}$ y $\boldsymbol{\xi}$ coincidan.

◁

Proposición 6.2.7 Dos curvas paramétricas regulares y simples con el mismo soporte que,

- o bien estén definidas en intervalos abiertos,
- o bien estén definidas en intervalos cerrados y sus puntos iniciales y finales coincidan respectivamente,

son equivalentes. ◁

Definición 6.2.8 Diremos que dos curvas parámétricas regulares equivalentes tienen la misma *orientación* si en cada punto del soporte sus vectores tangentes tienen el mismo sentido. ◁

Si dos curvas regulares equivalentes no tienen la misma orientación, entonces en cada punto del soporte, sus vectores tangentes tienen sentido contrario. Por tanto para cada curva regular es posible dar dos orientaciones diferentes.

Proposición 6.2.9 Supongamos que θ es un cambio de parámetro por el que se relacionan dos curvas regulares equivalentes.

1) Si $\theta'(t) > 0$ para todos los posibles valores de t, entonces las dos curvas tienen la misma orientación.

2) Si $\theta'(t) < 0$ para todos los posibles valores de t, entonces las dos curvas tienen distinta orientación.

$\triangleleft$

6.3 Superficies paramétricas

Definición 6.3.1

1) Diremos que un abierto D de $\mathbb{R}^2$ es *conexo* si para cada par de puntos $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in D$, existe una curva plana continua (de clase $\mathcal{C}^0$) definida en un intervalo cerrado y con soporte contenido en D cuyos puntos inicial y final son respectivamente $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$.

2) Diremos que un abierto D de $\mathbb{R}^3$ es *conexo* si para cada par de puntos $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in D$, existe una curva continua (de clase $\mathcal{C}^0$) definida en un intervalo cerrado y con soporte contenido en D cuyos puntos inicial y final son respectivamente $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$.

$\triangleleft$

Definición 6.3.2 Sean $D \subseteq \mathbb{R}^2$ un abierto conexo y $k \in \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$. Una *superficie paramétrica* de clase $\mathcal{C}^k$ es una aplicación

$$\boldsymbol{\varphi} : D \longrightarrow \mathbb{R}^3 \ ,$$

con $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{C}^k(D)$ y localmente inyectiva. $\triangleleft$

Nota 6.3.3 Localmente inyectiva significa que para cada $\boldsymbol{x} \in D$ existe un entorno V de $\boldsymbol{x}$ contenido en D de forma que $\boldsymbol{\varphi}|_V$ es inyectiva. $\triangleleft$

En general, cuando consideremos una superficie paramétrica y no especifiquemos su clase $\mathcal{C}^k$, entenderemos que k es lo suficientemente grande para que tengan sentido nuestras afirmaciones y resultados.

El soporte de una superficie paramétrica es una figura que corresponde a lo que intuitivamente entendemos por una superficie. Generalmente se llama *superficie* a dicho soporte, ya que lo más común es estudiar características de tipo geométrico. En este sentido se diría que la superficie paramétrica $\boldsymbol{\varphi}$ sería una *parametrización* de su soporte.

Definición 6.3.4 Sea $\boldsymbol{\varphi}(u, v)$ una superficie paramétrica definida en un abierto conexo D de $\mathbb{R}^2$.

1) Diremos que $\boldsymbol{\varphi}$ es *simple* si es inyectiva.

2) Diremos que $(a, b) \in D$ es un *punto regular* de $\boldsymbol{\varphi}$ si $\operatorname{rg} \mathrm{J}\boldsymbol{\varphi}(a, b) = 2$. En este caso

$$\left\{ \mathrm{J}\boldsymbol{\varphi}(a, b) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} / \, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

es el *plano tangente* a $\boldsymbol{\varphi}$ en (a, b). Cada vector de dicho plano es un *vector tangente* a $\boldsymbol{\varphi}$ en (a, b).

Llamaremos *vector normal* a $\boldsymbol{\varphi}$ en (a, b) a

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial u}(a, b) \times \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial v}(a, b) = \boldsymbol{\varphi}_u(a, b) \times \boldsymbol{\varphi}_v(a, b)$$

La condición anterior de regularidad es equivalente a afirmar que el vector normal en (a, b) es nu nulo, es decir, que

$$\boldsymbol{\varphi}_u(a, b) \times \boldsymbol{\varphi}_v(a, b) \neq \mathbf{0}.$$

3) Diremos que $\boldsymbol{\varphi}$ es una *superficie regular* en D si todos los puntos de D son puntos regulares de $\boldsymbol{\varphi}$. En este caso, podemos definir el *campo normal unitario* sobre $\boldsymbol{\varphi}$, dado por la expresión

$$\frac{\boldsymbol{\varphi}_u \times \boldsymbol{\varphi}_v}{||\boldsymbol{\varphi}_u \times \boldsymbol{\varphi}_v||}.$$

4) Diremos que $\boldsymbol{\varphi}$ es *orientable* si es posible definir un campo continuo normal unitario sobre la superficie.

$\triangleleft$

Proposición 6.3.5 Toda superficie paramétrica simple y regular es orientable. $\triangleleft$

Si una superficie es orientable, hay dos orientaciones posibles. Fijar una orientación corresponde intuitivamente a fijar una dirección en la que se atraviesa la superficie.

Definición 6.3.6 Diremos que dos superficies paramétricas

$$\boldsymbol{\varphi} : D \longrightarrow \mathbb{R}^3 \ , \quad \boldsymbol{\psi} : E \longrightarrow \mathbb{R}^3 \ ,$$

de clase $\mathcal{C}^k$ son *equivalentes* si existe una aplicación de clase $\mathcal{C}^k$

$$\boldsymbol{\theta} : D \longrightarrow E \ ,$$

biyectiva y con

$$\det \mathrm{J}\boldsymbol{\theta}(u,v) \neq 0,\ \forall\ (u,v) \in D,$$

con $\boldsymbol{\psi} \circ \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\varphi}$.
Se llama *cambio de parámetros* a la aplicación $\boldsymbol{\theta}$. ◁

Proposición 6.3.7 Dos superficies regulares y simples con el mismo soporte son equivalentes. ◁

Proposición 6.3.8 Sean

$$\boldsymbol{\varphi} : D \longrightarrow \mathbb{R}^3\ ,\quad \boldsymbol{\psi} : E \longrightarrow \mathbb{R}^3\ ,$$

dos superficies paramétricas orientables equivalentes relacionadas por un cambio de parámetros

$$\boldsymbol{\theta} : D \longrightarrow E\ ,$$

- Si $\det \mathrm{J}\boldsymbol{\theta}(u,v) > 0, \forall\,(u,v) \in D$, $\boldsymbol{\varphi}$ y $\boldsymbol{\psi}$ tienen la misma orientación.
- Si $\det \mathrm{J}\boldsymbol{\theta}(u,v) < 0, \forall\,(u,v) \in D$, $\boldsymbol{\varphi}$ y $\boldsymbol{\psi}$ tienen orientación contraria.

◁

6.4 Integrales sobre curvas y superficies

6.4.1 Integrales curvilíneas

En lo que sigue, sea $\boldsymbol{\gamma}$ una curva paramétrica clase $\mathcal{C}^1$ (basta con que sea continua y $\mathcal{C}^1$ a trozos) definida en un intervalo $[a,b]$. Sea $C = \operatorname{sop}\boldsymbol{\gamma}$.
Definiremos la *integral de trayectoria* de un campo escalar y la *integral de línea* de un campo vectorial sobre $\boldsymbol{\gamma}$. La primera no depende de la parametrización y la segunda tampoco siempre que se fije una orientación.

Definición 6.4.1 Sea f un campo escalar sobre C. Llamaremos *integral de trayectoria* de f sobre $\boldsymbol{\gamma}$ a

$$\int_{\boldsymbol{\gamma}} f = \int_a^b f(\boldsymbol{\gamma}(t))\, ||\boldsymbol{\gamma}'(t)||\, \mathrm{d}t.$$

◁

Ejemplo 6.4.2 Consideramos la curva paramétrica

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\gamma} : [0, 4\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\longmapsto (\cos t, \operatorname{sen} t, t) \end{aligned},$$

y el campo escalar

$$\begin{aligned} f : \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\longmapsto x^2 + y^2 + z^2 \end{aligned}.$$

Como f está definido sobre $\operatorname{sop}\boldsymbol{\gamma}$, podemos calcular la integral de trayectoria de f sobre $\boldsymbol{\gamma}$.

$$\begin{aligned} \int_{\boldsymbol{\gamma}} f &= \int_0^{4\pi} f(\boldsymbol{\gamma}(t))\, ||\boldsymbol{\gamma}'(t)||\, \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{4\pi} f(\cos t, \operatorname{sen} t, t)\, ||(-\operatorname{sen}(t), \cos(t), 1)||\, \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{4\pi} (1 + t^2)\sqrt{2}\, \mathrm{d}t = \sqrt{2}\left(t + \frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_0^{4\pi} = \sqrt{2}\left(4\pi + \frac{64}{3}\pi^3\right) \\ &= \frac{4\sqrt{2}\pi}{3}\left(3 + 16\pi^2\right). \end{aligned}$$

◁

Proposición 6.4.3 Si $\boldsymbol{\xi}$ es otra curva paramétrica equivalente a $\boldsymbol{\gamma}$, entonces

$$\int_{\boldsymbol{\gamma}} f = \int_{\boldsymbol{\xi}} f.$$

◁

Definición 6.4.4 Sea $\boldsymbol{F}$ un campo vectorial sobre $\boldsymbol{\gamma}$. Llamaremos *integral de línea* de $\boldsymbol{F}$ sobre $\boldsymbol{\gamma}$ a

$$\int_{\boldsymbol{\gamma}} \boldsymbol{F} = \int_a^b \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\gamma}(t)) \cdot \boldsymbol{\gamma}'(t)\, \mathrm{d}t.$$

◁

Ejemplo 6.4.5 Consideramos la curva paramétrica

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\gamma} : [0, 3\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\longmapsto (\cos t, \operatorname{sen} t, t) \end{aligned},$$

y el campo vectorial

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F} : \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\longmapsto (-y, x, 2z) \end{aligned}.$$

Como $\boldsymbol{F}$ está definido sobre $\operatorname{sop}\boldsymbol{\gamma}$, podemos calcular la integral de línea de $\boldsymbol{F}$ sobre $\boldsymbol{\gamma}$.

$$\begin{aligned}
\int_{\boldsymbol{\gamma}} \boldsymbol{F} &= \int_0^{3\pi} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\gamma}(t)) \cdot \boldsymbol{\gamma}'(t)\,\mathrm{d}t. \\
&= \int_0^{3\pi} \boldsymbol{F}(\cos t, \operatorname{sen} t, t) \cdot (-\operatorname{sen}(t), \cos(t), 1)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{3\pi} (-\operatorname{sen} t, \cos t, 2t) \cdot (-\operatorname{sen}(t), \cos(t), 1)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{3\pi} (1+2t)\,\mathrm{d}t = \left(t+t^2\right)\Big|_0^{3\pi} = 3\pi\,(1+3\pi)\,.
\end{aligned}$$

◁

Proposición 6.4.6 Si $\boldsymbol{\xi}$ es otra curva paramétrica equivalente a $\boldsymbol{\gamma}$, entonces

- si $\boldsymbol{\gamma}$ y $\boldsymbol{\xi}$ tienen la misma orientación, $\displaystyle\int_{\boldsymbol{\gamma}} \boldsymbol{F} = \int_{\boldsymbol{\xi}} \boldsymbol{F}$,
- si $\boldsymbol{\gamma}$ y $\boldsymbol{\xi}$ tiene distinta orientación, $\displaystyle\int_{\boldsymbol{\gamma}} \boldsymbol{F} = -\int_{\boldsymbol{\xi}} \boldsymbol{F}$,

◁

Si en las condiciones de la Definición 6.4.4, $\boldsymbol{\gamma}$ es una curva cerrada, entonces la integral de línea de llama *circulación* de $\boldsymbol{F}$ a lo largo de $\boldsymbol{\gamma}$, y se denota por

$$\oint_{\boldsymbol{\gamma}} \boldsymbol{F}.$$

Nota 6.4.7 En las condiciones de las Definiciones 6.4.1 y 6.4.4, es frecuente encontrar las notaciones siguientes en la bibliografía

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}r = ||\boldsymbol{\gamma}'(t)|| \\
&\mathrm{d}\boldsymbol{r} = (\,\mathrm{d}x,\, \mathrm{d}y,\, \mathrm{d}z) \\
&\int_{\boldsymbol{\gamma}} f = \int_{\boldsymbol{\gamma}} f\,\mathrm{d}r \\
&\int_{\boldsymbol{\gamma}} \boldsymbol{F} = \int_{\boldsymbol{\gamma}} \boldsymbol{F} \cdot\, \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{\boldsymbol{\gamma}} F_1\,\mathrm{d}x + F_2\,\mathrm{d}y + F_3\,\mathrm{d}z.
\end{aligned}$$

◁

Propiedades 6.4.8 Con las notaciones de las Definiciones 6.4.1 y 6.4.4 y siendo g otro campo escalar sobre C, $\boldsymbol{G}$ otro campo vectorial sobre C y $\alpha \in \mathbb{R}$, se tiene

1) $\displaystyle\int_{\boldsymbol{\gamma}} (f+g) = \int_{\boldsymbol{\gamma}} f + \int_{\boldsymbol{\gamma}} g.$

2) $\displaystyle\int_{\boldsymbol{\gamma}} \alpha f = \alpha \int_{\boldsymbol{\gamma}} f.$

3) $\displaystyle\left|\int_{\boldsymbol{\gamma}} f\right| \leq \int_{\boldsymbol{\gamma}} |f|.$

4) La integral de trayectoria es invariante por cambio de parámetro.

5) $\displaystyle\int_{\boldsymbol{\gamma}} (\boldsymbol{F}+\boldsymbol{G}) = \int_{\boldsymbol{\gamma}} \boldsymbol{F} + \int_{\boldsymbol{\gamma}} \boldsymbol{G}.$

6) $\displaystyle\int_{\boldsymbol{\gamma}} \alpha \boldsymbol{F} = \alpha \int_{\boldsymbol{\gamma}} \boldsymbol{F}.$

7) $\displaystyle\left|\int_{\boldsymbol{\gamma}} \boldsymbol{F}\right| \leq \int_{\boldsymbol{\gamma}} ||\boldsymbol{F}||.$

8) La integral de línea es invariante por cambio de parámetro que conserve la orientación.

9) Regla de Barrow:

$$\int_{\boldsymbol{\gamma}} \nabla f = f(\boldsymbol{\gamma}(b)) - f(\boldsymbol{\gamma}(a)).$$

10) Si $\boldsymbol{\gamma}$ es simple y $\boldsymbol{\xi}$ es otra curva simple con el mismo punto inicial que $\boldsymbol{\gamma}$ y con el mismo punto final que $\boldsymbol{\gamma}$, entonces

$$\int_{\boldsymbol{\gamma}} \nabla f = \int_{\boldsymbol{\xi}} \nabla f.$$

11) Si $\boldsymbol{\gamma}$ es cerrada,

$$\oint_{\boldsymbol{\gamma}} \nabla f = 0.$$

12) Si $\boldsymbol{\gamma}$ es regular, Sea

$$\boldsymbol{T}(t) = \frac{\boldsymbol{\gamma}'(t)}{||\boldsymbol{\gamma}'(t)||}.$$

Se tiene

$$\int_{\boldsymbol{\gamma}} \boldsymbol{F} = \int_{\boldsymbol{\gamma}} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{T}.$$

◁

Ejemplo 6.4.9 Consideramos la curva paramétrica

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\gamma} : [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\longmapsto \big(t^4/4, \operatorname{sen}^3(\pi t/2), 0\big)\end{aligned},$$

y el campo vectorial

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F} : \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) &\longmapsto (y,x,0)\end{aligned}.$$

Obsérvese que tomando el campo escalar

$$\begin{aligned}f : \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y,z) &\longmapsto xy\end{aligned},$$

se tiene que

$$\nabla f = \boldsymbol{F}.$$

Por lo tanto, aplicando la regla de Barrow,

$$\int_{\boldsymbol{\gamma}} \boldsymbol{F} = f(\boldsymbol{\gamma}(1)) - f(\boldsymbol{\gamma}(0)) = f((1/4,1,0)) - f((0,0,0)) = 1/4.$$

◁

Nota 6.4.10 Si $\boldsymbol{\gamma}$ es simple y regular, entonces la integral de trayectoria sólo depende de C, por lo que podemos escribir

$$\int_C f = \int_{\boldsymbol{\gamma}} f,$$

y si además fijamos una orientación, la integral de linea dependería sólo de C también:

$$\int_C \boldsymbol{F} = \int_{\boldsymbol{\gamma}} \boldsymbol{F}.$$

◁

Se considera que la orientación natural de una curva cerrada es la contraria a las agujas del reloj.

Teorema 6.4.11 [Teorema de Green]
Sean D una región elemental de $\mathbb{R}^2$ contenida en un abierto U de $\mathbb{R}^2$ y $\boldsymbol{F} : U \longrightarrow \mathbb{R}^2$ un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^1$, con componentes $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2)$. Denotaremos por ∂D a la curva orientada según la orientación natural que constituye la frontera de D. Se tiene que

$$\oint_{\partial D} \boldsymbol{F} = \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y.$$

◁

Corolario 6.4.12 Si D es una región elemental de $\mathbb{R}^2$,

$$\text{Área } D = \frac{1}{2}\oint_{\partial D}(-y,x) = \frac{1}{2}\oint_{\partial D}(x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x)\,.$$

◁

Teorema 6.4.13 [Teorema de caracterización de campos conservativos] Sea $\boldsymbol{F} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^1$. Son equivalentes las siguientes propiedades

(i) $\displaystyle\oint_C \boldsymbol{F} = 0$ para cada curva C simple, regular, cerrada y orientada.

(ii) $\displaystyle\int_{C_1} \boldsymbol{F} = \int_{C_2} \boldsymbol{F}$ para cada par de curvas C_1, C_2 simples, regulares y orientadas con los mismos puntos iniciales y finales.

(iii) $\boldsymbol{F}$ es conservativo.

(iv) $\boldsymbol{F}$ es irrotacional.

◁

6.4.2 Integrales sobre superficies

Lema 6.4.14 Sean $\boldsymbol{\varphi} : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$ y $\boldsymbol{\psi} : E \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dos superficies paramétricas simples y regulares con $\operatorname{sop}\boldsymbol{\varphi} = \operatorname{sop}\boldsymbol{\psi}$. Sean $U \subseteq \mathbb{R}^3$ un abierto con $\operatorname{sop}\boldsymbol{\varphi} \subseteq U$, f un campo escalar continuo sobre U y $\boldsymbol{F}$ un campo vectorial continuo sobre U.
Si $\boldsymbol{\varphi}$ y $\boldsymbol{\psi}$ tienen la misma orientación se tiene que

$$\iint_D (f\circ\boldsymbol{\varphi})\,||\boldsymbol{\varphi}_u \times \boldsymbol{\varphi}_v||\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \iint_E (f\circ\boldsymbol{\psi})\,||\boldsymbol{\psi}_u \times \boldsymbol{\psi}_v||\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$
$$\iint_D (\boldsymbol{F}\circ\boldsymbol{\varphi})\cdot(\boldsymbol{\varphi}_u \times \boldsymbol{\varphi}_v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \iint_E (\boldsymbol{F}\circ\boldsymbol{\psi})\cdot(\boldsymbol{\psi}_u \times \boldsymbol{\psi}_v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

y si $\boldsymbol{\varphi}$ y $\boldsymbol{\psi}$ tienen distinta orientación,

$$\iint_D (f\circ\boldsymbol{\varphi})\,||\boldsymbol{\varphi}_u \times \boldsymbol{\varphi}_v||\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \iint_E (f\circ\boldsymbol{\psi})\,||\boldsymbol{\psi}_u \times \boldsymbol{\psi}_v||\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$
$$\iint_D (\boldsymbol{F}\circ\boldsymbol{\varphi})\cdot(\boldsymbol{\varphi}_u \times \boldsymbol{\varphi}_v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = -\iint_E (\boldsymbol{F}\circ\boldsymbol{\psi})\cdot(\boldsymbol{\psi}_u \times \boldsymbol{\psi}_v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

◁

En lo que sigue, sea S una superficie con una parametrización $\boldsymbol{\varphi} : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$ simple y regular, donde D es un abierto conexo de $\mathbb{R}^2$. Se supone que existe U abierto de $\mathbb{R}^3$ con $S \subseteq U$.

Definición 6.4.15 Sea f un campo escalar continuo sobre U. Definimos la *integral de superficie* de f sobre S como

$$\int_S f = \int_{\boldsymbol{\varphi}} f = \iint_D f(\boldsymbol{\varphi}(u,v))\, ||\boldsymbol{\varphi}_u(u,v) \times \boldsymbol{\varphi}_v(u,v)||\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v$$

◁

Ejemplo 6.4.16 Consideramos la superficie paramétrica

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varphi} : [0,1] \times [0,2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\rho,\theta) &\longmapsto (\rho\cos\theta, \rho \operatorname{sen}\theta, \theta) \end{aligned}$$

y el campo escalar

$$\begin{aligned} f : \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y,z) &\longmapsto \sqrt{1+x^2+y^2} \end{aligned} .$$

Como f está definido sobre $\operatorname{sop}\boldsymbol{\varphi}$, podemos calcular la integral de superficie de f sobre $\boldsymbol{\varphi}$. Sea $D = [0,1] \times [0,2\pi]$

$$\begin{aligned} \int_{\boldsymbol{\varphi}} f &= \iint_D f(\boldsymbol{\varphi}(\rho,\theta)) \left|\left|\boldsymbol{\varphi}_\rho(\rho,\theta) \times \boldsymbol{\varphi}_\theta(\rho,\theta)\right|\right| \, \mathrm{d}\rho\, \mathrm{d}\theta \\ &= \iint_D f(\rho\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\theta, \theta)\, ||(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 0) \times (-\rho\operatorname{sen}\theta, \rho\cos\theta, 1)||\, \mathrm{d}\rho\, \mathrm{d}\theta \\ &= \iint_D \sqrt{1+\rho^2}\, ||(\operatorname{sen}\theta, -\cos\theta, \rho)||\, \mathrm{d}\rho\, \mathrm{d}\theta \\ &= \iint_D \sqrt{1+\rho^2}\sqrt{1+\rho^2}\, \mathrm{d}\rho\, \mathrm{d}\theta = \iint_D (1+\rho^2)\, \mathrm{d}\rho\, \mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (1+\rho^2)\, \mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}\rho = 2\pi \int_0^1 (1+\rho^2)\, \mathrm{d}\rho \\ &= 2\pi \left(\rho + \frac{\rho^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{8\pi}{3} \end{aligned}$$

◁

Supongamos además que S es orientada.

Definición 6.4.17 Sea $\boldsymbol{F}$ un campo vectorial continuo sobre U. Llamaremos *flujo* de $\boldsymbol{F}$ a través de S a la integral

$$\int_S \boldsymbol{F} = \iint_D \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\varphi}(u,v)) \cdot (\boldsymbol{\varphi}_u(u,v) \times \boldsymbol{\varphi}_v(u,v))\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v$$

◁

Ejemplo 6.4.18 Consideramos la superficie paramétrica

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varphi} : [0,1]\times[0,2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\rho,\theta) &\longmapsto (\rho\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\theta, \theta) \end{aligned}$$

y el campo vectorial

$$\boldsymbol{F} : \begin{aligned} \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) &\longmapsto \left(x^2+y^2, -x, z\right) \end{aligned} .$$

Como $\boldsymbol{F}$ está definido sobre sop $\boldsymbol{\varphi}$, podemos calcular la integral de superficie de $\boldsymbol{F}$ sobre $\boldsymbol{\varphi}$. Sea $D = [0,1]\times[0,2\pi]$

$$\begin{aligned} \int_{\boldsymbol{\varphi}} \boldsymbol{F} &= \iint_D \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\varphi}(\rho,\theta)) \cdot (\boldsymbol{\varphi}_\rho(\rho,\theta)\times\boldsymbol{\varphi}_\theta(\rho,\theta))\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta \\ &= \iint_D \boldsymbol{F}(\rho\cos\theta,\rho\operatorname{sen}\theta,\theta)\cdot((\cos\theta,\operatorname{sen}\theta,0)\times(-\rho\operatorname{sen}\theta,\rho\cos\theta,1))\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta \\ &= \iint_D \left(\rho^2, -\rho\cos\theta, \theta\right)\cdot(\operatorname{sen}\theta, -\cos\theta, \rho)\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta \\ &= \iint_D (\rho^2\operatorname{sen}\theta + \rho\cos^2\theta + \theta\rho)\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta = \int_0^1\int_0^{2\pi}(\rho^2\operatorname{sen}\theta+\rho\cos^2\theta+\theta\rho)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\rho \\ &= \int_0^1 \left(-\rho^2\cos\theta + \frac{\rho}{2}(\theta^2+\theta+\operatorname{sen}\theta\cos\theta)\right)\Big|_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\mathrm{d}\rho \\ &= \pi(1+2\pi)\int_0^1 \rho\,\mathrm{d}t = \pi(1+2\pi)\left.\frac{\rho^2}{2}\right|_{\rho=0}^{\rho=1} = \frac{\pi}{2}(1+2\pi) \end{aligned}$$

◁

Propiedades 6.4.19 Con las notaciones de las Definiciones 6.4.15 y 6.4.17 y siendo g otro campo escalar sobre U, $\boldsymbol{G}$ otro campo vectorial sobre U y $\alpha\in\mathbb{R}$, se tiene

1) $\displaystyle\int_S (f+g) = \int_S f + \int_S g.$

2) $\displaystyle\int_S \alpha f = \alpha\int_S f.$

3) $\displaystyle\left|\int_S f\right| \le \int_S |f|.$

4) La integral de superficie de un campo escalar es invariante por cambio de parámetros.

5) $\displaystyle\int_S (\boldsymbol{F}+\boldsymbol{G}) = \int_S \boldsymbol{F} + \int_S \boldsymbol{G}.$

6) $\displaystyle\int_S \alpha\boldsymbol{F} = \alpha\int_S \boldsymbol{F}.$

7) El flujo es invariante por cambio de parámetros que conserve la orientación.

8) Si $\boldsymbol{\varphi}$ es regular, Sea

$$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{\varphi}_u \times \boldsymbol{\varphi}_v}{||\boldsymbol{\varphi}_u \times \boldsymbol{\varphi}_v||}.$$

Se tiene

$$\int_S \boldsymbol{F} = \int_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}.$$

$\triangleleft$

Nota 6.4.20 Si una superficie orientada S se puede descomponer como una unión disjunta

$$S = S_1 \cup \cdots \cup S_p \cup C_1 \cup \cdots \cup C_q,$$

donde S_i son superficies regulares simples con la orientación inducida por la de S y C_j son curvas regulares simples. Entonces las integrales anteriores se pueden calcular como

$$\int_S = \int_{S_1} + \cdots + \int_{S_p},$$

y el resultado no depende de la descomposición elegida. $\triangleleft$

Consideraremos ahora un tipo de superficie a la que llamaremos *superficie con borde*. Sea M una superficie paramétrica orientada y una parametrización

$$\boldsymbol{\varphi} : V \longrightarrow \mathbb{R}^3 \ ,$$

compatible con la orientación. Sea D una región elemental de $\mathbb{R}^2$ con $D \subseteq V$. Llamando $\boldsymbol{\varphi}$ también a la restricción de $\boldsymbol{\varphi}$ a D, tenemos que $\boldsymbol{\varphi} : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es una parametrización de una cierta superficie orientada S con $S \subseteq M$. El hecho de que D sea una región elemental, hace que su frontera, ∂D, sea una curva cerrada, simple, continua y $\mathcal{C}^1$ a trozos. Sea $\boldsymbol{\gamma} : [a, b] \longrightarrow V$ una parametrización de ∂D con la orientación natural. Entonces $\boldsymbol{\varphi} \circ \boldsymbol{\gamma}$ es una parametrización de $\boldsymbol{\varphi}(\partial D)$. Se dice que S es una superficie con borde y diremos que $\partial S = \varphi(\partial D)$ es el borde de S con la orientación dada por $\boldsymbol{\varphi} \circ \boldsymbol{\gamma}$.

Teorema 6.4.21 [Teorema de Stokes]
Sea $\boldsymbol{F}$ un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^1$ definido en un abierto de $\mathbb{R}^3$ que contenga a S. Se tiene que

$$\int_S \operatorname{Rot} \boldsymbol{F} = \oint_{\partial S} \boldsymbol{F}.$$

◁

Ejemplo 6.4.22 Consideramos el círculo unidad en $\mathbb{R}^2$,

$$D = \left\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \,/\, u^2 + v^2 - 1 = 0\right\}.$$

Se considera S, la semiesfera superior de la esfera unidad centrada en $(0, 0, 0)$, parametrizada por

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varphi} : \quad D &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\longmapsto \left(u, v, \sqrt{1 - u^2 - v^2}\right) \end{aligned}.$$

Se considera el campo vectorial

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F} : \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\longmapsto (x, y, z) \end{aligned}.$$

Puesto que $\operatorname{Rot} \boldsymbol{F} = \mathbf{0}$,Se tiene que

$$\oint_{\partial S} \boldsymbol{F} = \int_S \operatorname{Rot} \boldsymbol{F} = \int_S \mathbf{0} = 0.$$

◁

Teorema 6.4.23 [Teorema de la divergencia de Gauß]
Sea V una región elemental de $\mathbb{R}^3$ y $U \subseteq \mathbb{R}^3$ un abierto con $V \subseteq U$ y $\boldsymbol{F} \in \mathcal{C}^1(U)$ un campo vectorial. Se supone que ∂V es una superficie regular cerrada, orientada de forma que su vector normal apunta hacia el exterior de V en todos los puntos. Entonces

$$\iiint_V \operatorname{div} \boldsymbol{F} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z = \int_{\partial V} \boldsymbol{F}.$$

◁

Ejemplo 6.4.24 Sea

$$V = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\right\},$$

y sea el campo vectorial

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F} : \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ \left(2x, y^2, z^2\right) &\longmapsto (x, y, z) \end{aligned}.$$

Aplicando el Teorma de la divergencia,

$$\int_{\partial V} \boldsymbol{F} = \iiint_V \operatorname{div} \boldsymbol{F} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z = \iiint_V (2 + 2y + 2z) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z = 8\pi/3$$

◁

6.4.3 Aplicaciones

1) Longitud de una curva C

$$\int_C 1.$$

2) Área de una superficie S

$$\int_S 1.$$

3) Área de una valla cuya base es una curva C, siendo h la función que proporciona la altura de la valla en cada punto.

$$\int_C h.$$

4) Masa de una superficie S con función de densidad ρ.

$$\int_S \rho.$$

5) Trabajo realizado al moverse por una curva C en un campo de fuerzas $\boldsymbol{F}$.

$$\int_C \boldsymbol{F}.$$

Parte II

Ecuaciones diferenciales

Capítulo 7

Conceptos básicos

7.1 Introducción

En esta asignatura estudiaremos un tipo especial de ecuaciones en las que las incógnitas serán funciones reales de una única variable real. Estas ecuaciones estarán constituidas por los siguientes elementos:

1) Aparecerán obligatoriamente derivadas de las funciones incógnitas (de orden uno y/o superior).

2) Podrán aparecer las propias funciones incógnitas.

3) Podrá aparecer la variable de dichas funciones.

Llamaremos a este tipo de ecuaciones *ecuaciones diferenciales ordinarias*, abreviadamente EDO.

También estudiaremos sistemas de EDO. Siempre consideraremos sistemas con el mismo número de ecuaciones que de funciones incógnita. Por lo tanto cuando trabajemos con una sola EDO, tendremos una sola función incógnita.

Veamos algunos ejemplos sencillos que nos mostrarán cómo este tipo de ecuaciones surgen de manera natural en ciertos contextos.

Ejemplo 7.1.1 Consideremos el cálculo de primitivas. Supongamos que tenemos una función $f(t)$ y queremos calcular una primitiva suya $y(t)$. Normalmente escribimos este problema como

$$y(t) = \int f(t)\,\mathrm{d}t. \tag{7.1}$$

Utilizando la definición de primitiva, (7.1) es equivalente a

$$y'(t) = f(t). \tag{7.2}$$

La ecuación (7.2) es una EDO, donde se supone que f es conocida e y es la función incógnita.

Así, concretando un poco más, obtener las primitivas de, por ejemplo, $\operatorname{sen}^2 t$ equivale a resolver la EDO

$$y'(t) = \operatorname{sen}^2 t,$$

donde $y(t)$ sería la función incógnita y cuyas soluciones son

$$y(t) = \frac{t - \operatorname{sen} t \cos t}{2} + c,\ c \in \mathbb{R}.$$

◁

Nota 7.1.2 [Hechos fundamentales]
Por supuesto (7.2) es el tipo de EDO más simple que se puede formular, pero aun así podemos observar varios hechos fundamentales

1) Si f es continua, podemos garantizar que (7.2) tienen solución, pero en otro caso no podemos afirmar nada. Por tanto no se pueden plantear EDO arbitrariamente y esperar que tengan solución.

2) Cuando (7.2) tiene solución, ésta no es única. Es bien sabido que si una función admite primitiva, entonces admite infinitas.

3) En ocasiones se sabe que (7.2) tiene solución, pero no se puede calcular explícitamente. Recordemos que hay integrales indefinidas como

$$\int \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, \mathrm{d}t$$

que *no salen*, como se decía en Bachillerato. Por lo tanto la EDO

$$y'(t) = \frac{\operatorname{sen} t}{t}$$

no se puede resolver explícitamente, aunque se sabe que tiene soluciones.

◁

Ejemplo 7.1.3 Consideremos la EDO

$$y''(t) = \operatorname{sen}^2 t. \tag{7.3}$$

Podríamos resolver esta ecuación utilizando técnicas elementales de cálculo de primitivas. Sabemos que $y''(t) = (y')'(t)$, luego $y'(t)$ debe ser una primitiva de $\operatorname{sen}^2 t$. Por tanto

$$y'(t) = \frac{t - \operatorname{sen} t \cos t}{2} + c_1,\ c_1 \in \mathbb{R},$$

de donde
$$y(t) = \frac{1}{4}\cos^2 t + \frac{1}{4}t^2 + c_1 t + c_2, \text{ con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$
Vemos así que en una EDO pueden aparecer derivadas de orden superior de la incógnita. ◁

Ejemplo 7.1.4 Consideremos una función derivable $y(x)$ tal que por cada punto P de su gráfica, la recta tangente a $y(x)$ en P es perpendicular al vector posición de P.

Un punto genérico del grafo de $y(x)$ es $(x, y(x))$, y este es su vector posición. Por la interpretación geométrica de la derivada, sabemos que un vector director de la recta tangente en $(x, y(x))$ es $(1, y'(x))$. Ahora

$$(x, y(x)) \perp (1, y'(x)) \Longleftrightarrow 0 = (x, y(x)) \cdot (1, y'(x)) = x + y(x)y'(x),$$

luego $y(x)$ debe verificar la EDO

$$y(x)y'(x) + x = 0. \tag{7.4}$$

Vemos en este ejemplo que un problema geométrico se transforma en un problema de EDO. ◁

Nota 7.1.5 [Problemas geométricos]
Debido a la interpretación geométrica de la derivada, muchos problemas geométricos pueden ser descritos y estudiados mediante EDO, como en el Ejemplo 7.1.4.

Observemos que la EDO (7.4) es significativamente más complicada que las que aparecían en los Ejemplos 7.1.1 y 7.1.3. En (7.4) aparecen explícitamente una derivada de la función incógnita y la variable de la función, pero a diferencia de las EDO de los ejemplos 7.1.1 y 7.1.3, ahora también aparece la propia función incógnita. ◁

Nota 7.1.6 [Simplificando las notaciones]
La escritura de la ecuación (7.4) comienza a ser un poco engorrosa. Es habitual, cuando se sabe o se puede deducir cuál es la variable de la que depende la función incógnita, omitir la evaluación explícita en esa variable. Así la ecuación (7.4) podría escribirse de manera más cómoda como

$$yy' + x = 0. \tag{7.5}$$

Si en un enunciado nos propusiesen la EDO (7.5) sin más explicaciones, sabríamos inmediatamente que y es la función incógnita, pues aparece en la expresión alguna derivada suya.

Deberíamos suponer además que x es la variable de la función y (por tanto la variable respecto de la cual se deriva y), ya que en caso de no serlo deberían advertirnos que era una constante o parámetro del problema.

Otra cosa bastante molesta es la nomenclatura que estamos utilizando para y y x. Referirse a y como la función incógnita y a x como la variable de la que depende y no parece muy adecuado. Se suele llamar a y la *variable dependiente* de la EDO y a x la *variable independiente.*

Al principio esto puede resultar algo confuso. Cuando trabajamos con ecuaciones del tipo que sea, solemos identificar la palabra *variable* con la palabra *incógnita.* En una EDO las incógnitas son exclusivamente las variables dependientes. La variable independiente no es una incógnita de la ecuación (no hay que *despejarla*). No es más que una variable de la cual dependen las soluciones de la EDO. $\triangleleft$

Ejemplo 7.1.7 Consideremos un móvil puntual con movimiento rectilíneo. Supongamos que su velocidad es proporcional a su desplazamiento desde el origen. Veamos cómo podemos describir dicho movimiento.

Sea t la variable que representa el tiempo. En cada instante de tiempo t, la posición del objeto queda determinada por una coordenada $x(t)$, una vez fijado el origen de la recta por la que se desplaza.

Sabemos que la derivada de la posición puede ser interpretada como la velocidad, por lo que la velocidad en el instante t será $x'(t)$. Por las condiciones que nos dan, existe un constante $\alpha \in \mathbb{R}$

$$x'(t) = \alpha x(t), \tag{7.6}$$

que es una ecuación diferencial. $\triangleleft$

Nota 7.1.8 [Más sobre notaciones]
Como antes, podemos escribir la ecuación (7.6)

$$x' = \alpha x. \tag{7.7}$$

A la vista de la ecuación, queda claro que x es la variable dependiente, pero ¿Cuál es la independiente? Si en enunciado nos presentan la ecuación (7.7) sin más información, consideraríamos que α es la variable independiente, pero entonces (7.7) sería otra ecuación que no tiene nada que ver con (7.6). Si nos presentan la ecuación (7.7) para referirse a la (7.6), nos tendrían que decir explícitamente que α es un parámetro o una constante.

Imaginemos ahora que nos proporcionan (7.7) diciéndonos además que α es un parámetro. Vemos que la variable independiente no aparece explícitamente. Salvo que nos dijesen lo contrario, podríamos usar cualquier símbolo (distinto de x y α, por supuesto) para denotar la variable independiente.

¿Qué símbolos se suelen utilizar para denotar a las variables dependientes e independientes en una EDO? No hay nada predeterminado. Por ejemplo, nosotros hemos utilizado x en el ejemplo 7.1.4 para la variable independiente pero sin embargo, en el Ejemplo 7.1.7 hemos denotado por x a la variable dependiente.

No obstante, a veces se observa cierta tendencia a utilizar x, y, z para las variables dependientes y t para la independiente, sobre todo en EDO utilizadas para modelizar fenómenos físicos en los que la variable independiente representa el tiempo. ◁

Nota 7.1.9 [Las EDO y la Física]
La Física es una fuente inagotable de EDO útiles. Por ejemplo, a la hora de describir fenómenos en Mecánica, las derivadas representan velocidades o aceleraciones. Es muy común conocer las fuerzas que actúan sobre un sistema. Muchas leyes de la física (por ejemplo las de Newton) establecen relaciones entre fuerzas, aceleraciones y momentos (aparece la velocidad), y así el planteamiento de un sistema de EDO está servido. ◁

Ejemplo 7.1.10 Un objeto puntual de masa 1 se mueve en un plano. Sobre él se aplica una fuerza con valor

$$-\lambda^2 \frac{(x,y)}{||(x,y)||},$$

para cada punto (x,y) del plano, donde $\lambda \neq 0$ es una constante.

Si $(x(t), y(t))$ es la posición del móvil en cada instante de tiempo t, por la segunda ley de Newton se tiene que

$$(x(t), y(t))'' = -\lambda^2 \frac{(x,y)}{||(x,y)||},$$

e igualando componente a componente,

$$\begin{cases} x''(t) = -\lambda^2 \dfrac{x(t)}{\sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}} \\ y''(t) = -\lambda^2 \dfrac{y(t)}{\sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}} \end{cases},$$

que es un sistema de EDO. Escrito con nuestra notación simplificada,

$$\begin{cases} x'' = -\lambda^2 \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ y'' = -\lambda^2 \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases}. \tag{7.8}$$

◁

7.2 Ecuaciones diferenciales ordinarias

7.2.1 Forma general

Sean $n, m \in \mathbb{N}$,

$$\boldsymbol{y} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^m \ ,$$

y

$$\boldsymbol{F} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m(n+1)} \longrightarrow \mathbb{R}^m \ .$$

Una *Ecuación Diferencial Ordinaria* (EDO) es

$$\boldsymbol{F}(t, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}', \dots, \boldsymbol{y}^{(n)}) = \boldsymbol{0}. \tag{7.9}$$

El valor n es el *orden* de la EDO (se supone que $\boldsymbol{y}^{(n)}$ aparece explícitamente en la expresión de $\boldsymbol{F}$).

- Si $m = 1$ se llama EDO *escalar*.
- Si $m > 1$ se llama EDO *vectorial* o *sistema* de EDO (con m ecuaciones y m incógnitas).

7.2.2 Tipos de EDO

1) *Ecuaciones autónomas*. Son aquellas en las que t no aparece explícitamente en la expresión de $\boldsymbol{F}$, es decir

$$\boldsymbol{F} : \mathbb{R}^{m(n+1)} \longrightarrow \mathbb{R}^m \ ,$$

y la ecuación es de la forma

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}', \dots, \boldsymbol{y}^{(n)}) = \boldsymbol{0}.$$

2) *Ecuaciones en forma normal*. Son aquellas en las que la derivada de orden superior aparece despejada. Es decir, son de la forma

$$\boldsymbol{y}^{(n)} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{y}, \dots, \boldsymbol{y}^{(m-1)}),$$

con

$$\boldsymbol{f} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{mn} \longrightarrow \mathbb{R}^m \ .$$

3) *Ecuaciones escalares lineales*. Son de la forma

$$a_0(t)y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(t)y' + a_n(t)y = b(t),$$

donde

$$a_i, b, y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \ , \ i = 0, \dots, n$$

4) *Sistemas diferenciales lineales.* Son de la forma

$$\boldsymbol{y}' = \mathsf{A}(t)\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}(t),$$

donde

$$\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_m)\,,$$

y $\mathsf{A}(t)$ es una matriz $m \times m$

$$\mathsf{A}(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1m}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}(t) & \cdots & a_{mm}(t) \end{pmatrix},$$

siendo

$$\boldsymbol{b} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^m \;, \quad a_{ij} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \;,\; i,j = 1, \ldots, m.$$

7.2.3 Soluciones

Dada una EDO como (7.9) podemos expresar sus *soluciones* de diferentes maneras

1) La más directa es considerar que una solución de (7.9) es una función

$$\boldsymbol{\varphi} : I \longrightarrow \mathbb{R}^m \;, \tag{7.10}$$

donde I es un cierto intervalo abierto, derivable al menos hasta orden n en I y tal que se verifique

$$\boldsymbol{F}(t, \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\varphi}', \ldots, \boldsymbol{\varphi}^{(n)}) = \boldsymbol{0}.$$

Una solución expresada de esta manera se llama *solución explícita* de la EDO (7.9).

Así, una solución explícita de la ecuación (7.3) del Ejemplo 7.1.3 es la función

$$\varphi(t) = \frac{1}{4}(\cos^2 t + t^2),$$

definida en todo $\mathbb{R}$.

2) Otra manera de expresar las soluciones es en *forma implícita.* Supongamos que existe una función $\boldsymbol{G}(t, \boldsymbol{y})$ de forma que en un cierto punto $(t_0, \boldsymbol{y}_0)$ se verifiquen las condiciones del teorema de la función implícita y podamos afirmar que existe una función

$$\boldsymbol{\varphi} : I \longrightarrow \mathbb{R}^m \;,$$

definida en un cierto intervalo abierto I tal que

$$\boldsymbol{G}(t, \boldsymbol{\varphi}(t)) = 0, \ \forall\, t \in I,$$

y de forma que $\boldsymbol{\varphi}$ sea una solución explícita de (7.3). En este caso diremos que

$$\boldsymbol{G}(t, \boldsymbol{y}) = 0,$$

es una *solución implícita* de (7.3).

Nótese que aunque no sea posible encontrar una expresión cerrada para $\boldsymbol{\varphi}$, es posible ver si es solución o no de (7.3) utilizando las fórmulas de derivación implícita o simplemente la regla de la cadena. Podemos, por ejemplo, considerar la ecuación (7.5). Es fácil ver que

$$y^2 + x^2 - 1 = 0, \tag{7.11}$$

es una solución en forma implícita de (7.5). En efecto, si consideramos que (7.11) define implícitamente a y como función de x y derivamos (7.11) respecto de x aplicando la regla de la cadena, obtenemos

$$2yy' + 2x = 0,$$

de donde

$$yy' + x = 0,$$

que es justamente la ecuación de partida (7.5). Por tanto tal función $y(x)$ definida implícitamente por (7.11) debe ser una solución explícita de (7.5), por lo que (7.11) es una solución implícita de (7.5).

3) Finalmente consideraremos soluciones expresadas en *forma paramétrica*. Supongamos que podemos expresar explícitamente tanto t como $\boldsymbol{y}$ como funciones de otra variable τ, definidas en un cierto intervalo abierto

$$\begin{aligned} t &= \lambda(\tau), \\ \boldsymbol{y} &= \boldsymbol{\mu}(\tau). \end{aligned} \tag{7.12}$$

Aplicando la regla de la cadena y fórmula de la derivada de la función inversa, tendríamos que

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}t} = \frac{\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\mu}}{\mathrm{d}\tau}}{\dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\tau}},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\dfrac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{\mu}}{\mathrm{d}\tau^2}\dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\tau} - \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\mu}}{\mathrm{d}\tau}\dfrac{\mathrm{d}^2\lambda}{\mathrm{d}\tau^2}}{\left(\dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\tau}\right)^3},$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

Si sustituyendo estas expresiones en la ecuación (7.9) hacen que se verifique, entonces diremos que (7.12) es una *solución paramétrica* de (7.9).

Veamos un ejemplo. Tomemos de nuevo la ecuación (7.5). Tenemos que

$$x(\tau) = \operatorname{sen}\tau,$$
$$y(\tau) = \cos\tau,$$

es una solución paramétrica de

$$yy' + x = 0.$$

En efecto, tenemos que

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau}}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}} = -\frac{\operatorname{sen}\tau}{\cos\tau}.$$

Sustituyendo todas las expresiones que tenemos en nuestra EDO,

$$-\cos\tau\frac{\operatorname{sen}\tau}{\cos\tau} + \operatorname{sen}\tau = -\operatorname{sen}\tau + \operatorname{sen}\tau = 0.$$

Por tanto nuestra afirmación es cierta.

En otro orden de cosas, sea cual sea la expresión de las soluciones, podemos tener varios tipos de soluciones.

1) *Solución particular*. Tendremos una solución particular de una EDO cuando conozcamos una solución concreta de la EDO. Por ejemplo, tal como vimos antes,

$$\varphi(t) = \frac{1}{4}(\cos^2 t + t^2),$$

sería una solución particular de (7.3).

También

$$y^2 + x^2 - 1 = 0,$$

sería una solución particular de (7.5).

2) *Solución general.* Tendremos la solución general de un EDO cuando dispongamos de una expresión, generalmente dependiendo de uno o varios parámetros, que englobe a todas las soluciones de la EDO salvo quizá algunos casos particulares.

Como se vio en el Ejemplo 7.1.3, la expresión

$$y(t) = \frac{1}{4}\cos^2 t + \frac{1}{4}t^2 + c_1 t + c_2, \text{ con } c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

es lo que ahora llamamos la solución general de la ecuación (7.3).

3) *Familia de soluciones.* En ocasiones se dispone de una familia de soluciones de una EDO, dependiente de uno o varios parámetros, que no es la solución general, pues hay otras familias de soluciones que también son solución de la EDO.

Por ejemplo para el sistema (7.8), todas las funciones de la familia

$$(x(t), y(t)) = \frac{1}{c^2}\left(\cos(a + c\lambda t), \operatorname{sen}(a + c\lambda t)\right), \ a, c \in \mathbb{R}, \ c \neq 0,$$

es una familia de soluciones de (7.8), pero no es la solución general, pues hay más familias de soluciones del sistema.

7.2.4 Problemas de Cauchy

Supongamos que f es una función continua en $\mathbb{R}$. Cuando estudiábamos la integración, con el símbolo

$$\int f(t)\,\mathrm{d}t, \tag{7.13}$$

denotábamos a todas las posibles primitivas de f, por lo que en cada ejemplo concreto al *resolver* la integral nos aparece la llamada *constante de integración*. En el lenguaje de las EDO, el símbolo (7.13) denota la solución general de

$$y' = f(t). \tag{7.14}$$

Sea ahora $t_0 \in \mathbb{R}$. Si escribimos

$$\int_{t_0}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x, \tag{7.15}$$

estaremos seleccionando una primitiva particular de f entre las infinitas que tiene, en concreto aquella primitiva $y(t)$ que verifica la condición

$$y(t_0) = 0. \tag{7.16}$$

Es decir, (7.15) denota a la solución particular de la EDO (7.14) que además verifica la igualdad (7.16). A esta última se la llamará *condición inicial*. El problema constituido por una EDO y una condición inicial se llamará *problema de Cauchy*. El problema de Cauchy que estamos considerando se escribiría

$$\begin{cases} y' = f(t) \\ y(t_0) = 0 \end{cases} \tag{7.17}$$

En general un *problema de Cauchy* estará constituido por una EDO de orden $n \in \mathbb{N}$ expresada en forma normal, junto con unas *condiciones iniciales*, que serán valores concretos para la variable dependiente y sus derivadas hasta orden $n-1$ en un mismo punto. De manera más precisa, un problema de Cauchy será de la forma

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}^{(n)} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}', \ldots, \boldsymbol{y}^{(n-1)}) \\ \boldsymbol{y}(t_0) = \boldsymbol{y}_0, \boldsymbol{y}'(t_0) = \boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}^{(n-1)}(t_0) = \boldsymbol{y}_{n-1} \end{cases} \tag{7.18}$$

donde $n \in \mathbb{N}$, $t_0 \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{y}_0, \ldots, \boldsymbol{y}_{n-1} \in \mathbb{R}^m$ y

$$\boldsymbol{f} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{mn} \longrightarrow \mathbb{R}^m \ .$$

En particular, para primer orden, un problema de Cauchy adoptaría la forma

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{y}) \\ \boldsymbol{y}(t_0) = \boldsymbol{y}_0 \end{cases} \tag{7.19}$$

Bajo hipótesis adecuadas, añadir condiciones iniciales a una EDO supone seleccionar una solución particular entre las posibles soluciones contenidas en la solución general. Veamos un caso en el que las condiciones iniciales *seleccionan* una única solución.

Teorema 7.2.1 [Teorema de Picard-Lindelöf]
Sea $(t_0, \boldsymbol{y}_0) \in \mathbb{R}^{m+1}$ y sea el problema de Cauchy

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{y}) \\ \boldsymbol{y}(t_0) = \boldsymbol{y_0} \end{cases}$$

Si existe un entorno $D \subseteq \mathbb{R}^{m+1}$ de $(t_0, \boldsymbol{y_0})$ con $\boldsymbol{f} \in \mathcal{C}^1(D)$, entonces existen un entorno I de t_0 y una única solución del problema de Cauchy definida en I. $\triangleleft$

Hay otros resultados de existencia y unicidad de soluciones que no trataremos aquí.

7.2.5 Reducción del orden

Sea una EDO vectorial de orden n con m ecuaciones y m incógnitas

$$\boldsymbol{F}(t, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}', \ldots, \boldsymbol{y}^{(n)}) = \boldsymbol{0}. \tag{7.20}$$

Tomemos nuevas variables dependientes

$$\boldsymbol{x_0}, \ldots, \boldsymbol{x_{n-1}},$$

cada una de ellas con m componentes. Sea el sistema de orden 1 con mn ecuaciones y mn incógnitas

$$\begin{cases} \boldsymbol{x_0'} = \boldsymbol{x_1} \\ \boldsymbol{x_1'} = \boldsymbol{x_2} \\ \vdots \\ \boldsymbol{x_{n-2}'} = \boldsymbol{x_{n-1}} \\ \boldsymbol{F}(t, \boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{x_1}, \ldots, \boldsymbol{x_{n-1}}, \boldsymbol{x_{n-1}'}) = \boldsymbol{0} \end{cases} \tag{7.21}$$

Entonces $\boldsymbol{y}(t)$ es solución de (7.20) si y sólo si existe

$$(\boldsymbol{x_0}(t), \ldots, \boldsymbol{x_{n-1}}(t)),$$

solución de (7.21) con $\boldsymbol{x_0}(t) = \boldsymbol{y}(t)$. Además

1) $\boldsymbol{y}^{(j)} = \boldsymbol{x_j}(t),\ j = 1, \ldots, n-1$

2) Si (7.20) estuviese en forma normal, se podría expresar directamente (7.21) también en forma normal.

3) $\boldsymbol{y}(t)$ verifica condiciones iniciales

$$\boldsymbol{y}(t_0) = \boldsymbol{y_0}, \boldsymbol{y}'(t_0) = \boldsymbol{y_1}, \ldots, \boldsymbol{y}^{(n-1)}(t_0) = \boldsymbol{y_{n-1}},$$

si y sólo si $(\boldsymbol{x_0}(t), \ldots, \boldsymbol{x_{n-1}}(t))$ verifica condiciones iniciales

$$\boldsymbol{x_0}(t_0) = \boldsymbol{y_0}, \boldsymbol{x_1}(t_0) = \boldsymbol{y_1}, \ldots, \boldsymbol{x_{n-1}}(t_0) = \boldsymbol{y_{n-1}}.$$

Como conclusión, vemos que toda EDO se puede expresar como un sistema de orden 1. Por lo tanto, podríamos restringir todo nuestro estudio a sistemas de orden 1.

7.2.6 Cambios de variable

Nos centraremos aquí exclusivamente en sistemas de orden 1 expresados en forma normal. Dada

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{y}), \tag{7.22}$$

a veces es conveniente aplicar cambios de variable para simplificar la EDO o bien para transformarla en otra conocida. Consideraremos dos tipos de cambio de variable.

7.2.6.1 Cambio de variable independiente

Un *cambio!de variable!independiente*cambio de variable independiente viene dado por

$$t = \varphi(s),$$

donde φ es de clase $\mathcal{C}^1$ y localmente inversible. Por la regla de la cadena tenemos

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[\boldsymbol{y}(\varphi(s))] = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}t}[\varphi(s)]\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}[s],$$

o, abusando de la notación mediante la identificando $\boldsymbol{y} \circ \varphi$ con $\boldsymbol{y}$ donde corresponda,

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}t}\varphi'(s),$$

la ecuación (7.22) se transforma en

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(\varphi(s), \boldsymbol{y})\varphi'(s),$$

donde ahora la variable independiente es s.

7.2.6.2 Cambio de variable dependiente

Un cambio de la variable dependiente $\boldsymbol{y}$ a una nueva variable dependiente $\boldsymbol{z}$ se formula mediante una relación

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\phi}(t, \boldsymbol{z}),$$

donde $\boldsymbol{\phi}$ es de clase $\mathcal{C}^1$. Por la regla de la cadena, se tiene

$$\boldsymbol{y}' = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\phi}(t, \boldsymbol{z}) = \frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial t}(t, \boldsymbol{z})\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial \boldsymbol{z}}(t, \boldsymbol{z})\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{z}}{\mathrm{d}t}.$$

Sustituyendo en (7.22)

$$\frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial t}(t, \boldsymbol{z}) + \frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial \boldsymbol{z}}(t, \boldsymbol{z})\boldsymbol{z}' = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{\phi}(t, \boldsymbol{z})),$$

y despejando $\boldsymbol{z}'$

$$\boldsymbol{z}' = \left(\frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial \boldsymbol{z}}(t,\boldsymbol{z})\right)^{-1} \left(\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{\phi}(t,\boldsymbol{z})) - \frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial t}(t,\boldsymbol{z})\right),$$

que es la EDO transformada por el cambio de variable. Nótese que para que el cambio tenga sentido y la nueva ecuación se pueda expresar en forma normal, la matriz Jacobiana

$$\frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial \boldsymbol{z}},$$

debe ser inversible.

Es habitual que $\boldsymbol{\phi}$ no dependa de t, en cuyo caso la ecuación transformada queda

$$\boldsymbol{z}' = \left(\frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial \boldsymbol{z}}(\boldsymbol{z})\right)^{-1} \boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{z})),$$

En el caso escalar no aparece ninguna matriz Jacobiana y las fórmulas, aunque formalmente similares, son algo más sencillas en la práctica.

Nótese que si tuviésemos un problema de Cauchy, las condiciones iniciales se transformarían de manera directa para ambos tipos de cambio de variable, invirtiendo las expresiones de los cambios.

7.3 Ejercicios

Ejercicio 7.1 Para cada una de las siguientes EDO, especificar sus variables dependientes e independiente, su orden y su tipo. Expresarlas en forma normal, si es posible.

a) $y'' + 5y^3 - 4y = e^x$.

b) $(1-x)y'' - 4xy' + 5y = \cos x$.

c) $y'' = \sqrt{1 + y'^2}$.

d) $y''' \operatorname{sen} x - y' \cos x = 2$.

e) $y^2 - 1 + xy' = 0$.

Ejercicio 7.2 Comprobar que $y(x) = x^4/16$ es solución en un cierto intervalo de $y' = x\sqrt{y}$.

Ejercicio 7.3 Comprobar que $y(x) = xe^x$ es solución en un cierto intervalo de $y'' - 2y' + y = 0$.

Ejercicio 7.4 Comprobar que $-2x^2y + y^2 = 1$ es solución en un cierto intervalo de $2xy + (x^2 - y)y' = 0$.

Ejercicio 7.5 Encontrar una EDO en forma normal y con variable dependiente y para la cual la solución general sea $x^2 + y^2 = 2cx,\ c \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 7.6 Hallar las soluciones constantes de $2xy' + 3y = 6$.

Ejercicio 7.7 Calcular los valores de m para los que e^{mx} es solución de $y' + 2y = 0$.

Ejercicio 7.8 Asumiendo que la solución general de $y' + 2xy^2 = 0$ es $1/(x^2 + c),\ c \in \mathbb{R}$, resolver, si es posible, los problemas de Cauchy para la EDO dada con condiciones iniciales

a) $y(0) = -1$.

b) $y(2) = 1/3$.

c) $y(0) = 1$.

d) $y(0) = 0$.

Determinar en cada caso el intervalo más grande donde son válidas las soluciones obtenidas.

Ejercicio 7.9 Sea la EDO escalar

$$y' = f(x, y).$$

Encontrar que EDO deben verificar las curvas ortonormales a sus soluciones.

Ejercicio 7.10 Establecer si los problemas de Cauchy siguientes verifican las hipótesis del teorema de Picard-Lindelöf. Calcular sus soluciones, si es posible.

a) $\begin{cases} xy' - y = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} xy' + y = x \\ y(0) = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} xy' - y = x \\ y(0) = 0 \end{cases}$

Capítulo 8

Ecuaciones diferenciales ordinarias de orden 1

El tipo de EDO en el que centraremos nuestra atención en este capítulo es el más *sencillo* posible, la ecuación escalar de orden 1

$$F(t, y, y') = 0. \tag{8.1}$$

Abordaremos exclusivamente el problema de la resolución analítica de EDO, del cual poco habíamos dicho hasta ahora. En general, éste es un problema intratable. Ni siquiera la EDO (8.1) es resoluble casi nunca. Por lo tanto simplemente estudiaremos algunos casos particulares de éste tipo de EDO para los cuales se conocen métodos de resolución sistemáticos.

Ahora bien, volvamos sobre el caso más simple de EDO que mostrábamos en el Ejemplo 7.1.1. Este tipo de EDO es totalmente equivalente al problema de cálculo de primitivas, por lo que su resolución en forma cerrada depende de que sea posible o no la realización de una cierta integral indefinida. Este hecho también será aplicable a casi todos los casos que vamos a estudiar, con lo cual nuestros *métodos de resolución* puede que a veces no conduzcan a la obtención de una forma cerrada para la solución.

Por otra parte, veremos que para algunos tipo de EDO, la forma natural de presentar las soluciones, no es la explícita, sino la implícita. Esto suele resultar extraño para un alumno con poca experiencia en este campo, que suele tender a pensar que las soluciones implícitas no son soluciones *de verdad*.

8.1 Ecuaciones de variables separadas

Son ecuaciones que se pueden escribir como

$$y' = f(t)g(y) \tag{8.2}$$

Veamos cómo se resuelven.

1) Si $\alpha \in \mathbb{R}$ verifica que $g(\alpha) = 0$, entonces $y(t) = \alpha$ es solución. Por lo tanto resolviendo la ecuación $g(y) = 0$ obtendríamos las soluciones constantes de (8.2).

2) Para $g(y) \neq 0$, tenemos

$$y' = f(t)g(y) \Longleftrightarrow \frac{y'}{g(y)} = f(t) \Longrightarrow \int \frac{y'(t)}{g(y(t))}\,\mathrm{d}t = \int f(t)\,\mathrm{d}t + c.$$

Haciendo el cambio de variable

$$s = y(t) \Longrightarrow \mathrm{d}s = y'(t)\ \mathrm{d}t,$$

en la primera integral, tenemos que

$$\int \frac{\mathrm{d}s}{g(s)} = \int f(t)\,\mathrm{d}t + c.$$

Tras hacer la primera integral, tendríamos que deshacer el cambio de variable, que correspondería a sustituir s por y. Por lo tanto, obtendríamos el mismo resultado renombrando la variable s como la variable y en la primera integral. Así podemos expresar la solución como

$$\boxed{\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int f(t)\,\mathrm{d}t + c,\ c \in \mathbb{R}} \tag{8.3}$$

que (una vez calculadas las integrales, si es posible) nos proporciona la solución general en forma implícita.

Ejemplo 8.1.1 Consideremos la ecuación

$$y' = \frac{(t-4)y^4}{t^3(y^2-3)}.$$

Es sencillo ver que es de variables separadas sin más que escribirla en la forma

$$y' = \frac{t-4}{t^3}\frac{y^4}{y^2-3},$$

donde con las notaciones anteriores tendríamos que

$$f(t) = \frac{t-4}{t^3}$$
$$g(y) = \frac{y^4}{y^2-3}$$

y aplicando la fórmula de resolución (8.3) tendríamos que la solución general es

$$\int \frac{y^2-3}{y^4}\,\mathrm{d}y = \int \frac{t-4}{t^3}\,\mathrm{d}t,$$

e integrando tenemos

$$\frac{1-y^2}{y^3} = \frac{2-t}{t^2} + c,\ c \in \mathbb{R},$$

de donde

$$t^2(1-y^2) = y^3(2-t) + ct^2y^3,\ c \in \mathbb{R},$$

que es la solución general en forma implícita.

Nos faltaría por estudiar si hay soluciones constantes. Este es un punto que se suele olvidar fácilmente cuando se resuelven este tipo de ecuaciones. Debemos resolver

$$\frac{y^4}{y^2-3} = 0,$$

cuya única solución es $y = 0$. Por tanto $y(t) = 0$ es la única solución constante de la ecuación. $\triangleleft$

8.2 Ecuaciones exactas

Diremos que una EDO

$$P(x,y) + Q(x,y)y' = 0 \tag{8.4}$$

es exacta si

$$\exists\, F(x,y) \,/\, P(x,y) = \frac{\partial F}{\partial x}(x,y),\ Q(x,y) = \frac{\partial F}{\partial y}(x,y). \tag{8.5}$$

Las solución general sería en este caso

$$\boxed{F(x,y) = c,\ c \in \mathbb{R}}. \tag{8.6}$$

Ejemplo 8.2.1 La ecuación

$$y^2 + 2xyy' = 0,$$

es exacta con $F(x,y) = xy^2$, ya que

$$\frac{\partial F}{\partial x} = y^2,\ \frac{\partial F}{\partial y} = 2xy.$$

por lo tanto su solución general es

$$ty^2 = c, \ c \in \mathbb{R}.$$

$\triangleleft$

Ejemplo 8.2.2 La ecuación

$$y + 2xy' = 0,$$

no es es exacta. Aunque sería sencillo verlo directamente, introduciremos a continuación un resultado que nos permitirá comprobarlo de manera inmediata. $\triangleleft$

Proposición 8.2.3 [Criterio de exactitud]
Sean $P(x,y)$, $Q(x,y)$ de clase $\mathcal{C}^1$. Se tiene que

$$P(x,y) + Q(x,y)y' = 0 \text{ es exacta } \iff \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Demostración:
$\boxed{\Longrightarrow}$
Como la ecuación es exacta, existe F tal que

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P, \ \frac{\partial F}{\partial y} = Q.$$

Puesto que P y Q son de clase $\mathcal{C}^1$, F es de clase $\mathcal{C}^2$. Por tanto podemos aplicar el lema se Schwarz, de donde

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

y se cumple la condición.

$\boxed{\Longleftarrow}$
Ahora se supone que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

y pretendemos construir una función $F(x,y)$ que verifique

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P, \ \frac{\partial F}{\partial y} = Q.$$

Tendríamos que

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P \Longrightarrow F = \int P \, \mathrm{d}x + \phi(y),$$

donde ϕ debería ser una función que dependiera sólo de y para ajustar adecuadamente la *constante (respecto de x) de integración*. Pero entonces tendríamos que

$$Q = \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int P\,\mathrm{d}x + \phi'(y),$$

y despejando

$$\phi'(y) = Q - \frac{\partial}{\partial y}\int P\,\mathrm{d}x.$$

Si efectivamente la expresión anterior depende sólo de y, entonces $\phi(y)$ podría ser obtenida por integración respecto de y y tendríamos calculada F. Para ver este punto, derivamos respecto de x

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial x}\phi'(y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(Q - \frac{\partial}{\partial y}\int P\,\mathrm{d}x\right) = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial^2}{\partial y\partial x}\int P\,\mathrm{d}x = \\ &\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\int P\,\mathrm{d}x = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0.\end{aligned}$$

Por tanto ϕ' sólo depende de y y es

$$\phi(y) = \int\left(Q - \frac{\partial}{\partial y}\int P\,\mathrm{d}x\right)\,\mathrm{d}y.$$

Quedando así F totalmente determinada. $\triangleleft$

La demostración de esta proposición es esencial para calcular las soluciones una vez establecida la exactitud de una EDO, pues bajo la condición

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

proporciona la siguiente fórmula para calcular F

$$\boxed{F = \int P\,\mathrm{d}x + \int\left(Q - \frac{\partial}{\partial y}\int P\,\mathrm{d}x\right)\,\mathrm{d}y}.$$

Haciendo un razonamiento análogo, se podría obtener también la siguiente fórmula

$$\boxed{F = \int Q\,\mathrm{d}y + \int\left(P - \frac{\partial}{\partial x}\int Q\,\mathrm{d}y\right)\,\mathrm{d}x}.$$

En las fórmulas anteriores, las integrales indefinidas no denotan todas las primitivas de sus funciones respectivas como es habitual, sino una primitiva concreta en cada caso.

Ejemplo 8.2.4 Sea

$$3x^2 + 4xy + (2x^2 + 2y)y' = 0.$$

En este caso

$$P = 3x^2 + 4xy, \ Q = 2x^2 + 2y.$$

Tenemos que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 4x = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

luego por la Proposición 8.2.3, la ecuación es exacta. Para resolverla debemos calcular F mediante una de las dos fórmulas anteriores. Utilizaremos la primera.

$$\int P \, \mathrm{d}x = \int (3x^2 + 4xy) \, \mathrm{d}x = x^3 + 2x^2 y.$$

Por lo tanto

$$\int \left(Q - \frac{\partial}{\partial y} \int P \, \mathrm{d}x \right) \, \mathrm{d}y = \int \left(2x^2 + 2y - \frac{\partial}{\partial y}(x^3 + 2x^2 y) \right) \, \mathrm{d}y =$$
$$\int (2x^2 + 2y - 2x^2) \, \mathrm{d}y = \int 2y \, \mathrm{d}y = y^2.$$

Así $F = x^3 + 2x^2y + y^2$ y las soluciones de la ecuación son

$$x^3 + 2x^2 y + y^2 = c, \ c \in \mathbb{R}.$$

$\triangleleft$

8.3 Factores integrantes

A veces una EDO no es exacta, pero multiplicándola por una cierta función se convierte en exacta, en cuyo caso se puede resolver. A tales funciones se las llamará *factores integrantes*.

Definición 8.3.1 Diremos que $\mu(x, y)$ es un *factor integrante* de

$$P(x, y) + Q(x, y)y',$$

si

$$\mu(x, y)P(x, y) + \mu(x, y)Q(x, y)y',$$

es exacta. $\triangleleft$

Las soluciones de la ecuación original serán las mismas que las de la nueva ecuación exacta, salvo quizá algunas que introduzca o elimine el factor integrante. Más concretamente, puede que se añadan soluciones de la forma

$$\mu(x, y) = 0,$$

o que se eliminen soluciones de la forma

$$\frac{1}{\mu(x, y)} = 0.$$

Por lo tanto, cada vez que se utilice un factor integrante habrá que comprobar si ambos tipos de función son solución o no de la ecuación original.

Veamos que condición debería verificar un factor integrante $\mu(x, y)$ para una EDO $P(x, y) + q(x, y)y'$. Debería ocurrir

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu P) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu Q),$$

de donde

$$\boxed{Q\frac{\partial \mu}{\partial x} - P\frac{\partial \mu}{\partial y} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mu = 0}, \tag{8.7}$$

que es una ecuación en derivadas parciales más difícil, en general, de estudiar y resolver que la ecuación original. No obstante hay casos en los que el factor integrante adopta una forma especial, de manera que la condición anterior se transforma en una EDO de resolución sencilla. Supongamos que el factor integrante es de la forma

$$\mu(g(x, y)),$$

para una cierta función particular $g(x, y)$. Es decir, μ sería una función de una variable, llamémosla t, que al ser evaluada en la función $g(x, y)$, nos proporciona el factor integrante.

En este caso, la condición (8.7) quedaría expresada como

$$\left(Q\frac{\partial g}{\partial x} - P\frac{\partial g}{\partial y}\right)\mu'(g(x, y)) = \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)\mu(g(x, y)),$$

de donde

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}}{Q\dfrac{\partial g}{\partial x} - P\dfrac{\partial g}{\partial y}}.$$

Por lo tanto, para que exista un factor integrante de la forma fijada, debe existir una función de una variable $f(t)$ tal que

$$f(g(x,y)) = \frac{\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}}{Q\dfrac{\partial g}{\partial x} - P\dfrac{\partial g}{\partial y}}. \tag{8.8}$$

En este caso obtendríamos μ como una solución particular de

$$\frac{\mu'}{\mu} = f(t),$$

que es de variables separadas y se puede resolver como

$$\mu(t) = e^{\int f(t)\,\mathrm{d}t},$$

por lo que el factor integrante sería

$$\mu(g(x,y)) = e^{\int f(t)\,\mathrm{d}t}\Big|_{t=g(x,y)}. \tag{8.9}$$

Algunos casos particulares interesantes son los siguientes

1) Factor integrante de la forma $\mu(x)$. Es decir tendríamos $g(x,y) = x$. La condición, que se deduce de (8.8), para que esto sea posible es que exista $f(x)$ tal que

$$f(x) = \frac{\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}}{Q},$$

siendo en ese caso el factor integrante

$$\mu(x) = e^{\int f(x)\,\mathrm{d}x}$$

2) Factor integrante de la forma $\mu(y)$. Es decir tendríamos $g(x,y) = y$. La condición, que se deduce de (8.8), para que esto sea posible es que exista $f(y)$ tal que

$$f(y) = \frac{\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}}{P},$$

siendo en ese caso el factor integrante

$$\mu(y) = e^{\int f(y)\,\mathrm{d}y}$$

3) Otros casos interesantes podrían ser $g(x,y) = xy$, $g(x,y) = ax + by$ con $a, b \in \mathbb{R}$, etc. Se deja al alumno deducir la condición que tendría que verificar la EDO y la fórmula para calcular el factor integrante.

8.3.1 Ecuación lineal de orden 1

Consideramos una ecuación escalar lineal de orden 1 de la forma

$$y' + a(t)y = b(t). \tag{8.10}$$

De todo lo anterior, se deduce con facilidad que

$$\mu(t) = e^{\int a(t)\,\mathrm{d}t},$$

es un factor integrante. Por tanto la ecuación

$$e^{\int a(t)\,\mathrm{d}t}y' + a(t)e^{\int a(t)\,\mathrm{d}t}y = b(t)e^{\int a(t)\,\mathrm{d}t},$$

es una ecuación exacta. Para resolverla podríamos utilizar la teoría general, pero en este caso observemos que

$$\left(e^{\int a(t)\,\mathrm{d}t}y\right)' = e^{\int a(t)\,\mathrm{d}t}y' + a(t)e^{\int a(t)\,\mathrm{d}t}y,$$

por lo que

$$\left(e^{\int a(t)\,\mathrm{d}t}y\right)' = b(t)e^{\int a(t)\,\mathrm{d}t},$$

de donde

$$e^{\int a(t)\,\mathrm{d}t}y = \int b(t)e^{\int a(t)\,\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t + c,\ c \in \mathbb{R},$$

y así la solución de la ecuación (8.10) es

$$\boxed{y(t) = e^{-\int a(t)\,\mathrm{d}t}\left(\int b(t)e^{\int a(t)\,\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t + c\right),\ c \in \mathbb{R}}.$$

Nota 8.3.2 En caso de tener una ecuación lineal de la forma

$$a_0(t)y' + a_1(t)y = c(t),$$

antes de poder aplicar lo anterior hay que escribirla en la forma

$$y' + \frac{a_1(t)}{a_0(t)}y = \frac{c(t)}{a_0(t)},$$

expresión que será válida para $a_0(t) \neq 0$. ◁

Ejemplo 8.3.3 Sea la ecuación lineal

$$y' + \frac{2t+1}{t} y = e^{-2t}.$$

En este caso

$$a(t) = \frac{2t+1}{t},\ b(t) = e^{-2t}.$$

Calculemos un factor integrante. Sea

$$A(t) = \int a(t)\,\mathrm{d}t = \int \frac{2t+1}{t}\,\mathrm{d}t = 2t + \log|t|.$$

Un factor integrante es

$$e^{A(t)} = |t|e^{2t}.$$

Multiplicando la ecuación por el factor integrante, llegamos a

$$(|t|e^{2t}y)' = |t|,$$

e integrando

$$|t|e^{2t}y = \int |t|\,\mathrm{d}t = \frac{|t|t}{2} + c,\ c \in \mathbb{R},$$

por lo que la solución general es

$$y(t) = \left(\frac{t}{2} + \frac{c}{|t|}\right) e^{-2t},$$

válida si $t \neq 0$. $\triangleleft$

8.4 Cambios de variable

Ciertas ecuaciones se reducen por cambio de variable (dependiente, independiente o ambas) a alguna de las anteriores.

En general es difícil ver si existen tales cambios de variable y encontrarlos, pero hay ciertos tipos particulares de EDO para las cuales existen cambios de variable establecidos.

8.4.1 Ecuaciones homogéneas

Las ecuaciones homogéneas son de la forma

$$y' = h(y/t). \tag{8.11}$$

A veces una ecuación homogénea puede estar escrita de forma que sea difícil a simple vista ver que es homogénea. Una manera de comprobar con facilidad si una ecuación es homogénea es la siguiente

$$y' = f(t, y) \text{ es homogénea } \iff f(\alpha t, \alpha y) = f(t, y),\ \forall\, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Para resolver una ecuación homogénea se realiza el cambio de variable dependiente

$$\boxed{y = zt}.$$

Para este cambio se tiene

$$y' = z't + z,$$

por lo que la ecuación (8.11) queda

$$z' = \frac{h(z) - z}{t},$$

que es de variables separadas.

Ejemplo 8.4.1 La ecuación

$$y' = \frac{2xy}{3x^2 - y^2},$$

es homogénea, ya que

$$\frac{2\alpha x \alpha y}{3\alpha^2 x^2 - \alpha^2 y^2} = \frac{2xy}{3x^2 - y^2}.$$

Hacemos el cambio

$$y = xz \Longleftrightarrow y' = xz' + z,$$

y queda

$$xz' + z = \frac{2x^2 z}{3x^2 - x^2 z^2} = \frac{2z}{3 - z^2} \Longrightarrow$$
$$xz' = \frac{2z}{3 - z^2} - z = \frac{z(z^2 - 1)}{3 - z^2} \Longrightarrow \frac{z'(3 - z^2)}{z(z^2 - 1)} = \frac{1}{x},$$

que es de variables separadas. La solución general se obtiene

$$\int \frac{3 - z^2}{z(z^2 - 1)}\, \mathrm{d}z = \int \frac{1}{x}\, \mathrm{d}x \Longrightarrow \log\left(\frac{z^2 - 1}{z^3}\right) = \log|x| + k,$$

de donde

$$z^2 - 1 = cxz^3,\ c \in \mathbb{R},$$

es la solución general. Deshaciendo el cambio de variable, tenemos

$$y^2(1 - cy) = x^2,\ c \in \mathbb{R}.$$

Además puede verse que $y = 0$ es solución. ◁

8.4.2 Reducción a ecuaciones homogéneas

Consideramos una ecuación de la forma

$$y' = h\left(\frac{a_1 t + b_1 y + c_1}{a_2 t + b_2 y + c_2}\right),$$

con $a_1 \neq 0$ o $b_1 \neq 0$. Se pueden presentar varios casos.

1) Si $c_1 = c_2 = 0$, la ecuación es homogénea.

2) Si

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0,$$

  2.1) Si $b_1 = 0$ entonces $b_2 = 0$ y la ecuación es de variables separadas.

  2.2) Si $b_1 \neq 0$, el cambio $a_1 t + b_1 y = z$ la reduce a una de variables separadas.

3) Si

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

Se calcula el punto (t_0, y_0) de intersección de las rectas $a_1 t + b_1 y + c_1 = 0$ y $a_2 t + b_2 y + c_2 = 0$ y se hacen los cambios $t = s + t_0$ e $y = z + y_0$, que la reducen a una homogénea.

8.4.3 Ecuación de Bernoulli

Son de la forma

$$y' + a(t)y = b(t)y^n \text{ con } n \in \mathbb{R}. \tag{8.12}$$

- Si $n = 0, 1$, es lineal.
- Si $n \neq 0$, $n \neq 1$ se hace el cambio de variable dependiente

$$\boxed{z = y^{1-n}},$$

que la reduce a una lineal, como veremos ahora

$$z = y^{1-n} \Longrightarrow z' = (1-n)y^{-n}y'.$$

Haciendo el cambio en la ecuación

$$z' + (1-n)a(t)y^{1-n} = b(t)(1-n) \Longleftrightarrow z' + (1-n)a(t)z = (1-n)b(t),$$

que es lineal.

Ejemplo 8.4.2 Sea
$$3ty' - 2y = \frac{t^3}{y^2}.$$
Es de Bernoulli con $n = -2$. El cambio que hay que realizar es por tanto
$$z = y^3,$$
de donde
$$z' = 3y^2y'.$$
reescribimos la ecuación
$$3ty^2y' - 2y^3 = t^3,$$
y hacemos el cambio de variable
$$tz' - 2z = t^3,$$
que es lineal. Para resolverla la debemos escribir en la forma
$$z' - \frac{2z}{t} = t^2.$$
Sea
$$A(t) = \int -\frac{2}{t}\,\mathrm{d}t = -\log t^2.$$
Un factor integrante es entonces
$$\mu(t) = \frac{1}{t^2}.$$
Así la ecuación queda
$$\left(\frac{1}{t^2}z\right)' = 1,$$
de donde
$$z(t) = t^3 + ct^2,\ c \in \mathbb{R} \Longrightarrow y^3 = t^3 + ct^2,\ c \in \mathbb{R}.$$
◁

8.4.4 Ecuación de Riccati

Son de la forma
$$y' + a(t)y^2 + b(t)y = c(t). \tag{8.13}$$

- Si $a(t) = 0$ es lineal.

- Si $c(t) = 0$ es de Bernoulli.
- En cualquier otro caso, dada $y_0(t)$ solución particular,se hace el cambio de variable dependiente
$$\boxed{y = y_0(t) + \frac{1}{z}},$$
que la reduce a una lineal
$$z' - (2y_0(t)a(t) + b(t))z = a(t).$$

Ejemplo 8.4.3 Para la ecuación
$$y' = \frac{y}{x} + x^3y^2 - x^5,$$
se tiene la solución particular $y_0(x) = x$. Hacemos el cambio
$$y = x + \frac{1}{z} \Longrightarrow y' = 1 - \frac{z'}{z^2},$$
y nos queda
$$z' + z\left(\frac{1}{x} + 2x^4\right) = -x^3.$$
que se puede resolver fácilmente, pues es lineal. $\triangleleft$

8.5 Ejercicios

Ejercicio 8.1 Resolver las siguientes EDO

a) $y' = \cos^2 y$.

b) $(1 + e^x)yy' = e^x$.

c) $y' = f(t)$.

d) $yy' + x = 0$.

e) $x' + \alpha x = 0$, con $\alpha \in \mathbb{R}$.

f) $-xy' + y = 3y^2$.

g) $xy' - y = 0$.

h) $xy' - y = x$.

i) $xy' + y = 0$.

j) $y' = x\sqrt{y}$.

k) $3e^x \tan y = y'(e^x - 2)\sec^2 y$.

l) $y' \operatorname{sen} t \cos y = -\cos t \operatorname{sen} y$.

m) $y' = \operatorname{sen}^2(x - y)$ (Cambio $u = x - y$).

Ejercicio 8.2 Resolver las siguientes EDO

a) $x^3 + xy^2 + (x^2y + y^3)y' = 0.$

b) $2xy = (y - x^2)y'.$

c) $2xy + (1 + x^2)y' = 0.$

d) $3x^2 + 4xy + (2x^2 + 2y)y' = 0.$

e) $1 + e^x y + xe^x y + (xe^x + 2)y' = 0.$

f) $e^y + (te^y + 2y)y' = 0.$

g) $2x \cos y + 3x^2 y = (y + x^2(\operatorname{sen} y - x))y'.$

Ejercicio 8.3 Encontrar un factor integrante de la forma indicada y resolver las siguientes EDO

a) $x^2y' = y^2 + 2xy$, con factor integrante $\mu(y)$.

b) $3y^2 - x + (2y^3 - 6xy)y' = 0$, con factor integrante $\mu(x + y^2)$.

c) $y + (t^2y - t)y' = 0$, con factor integrante $\mu(t)$.

d) $2xy^2 - 3y^3 = (7 - 3xy^2)y'$, con factor integrante $\mu(y)$.

e) $ty + (2t^2 + 3y^2 - 20)y' = 0$, con factor integrante $\mu(y)$.

f) $xy^3 + 2x^2y^2 - y^2 + (x^2y^2 + 2x^3y - 2x^2)y' = 0$, con factor integrante $\mu(xy)$.

g) $x - y + (x + y)y' = 0$, con factor integrante $\mu(x^2 + y^2)$.

Ejercicio 8.4 Encontrar la solución general de las ecuaciones siguientes

a) $(x^2 + 1)y' + 4xy = x.$

b) $y' = \dfrac{2y + (x + 1)^4}{x + 1}.$

c) $y' + 2y = t^2 + 2t.$

d) $y' + y \cos x = \sin x \cos x.$

e) $xy' + y = 3x^2.$

f) $\dfrac{y'}{x} - \dfrac{2y}{x^2} = x \cos x.$

Ejercicio 8.5 Encontrar la solución general de las ecuaciones siguientes

a) $y^4 - 2x^3y + (x^4 - 2xy^3)y' = 0.$

b) $t + y - (t - y)y' = 0.$

c) $x^2 + 2xy - x^2y' = 0.$

d) $\dfrac{2x}{y^3} + \dfrac{y^2 - 3x^2}{y^4}y' = 0.$

e) $t^2 - y^2 + 2tyy' = 0.$

f) $2xyy' = 4x^2 + 3y^2.$

g) $y' = \dfrac{3t - 4y - 2}{3t - 4y - 3}.$

h) $(1 - t + y)y' = t + y - 3.$

i) $x^2 + xy + 3y^2 - (x^2 + 2xy)y' = 0.$

j) $y' = \dfrac{3x - y + 2}{6x - 2y}.$

k) $y' = \dfrac{12t + 5y - 9}{-5t - 2y + 3}$.

l) $y' = \dfrac{y - x - 3}{3x + y + 1}$.

m) $y' = \dfrac{-2x - 2y + 1}{x + y - 2}$.

Ejercicio 8.6 Resolver las ecuaciones siguientes

a) $8ty' - y = \dfrac{1}{y^3\sqrt{t+1}}$.

b) $x^2y' + 2x^3y = y^2(1 + 2x^2)$.

c) $y' + \dfrac{y}{x+1} = -\dfrac{1}{2}(x+1)^3y^3$.

d) $y' + \dfrac{y}{2t} = \dfrac{t}{y^3}$.

e) $xy' + y = x^4y^3$.

f) $xy^2y' + y^3 = x\cos x$.

g) $-xy' + y = 3y^2$.

h) $y' = x\sqrt{y}$.

i) $y' = \dfrac{(1-2x)y^4 - y}{3}$.

j) $xy' + y = x^2y^2$.

k) $ty' + 6y = 3ty^{4/3}$.

l) $y' - y = e^ty^2$.

m) $x + yy' = x^2 + y^2$.

Ejercicio 8.7 Resolver las ecuaciones siguientes

a) $y' = (1-t)y^2 + (2t-1)y - t$. (Solución particular $y_0(t) = 1$).

b) $y' = -8xy^2 + 4x(4x+1)y - 8x^3 - 4x^2 + 1$. (Solución particular $y_0(x) = x$).

c) $y' = x^2 - 2xy + y^2$. (Solución particular $y_0(x) = ax + b$ para ciertos a y b).

d) $y' = -\dfrac{4}{t^2} - \dfrac{y}{t} + y^2$. (Solución particular $y_0(t) = \dfrac{2}{t}$).

Ejercicio 8.8 Resolver los siguientes problemas de Cauchy y determinar el mayor intervalo posible donde están definidas dichas soluciones.

a) $\begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = -1 \end{cases}$

Ejercicio 8.9 Un volcán hace erupción y comienza a caer ceniza de forma regular en varios kilómetros a la redonda. Un equipo de salvamento tratan de acceder a una población en la zona de influencia del volcán. Para ello deben despejar de cenizas la carretera de acceso. Comienzan la operación a las 9:00 horas. Durante la primera hora avanzan el doble de distancia que durante la segunda. ¿Cuándo estalló el volcán?

Ejercicio 8.10 Calcular la familia de curvas ortogonales a

$$x^2 + y^2 = 2cx,\ c \in \mathbb{R}.$$

Ejercicio 8.11 Calcular la familia de curvas que verifican que la ordenada de la intersección de la recta tangente en cada punto con el eje de ordenadas es el triple del cuadrado de la ordenada del punto.

Ejercicio 8.12 Una colonia de bacterias crece de forma proporcional a su número. Si en el instante $t = 0$ hay x_0 bacterias y en una hora se triplican ¿Cuántas bacterias habrá en 2 horas?

Ejercicio 8.13 Una alumno con gripe va a su escuela de 1000 estudiantes. La razón de propagación del virus es proporcional a la cantidad de infectados y a la de no infectados. Si a los 4 días hay 50 infectados, ¿Cuántos habrá en 6 días?

Ejercicio 8.14 Un circuito LR en serie con una inductancia $L = 0{,}1$ henrios y una resistencia $R = 40$ ohmios, se conecta en el instante $t = 0$ a una fuente con fuerza electromotriz $E(t) = 110$ voltios. Calcular la intensidad $I(t)$.

Ejercicio 8.15 La vida media de un material radiactivo es el tiempo transcurrido para que la cantidad de material se reduzca a la mitad. Un material se desintegra 2/3 en 1000 años y se sabe que el decaimiento es proporcional a la cantidad. ¿Cuál es su vida media?

Ejercicio 8.16 Calcular la familia de curvas tales que en cada punto la pendiente de su recta tangentes el triple de la pendiente de la recta que une el punto con el origen.

Ejercicio 8.17 Calcular la trayectoria que sigue un punto P que inicialmente estaba en la posición $(0, a)$, al ser arrastrado sin deslizamiento por un punto Q inicialmente en $(0, 0)$ que se mueve a lo largo del eje de ordenadas, de forma que P y Q están unidos por una cuerda inextensible de longitud a. (Curva tractriz).

Ejercicio 8.18 Obtener la curva que pasa por $(0, -2)$ tal que en cada uno de sus puntos su recta tangente tiene como pendiente la ordenada del punto incrementada en 3 unidades..

Ejercicio 8.19 Un émbolo de sección circular contiene un volumen V_0 de aire a presión p_0. Se comprime adiabáticamente hasta un volumen V_1. ¿Cuál es el trabajo realizado durante la compresión? (Indicación: En una compresión adiabática, la relación entre volúmenes y presiones es

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{V_0}{V}\right)^k,$$

para una cierta constante k que depende del gas).

Ejercicio 8.20 Hallar una curva que pase por el punto $(0, -2)$ y de forma que el ángulo que forma la recta tangente en cada punto con el eje OX sea igual al triple de la ordenada del punto.

Ejercicio 8.21 Sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Calcular una curva $y(x)$ tal que para cada punto x, el área limitada por la curva y las rectas $X = 0$, $Y = 0$, $X = x$ valga

$$\alpha^2 \log \frac{y}{\alpha}$$

Ejercicio 8.22 Una masa puntual de 1 gr se mueve sobre una recta. Sobre ella actúa una fuerza proporcional al tiempo e inversamente proporcional a la velocidad. En el instante $t = 10$ s la velocidad era 50 cm/s y la fuerza 4 dinas. ¿Qué velocidad alcanzará el cuerpo al cabo de un minuto?

Ejercicio 8.23 Calcular las curvas tales que en cada punto el segmento de la recta tangente comprendido entre los dos ejes coordenados tiene su punto medio en dicho punto.

Capítulo 9

Ecuaciones diferenciales lineales

9.1 Sistemas diferenciales lineales

Como ya dijimos en el apartado 7.2.2, un *sistema diferencial lineal* de tamaño $m \in \mathbb{N}$ es de la forma

$$\boldsymbol{y}' = \mathsf{A}(t)\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}(t), \tag{9.1}$$

donde

$$\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_m)\,,$$

y $\mathsf{A}(t)$ es una matriz $m \times m$

$$\mathsf{A}(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1m}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}(t) & \cdots & a_{mm}(t) \end{pmatrix},$$

siendo

$$\boldsymbol{b} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^m \ , \quad a_{ij} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \ , \ i, j = 1, \ldots, m.$$

Diremos que $\mathsf{A}(t)$ es la *matriz del sistema* y que $\boldsymbol{b}(t)$ es el *término independiente*.

Ejemplo 9.1.1 Consideremos el sistema de tamaño 3,

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} t & e^t & t\cos t \\ 1 & 4t & \log t \\ -\operatorname{sen}^2 t & 0 & e^{t^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t^2 - t \\ \dfrac{1-t}{1+t} \\ te^t + 1 \end{pmatrix}$$

$\triangleleft$

Los problemas de Cauchy asociados a sistemas diferenciales lineales son de la forma

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}' = \mathsf{A}(t)\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}(t) \\ \boldsymbol{y}(t_0) = \boldsymbol{y}_0, \end{cases} \tag{9.2}$$

con $t_0 \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{y}_0 \in \mathbb{R}^m$.

Teorema 9.1.2 [Teorema de Picard]
Sean I un intervalo abierto, $t_0 \in I$, $\boldsymbol{y}_0 \in \mathbb{R}^m$, $\mathsf{A}(t)$ una matriz $m \times m$ de funciones continuas en I y $\boldsymbol{b} : I \longrightarrow \mathbb{R}^m$ continua en I. Entonces el problema de Cauchy

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}' = \mathsf{A}(t)\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}(t) \\ \boldsymbol{y}(t_0) = \boldsymbol{y}_0, \end{cases}$$

tiene una única solución definida en I. $\triangleleft$

En lo sucesivo supondremos que todos los sistemas diferenciales que aparezcan estarán en las condiciones del teorema 9.1.2 en algún intervalo abierto I.

9.1.1 Sistemas homogéneos

Los sistemas diferenciales *homogéneos* son de la forma

$$\boldsymbol{y}' = \mathsf{A}(t)\boldsymbol{y}, \tag{9.3}$$

es decir, en un sistema homogéneo el término independiente es $\mathbf{0}$.

Lema 9.1.3 Supongamos que I es un intervalo abierto en el que el sistema (9.3) está en las condiciones del Teorema de Picard, 9.1.2, y sea $t_0 \in I$. Entonces la única solución definida en I del problema de Cauchy

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}' = \mathsf{A}(t)\boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{y}(t_0) = \mathbf{0}, \end{cases}$$

es $\boldsymbol{y}(t) = \mathbf{0}$, $\forall\, t \in I$.
Demostración:
Es inmediato ver que $\boldsymbol{y}(t) = \mathbf{0}$ es solución, y por el Teorema de Picard, 9.1.2, ésta ha de ser la única definida en I. $\triangleleft$

Teorema 9.1.4 Sea I un intervalo abierto en el cual el sistema homogéneo de tamaño m (9.3) está en las condiciones del teorema de Picard 9.1.2. Las soluciones de (9.3) (definidas en I), forman un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión m.
Demostración:

Sea $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{C}^1(I)$ el conjunto de soluciones de (9.3). Basta probar que $\mathcal{S}$ es un subespacio vectorial de dimensión m de $\mathcal{C}^1(I)$.
Veamos primero que es subespacio. Sean $\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v} \in \mathcal{S}$ y $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$. Tenemos que

$$\boldsymbol{u}' = A(t)\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v}' = A(t)\boldsymbol{v}.$$

Ahora

$$\begin{aligned}
&(\alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{v})' = \\
&\qquad\qquad \text{(por las propiedades de la derivada)} \\
&= \alpha\boldsymbol{u}' + \beta\boldsymbol{v}' = \\
&\qquad\qquad \text{(por ser } \boldsymbol{u} \text{ y } \boldsymbol{v} \text{ soluciones)} \\
&= \alpha\mathsf{A}(t)\boldsymbol{u} + \beta\mathsf{A}(t)\boldsymbol{v} = \\
&\qquad\qquad \text{(por las propiedades de las operaciones matriciales)} \\
&= \mathsf{A}(t)(\alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{v}),
\end{aligned}$$

luego $(\alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{v}) \in \mathcal{S}$ y por tanto $\mathcal{S}$ es subespacio.
Veamos ahora que $\mathcal{S}$ es de dimensión m. Sea $t_0 \in I$. Definimos la siguiente aplicación

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\Delta}_{t_0} : \mathcal{S} &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\
\boldsymbol{u} &\longmapsto \boldsymbol{u}(t_0)
\end{aligned}$$

Si comprobamos que es un isomorfismo de espacios vectoriales, habremos acabado. Para ello necesitamos ver que es lineal y biyectiva. Veamos primero que es lineal. Sean $\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v} \in \mathcal{S}$ y $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$.

$$\boldsymbol{\Delta}_{t_0}(\alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{v}) = (\alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{v})(t_0) = \alpha\boldsymbol{u}(t_0) + \beta\boldsymbol{v}(t_0) = \alpha\boldsymbol{\Delta}_{t_0}(\boldsymbol{u}) + \beta\boldsymbol{\Delta}_{t_0}(\boldsymbol{v}),$$

luego $\boldsymbol{\Delta}_{t_0}$ es lineal.
Veamos que es sobreyectiva. Sea $\boldsymbol{y}_0 \in \mathbb{R}^m$. Por el teorema de Picard, 9.1.2, el problema de Cauchy

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}' = \mathsf{A}(t)\boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{y}(t_0) = \boldsymbol{y}_0, \end{cases}$$

tiene una única solución $\boldsymbol{u}$. Pero

$$\boldsymbol{\Delta}_{t_0}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u}(t_0) = \boldsymbol{y}_0,$$

y en consecuencia $\boldsymbol{\Delta}_{t_0}$ es sobreyectiva.
Nos queda ver que es inyectiva, para lo cual basta probar que el núcleo se reduce al cero. Recordemos que el cero de $\mathcal{S}$ es la aplicación

$$\begin{aligned}
\mathbf{0} : I &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\
t &\longmapsto \mathbf{0}
\end{aligned}\ .$$

Tomemos $\boldsymbol{u} \in \operatorname{Ker} \boldsymbol{\Delta}_{t_0}$. Se tiene que

$$\mathbf{0} = \boldsymbol{\Delta}_{t_0}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u}(t_0),$$

por lo que $\boldsymbol{u}$ debe ser solución del problema de Cauchy

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}' = \mathsf{A}(t)\boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{y}(t_0) = \mathbf{0}. \end{cases}$$

Pero por el Lema 9.1.3, $\boldsymbol{u}$ debe ser la función cero, con lo cual concluye la demostración. $\triangleleft$

Definición 9.1.5 Llamaremos *sistema fundamental* de soluciones de (9.3) a toda base del espacio de soluciones de (9.3). $\triangleleft$

Nota 9.1.6 Dado un sistema

$$[\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m]$$

de soluciones de (9.3), de la demostración del teorema 9.1.4 se sigue que

$$[\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m]$$

es un sistema fundamental de soluciones de (9.3) si y sólo si existe $t_0 \in I$ tal que

$$[\boldsymbol{u}_1(t_0), \ldots, \boldsymbol{u}_m(t_0)]$$

es una base de $\mathbb{R}^m$. $\triangleleft$

Definición 9.1.7 Una *matriz fundamental* de (9.3) es una matriz $\Phi(t)$ cuadrada $m \times m$ de funciones definidas en I tal que sus columnas son un sistema fundamental de soluciones de (9.3).
Diremos además que es *principal* en un punto $t_0 \in I$ si $\Phi(t_0)$ es la matriz identidad de orden m, I_m. $\triangleleft$

Proposición 9.1.8 Son equivalentes

- **(i)** $\Phi(t)$ es una matriz fundamental de (9.3).
- **(ii)** $\Phi'(t) = \mathsf{A}(t)\Phi(t)$ y $\det \Phi(t) \neq 0$, $\forall\, t \in I$.
- **(iii)** $\Phi'(t) = \mathsf{A}(t)\Phi(t)$ y $\det \Phi(t_0) \neq 0$, $\exists\, t_0 \in I$.

$\triangleleft$

Propiedades 9.1.9 Sea $\Phi(t)$ una matriz fundamental de (9.3).

1) El conjunto de todas las matrices fundamentales de (9.3) es

$$\{\Phi(t)\mathsf{C} \,/\, \mathsf{C} \text{ es una matriz real } m \times m \text{ inversible}\}.$$

2) Sea $t_0 \in I$. $\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)$ es la matriz fundamental de (9.3) principal en t_0.

3) Sean $t_0 \in I$, $\boldsymbol{y}_0 \in \mathbb{R}^m$. La solución del problema de Cauchy

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}' = \mathsf{A}(t)\boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{y}(t_0) = \boldsymbol{y}_0, \end{cases}$$

es

$$\boxed{y(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\boldsymbol{y}_0}.$$

4) La solución general de (9.3) es

$$\boxed{\boldsymbol{y}(t) = \Phi(t)\boldsymbol{c},\ \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^m}.$$

◁

9.1.2 Sistemas no homogéneos

Sea I un intervalo abierto y consideremos un sistema diferencial lineal de tamaño m en las condiciones del Teorema de Picard, 9.1.2 en I

$$\boldsymbol{y}' = \mathsf{A}(t)\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}(t). \tag{9.4}$$

Supondremos además que $\boldsymbol{b}(t) \neq \boldsymbol{0}$, en cuyo caso se dice que el sistema es *no homogéneo*.
Al sistema

$$\boldsymbol{y}' = \mathsf{A}(t)\boldsymbol{y}, \tag{9.5}$$

se le llama sistema homogéneo *asociado* a (9.4). Es claro que (9.5) también está en las condiciones del Teorema de Picard en I.

Teorema 9.1.10 Si $\boldsymbol{y}_p(t)$ es una solución particular de (9.4) y $\Phi(t)$ es una matriz fundamental del sistema homogéneo asociado (9.5), entonces la solución general de (9.4) es

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{y}_p(t) + \Phi(t)\boldsymbol{c},\ \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^m.$$

◁

Por lo tanto, para resolver el sistema no homogéneo (9.4) basta encontrar una matriz fundamental $\Phi(t)$ del homogéneo (9.5) y una solución particular de (9.4). Veremos a continuación como la propia matriz fundamental $\Phi(t)$ nos permitirá encontrar dicha solución particular.

Para ello, desarrollaremos el llamado *método de variación de las constantes*. Se trata se buscar una solución de (9.4) que sea de la forma

$$\boldsymbol{y}_p(t) = \Phi(t)\boldsymbol{c}(t),$$

es decir, convertimos en funciones la parte que era constante en la solución de (9.5). Además fijaremos $t_0 \in I$ e intentaremos que la solución buscada verifique $\boldsymbol{y}_p(t_0) = \boldsymbol{0}$, es decir, buscamos resolver el problema de Cauchy

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}' = \mathsf{A}(t)\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}(t) \\ \boldsymbol{y}(t_0) = \boldsymbol{0}. \end{cases} \tag{9.6}$$

Imponiendo que nuestra $\boldsymbol{y}_p(t)$ sea solución de (9.4), tendremos

$$(\Phi(t)\boldsymbol{c}(t))' = \Phi'(t)\boldsymbol{c}(t) + \Phi(t)\boldsymbol{c}'(t) = \mathsf{A}(t)\Phi(t)\boldsymbol{c}(t) + \boldsymbol{b}(t).$$

Como $\Phi(t)$ es inversible $\forall\, t \in I$, podemos despejar $\boldsymbol{c}'(t)$,

$$\boldsymbol{c}'(t) = \Phi^{-1}(t)\left((\mathsf{A}(t)\Phi(t) - \Phi'(t))\,\boldsymbol{c}(t) + \boldsymbol{b}(t)\right) = \Phi^{-1}(t)\boldsymbol{b}(t),$$

y por lo tanto, $\boldsymbol{c}(t)$ se puede obtener integrando. Ajustando la constante de integración para que se verifique la condición inicial del problema de Cauchy (9.6)

$$\boldsymbol{c}(t) = \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)\boldsymbol{b}(s)\,\mathrm{d}s,$$

y la solución particular adopta la forma

$$\boldsymbol{y}_p(t) = \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)\boldsymbol{b}(s)\,\mathrm{d}s, \tag{9.7}$$

por lo que la solución general de (9.4) es

$$\boxed{\boldsymbol{y}(t) = \Phi(t)\boldsymbol{c} + \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)\boldsymbol{b}(s)\,\mathrm{d}s,\ \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^m.} \tag{9.8}$$

Como consecuencia, la solución del problema de Cauchy

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}' = \mathsf{A}(t)\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}(t) \\ \boldsymbol{y}(t_0) = \boldsymbol{y}_0, \end{cases}$$

adoptará la forma

$$\boxed{\boldsymbol{y}(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\boldsymbol{y}_0 + \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)\boldsymbol{b}(s)\,\mathrm{d}s.} \tag{9.9}$$

Proposición 9.1.11 [Principio de superposición de soluciones]
Si $\boldsymbol{y}_j(t)$ es solución de $\boldsymbol{y}' = \mathsf{A}(t)\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}_j(t)$, $j = 1, \ldots, k$, entonces

$$\sum_{j=1}^{k} \boldsymbol{y}_j(t),$$

es solución de

$$\boldsymbol{y}' = \mathsf{A}(t)\boldsymbol{y} + \sum_{j=1}^{k} \boldsymbol{b}_j(t).$$

◁

9.1.3 Resolución de sistemas con coeficientes constantes

Supondremos ahora que la matriz del sistema es constante, es decir, una matriz de números reales. En este caso proporcionaremos un método efectivo de resolución. Basta con saber calcular una matriz fundamental para un sistema homogéneo de coeficientes constantes. Dicha matriz fundamental resuelve el sistema homogéneo (ver las propiedades 9.1.9) y también permite resolver cualquier sistema no homogéneo con la misma matriz asociada en virtud de la fórmula (9.8) que nos proporciona el método de variación de las constantes.

Sea por tanto un sistema

$$\boldsymbol{y}' = \mathsf{A}\boldsymbol{y}, \tag{9.10}$$

donde A es una matriz de números reales.

Ejemplo 9.1.12 El sistema

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -4 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},$$

es un sistema diferencial lineal homogéneo de coeficientes constantes, pues su matriz es una matriz de números reales. ◁

Observemos que cualquier problema de Cauchy que tenga como EDO a (9.10) tiene solución única definida en todo $\mathbb{R}$, ya que para $I = \mathbb{R}$ el sistema está en las condiciones del teorema de Picard 9.1.2.

Para resolver el sistema (9.10) debemos introducir la noción de exponencial de una matriz. Ésta nos permitirá obtener directamente un sistema fundamental de soluciones.

9.1.3.1 La exponencial de una matriz

Definición 9.1.13 Sea $\mathsf{A}(t)$ una matriz $m \times m$ de funciones la *exponencial* de $A(t)$ es la matriz

$$e^{\mathsf{A}(t)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(\mathsf{A}(t))^k \tag{9.11}$$

◁

No estudiaremos con detalle bajo que condiciones la exponencial de una matriz está bien definida. Admitiremos que si A es de coeficientes constantes, entonces para cada $t \in \mathbb{R}$ la exponencial de $t\mathsf{A}$ está bien definida. La fórmula (9.11) queda en este caso

$$e^{t\mathsf{A}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}\mathsf{A}^k. \tag{9.12}$$

Esta fórmula (9.12) no se puede utilizar directamente para calcular la exponencial. Proporcionaremos un sencillo algoritmo, que no justificaremos, para realizar dicho cálculo.

Algoritmo 9.1.14 [Cálculo de la exponencial de $t\mathsf{A}$]
Sea A una matriz de números reales $m \times m$. Para calcular $e^{t\mathsf{A}}$, ejecutaremos el siguiente procedimiento.

1) Calcular las raíces de $P_{\mathsf{A}}(x)$ (polinomio característico de A)

$$\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{C}$$

con sus multiplicidades respectivas

$$r_1, \ldots, r_k \in \mathbb{N}.$$

2) Considerar la función auxiliar dependiente del parámetro t

$$f(x) = e^{tx}.$$

3) Calcular por coeficientes indeterminados el polinomio de grado $m-1$

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{m-1}x^{m-1},$$

que verifica las m condiciones siguientes

$$p^{(j)}(\lambda_h) = f^{(j)}(\lambda_h),\ h = 1, \ldots, k,\ j = 0, \ldots, r_h - 1.$$

Dicho polinomio siempre existe y es único. Sus coeficientes son solución de un sistema de m ecuaciones lineales con m incógnitas que siempre va a ser compatible y determinado para cada t.

4) Se tiene finalmente que
$$e^{t\mathsf{A}} = p(\mathsf{A}).$$

◁

Ejemplo 9.1.15 Consideremos la matriz del sistema del Ejemplo 9.1.12
$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -4 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Apliquemos el Algoritmo 9.1.14.

1) Calculemos las raíces del polinomio característico con sus multiplicidades.
$$P_{\mathsf{A}}(x) = \begin{vmatrix} 1-x & 0 & -2 \\ 1 & -1-x & -4 \\ -1 & 0 & -x \end{vmatrix} = -(1+x)\begin{vmatrix} 1-x & -2 \\ -1 & -x \end{vmatrix} = -(x+1)^2(x-2),$$
cuyas raíces son -1, 2 con multiplicidades respectivas 2, 1.

2) Sea
$$f(x) = e^{tx}.$$
Tendremos que
$$f'(x) = te^{tx}.$$

3) Construimos
$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2,$$
de donde
$$p'(x) = a_1 + 2a_2 x.$$
Imponemos las condiciones
$$\begin{aligned} &p(-1) = f(-1) \\ &p'(-1) = f'(-1) \\ &p(2) = f(2), \end{aligned}$$
que dan lugar al sistema
$$\left\{\begin{array}{ccccccc} a_0 & - & a_1 & + & a_2 & = & e^{-t} \\ & & a_1 & - & 2a_2 & = & te^{-t} \\ a_0 & + & 2a_1 & + & 4a_2 & = & e^{2t} \end{array}\right. .$$

Construimos su matriz ampliada y resolvemos

$$\left(\begin{array}{rrr|l} 1 & -1 & 1 & e^{-t} \\ 0 & 1 & -2 & te^{-t} \\ 1 & 2 & 4 & e^{2t} \end{array}\right) \xrightarrow{f_{31}^{-1}} \left(\begin{array}{rrr|l} 1 & -1 & 1 & e^{-t} \\ 0 & 1 & -2 & te^{-t} \\ 0 & 3 & 3 & e^{2t}-e^{-t} \end{array}\right) \xrightarrow{f_{32}^{-3}}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|l} 1 & -1 & 1 & e^{-t} \\ 0 & 1 & -2 & te^{-t} \\ 0 & 0 & 9 & e^{2t}-e^{-t}-3te^{-t} \end{array}\right) \xrightarrow{f_{3}^{1/9}} \left(\begin{array}{rrr|l} 1 & -1 & 1 & e^{-t} \\ 0 & 1 & -2 & te^{-t} \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{e^{-t}}{9}(e^{3t}-1-3t) \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{f_{23}^{2}f_{13}^{-1}} \left(\begin{array}{rrr|l} 1 & -1 & 0 & \dfrac{e^{-t}}{9}(-e^{3t}+10+3t) \\ 0 & 1 & 0 & \dfrac{e^{-t}}{9}(2e^{3t}-2+3t) \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{e^{-t}}{9}(e^{3t}-1-3t) \end{array}\right) \xrightarrow{f_{12}^{1}}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|l} 1 & 0 & 0 & \dfrac{e^{-t}}{9}(e^{3t}+8+6t) \\ 0 & 1 & 0 & \dfrac{e^{-t}}{9}(2e^{3t}-2+3t) \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{e^{-t}}{9}(e^{3t}-1-3t) \end{array}\right)$$

Así los coeficientes de $p(x)$ son

$$a_0 = \frac{e^{-t}}{9}(e^{3t}+8+6t),\ a_1 = \frac{e^{-t}}{9}(2e^{3t}-2+3t),\ a_2 = \frac{e^{-t}}{9}(e^{3t}-1-3t),$$

y por tanto

$$p(x) = \frac{e^{-t}}{9}(e^{3t}+8+6t+(2e^{3t}-2+3t)x+(e^{3t}-1-3t)x^2).$$

4) Para evaluar $p(x)$ en A necesitamos calcular

$$\mathsf{A}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -4 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -4 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Tenemos finalmente

$$e^{tA} = p(A) = \frac{e^{-t}}{9}\left((e^{3t}+8+6t)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} + \right.$$

$$\left.(2e^{3t}-2+3t)\begin{pmatrix}1&0&-2\\1&-1&-4\\-1&0&0\end{pmatrix} + (e^{3t}-1-3t)\begin{pmatrix}3&0&-2\\4&1&2\\-1&0&2\end{pmatrix}\right) =$$

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2e^{2t}+e^{-t} & 0 & -2e^{2t}+2e^{-t}\\ 2e^{2t}-2e^{-t}-3te^{-t} & 3e^{-t} & -2e^{2t}+2e^{-t}-6te^{-t}\\ -e^{2t}+e^{-t} & 0 & e^{2t}+2e^{-t}\end{pmatrix}.$$

◁

Ejemplo 9.1.16 Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix}1&2\\-2&1\end{pmatrix}.$$

Calculemos e^{tA}. Tenemos que

$$P_A(x) = x^2 - 2x + 5,$$

cuyas raíces son $1+2i$, $1-2i$, ambas con multiplicidad 1. Consideramos la función auxiliar

$$f(x) = e^{tx},$$

y el polinomio

$$p(x) = a_0 + a_1 x.$$

Imponemos las condiciones

$$\begin{aligned} p(1+2i) &= f(1+2i)\\ p(1-2i) &= f(1-2i), \end{aligned}$$

que nos proporciona el sistema de ecuaciones lineales para obtener a_0, a_1 que tiene por matriz ampliada

$$\left(\begin{array}{cc|c}1 & 1+2i & e^{(1+2i)t}\\ 1 & 1-2i & e^{(1-2i)t}\end{array}\right),$$

cuyas soluciones son

$$\begin{aligned} a_0 &= e^t(\cos 2t - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t)\\ a_1 &= \frac{1}{2}e^t \operatorname{sen} 2t. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$p(x) = e^t(\cos 2t - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t + \frac{x}{2}e^t \operatorname{sen} 2t),$$

de donde

$$e^{t\mathsf{A}} = p(\mathsf{A}) = e^t \begin{pmatrix} \cos 2t & \operatorname{sen} 2t \\ -\operatorname{sen} 2t & \cos 2t \end{pmatrix}.$$

◁

Ejemplo 9.1.17 Sea

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calculemos $e^{t\mathsf{A}}$. El polinomio característico de A es

$$P_{\mathsf{A}}(x) = (1-x)^2(3-x)^2,$$

por lo que sus raíces son 1 y 3 ambas con multiplicidad 2. Sea

$$f(x) = e^{tx},\ f'(x) = te^{tx}.$$

Necesitamos

$$\begin{aligned} p(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \\ p'(x) &= a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 \end{aligned}$$

Imponemos las condiciones

$$\begin{aligned} p(1) &= f(1) \\ p'(1) &= f'(1) \\ p(2) &= f(2) \\ p'(2) &= f'(2), \end{aligned}$$

lo que nos lleva al sistema para calcular los coeficientes de $p(x)$ dado por la matriz ampliada

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & e^t \\ 0 & 1 & 2 & 3 & te^t \\ 1 & 3 & 9 & 27 & e^{3t} \\ 0 & 1 & 6 & 27 & te^{3t} \end{array}\right),$$

y resolviendo y evaluando el polinomio en A, obtenemos

$$e^{t\mathsf{A}} = p(\mathsf{A}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{3t}+e^t & -e^{3t}+e^t & 0 & 0 \\ -e^{3t}+e^t & e^{3t}+e^t & 0 & 0 \\ 2te^t & 2te^t & e^{3t}+e^t & e^{3t}-e^t \\ -2te^t & -2te^t & e^{3t}-e^t & e^{3t}+e^t \end{pmatrix}.$$

◁

Propiedades 9.1.18 Sean $m \in \mathbb{N}$, A, B matrices de números reales $m \times m$ y $\lambda \in \mathbb{R}$.

1) $\left|\left|e^{\mathsf{A}}\right|\right| \leq e^{||\mathsf{A}||}$.

2) $e^{0_{m\times m}} = \mathrm{I}_m$.

3) $e^{\lambda \mathrm{I}_m} = e^{\lambda}\mathrm{I}_m$.

4) Si $\mathsf{AB} = \mathsf{BA}$, entonces $e^{\mathsf{A}+\mathsf{B}} = e^{\mathsf{A}}e^{\mathsf{B}}$, y por lo tanto $e^{\mathsf{A}}e^{\mathsf{B}} = e^{\mathsf{B}}e^{\mathsf{A}}$.

5) e^{A} es inversible y $(e^{\mathsf{A}})^{-1} = e^{-\mathsf{A}}$.

6) Si P es una matriz $m \times m$ inversible y $\mathsf{A} = \mathsf{P}^{-1}\mathsf{B}\mathsf{P}$, entonces $e^{\mathsf{A}} = \mathsf{P}^{-1}e^{\mathsf{B}}\mathsf{P}$.

7) Si $\mathsf{C}(t)$ es una matriz $m \times m$ de funciones de clase $\mathcal{C}^1$, tal que

$$\mathsf{C}(t)\mathsf{C}'(t) = \mathsf{C}'(t)\mathsf{C}(t),$$

entonces

$$\left(e^{\mathsf{C}(t)}\right)' = \mathsf{C}'(t)e^{\mathsf{C}(t)}.$$

$\triangleleft$

Las Propiedades 9.1.18 tienen la consecuencia siguiente

Teorema 9.1.19 Si A es una matriz $m \times m$ de números reales y $t_0 \in \mathbb{R}$, entonces la matriz

$$e^{(t-t_0)\mathsf{A}},$$

es la matriz fundamental principal en t_0 del sistema

$$\boldsymbol{y}' = \mathsf{A}\boldsymbol{y}.$$

$\triangleleft$

La solución general de

$$\boldsymbol{y}' = \mathsf{A}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}(t),$$

es

$$\boxed{\boldsymbol{y}(t) = e^{t\mathsf{A}}\boldsymbol{c} + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)\mathsf{A}}\boldsymbol{b}(s)\,\mathrm{d}s,\ \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n,} \tag{9.13}$$

donde $t_0 \in I$.

La solución del problema de Cauchy es

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}' = \mathrm{A}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}(t) \\ \boldsymbol{y}(t_0) = \boldsymbol{y}_0. \end{cases}$$

será

$$\boxed{\boldsymbol{y}(t) = e^{(t-t_0)\mathrm{A}}\boldsymbol{y}_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)\mathrm{A}}\boldsymbol{b}(s)\,\mathrm{d}s.} \tag{9.14}$$

Apliquemos estos resultados a la resolución de algunos problemas de sistemas diferenciales lineales de coeficientes constantes

Ejemplo 9.1.20 Encontrar la solución general del sistema

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -4 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},$$

Utilizando la exponencial que calculamos en el Ejemplo 9.1.15 y la fórmula (9.13), la solución general es

$$y(t) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2e^{2t} + e^{-t} & 0 & -2e^{2t} + 2e^{-t} \\ 2e^{2t} - 2e^{-t} - 3te^{-t} & 3e^{-t} & -2e^{2t} + 2e^{-t} - 6te^{-t} \\ -e^{2t} + e^{-t} & 0 & e^{2t} + 2e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}, \; c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

◁

Ejemplo 9.1.21 Resolver el problema de Cauchy

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} + \begin{pmatrix} \cos 2t \\ -\operatorname{sen} 2t \end{pmatrix} \\ \boldsymbol{y}(0) = (1, 0)\,. \end{cases}$$

La exponencial obtenida en el Ejemplo 9.1.16 es la matriz fundamental principal en 0 del sistema homogéneo asociado. Aplicando (9.14), las solución buscada es

$$\begin{aligned} y(t) &= e^t \begin{pmatrix} \cos 2t & \operatorname{sen} 2t \\ -\operatorname{sen} 2t & \cos 2t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\quad + \int_0^t e^{t-s} \begin{pmatrix} \cos 2(t-s) & \operatorname{sen} 2(t-s) \\ -\operatorname{sen} 2(t-s) & \cos 2(t-s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 2s \\ -\operatorname{sen} 2s \end{pmatrix} \mathrm{d}s \\ &= e^t \begin{pmatrix} \cos 2t \\ -\operatorname{sen} 2t \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} e^{t-s}(\cos 2(t-s)\cos 2s - \operatorname{sen} 2(t-s)\operatorname{sen} 2s) \\ -e^{t-s}(\operatorname{sen} 2(t-s)\cos 2s + \cos 2(t-s)\operatorname{sen} 2s) \end{pmatrix} \mathrm{d}s \\ &= e^t \begin{pmatrix} \cos 2t \\ -\operatorname{sen} 2t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (e^t - 1)\cos 2t \\ (1 - e^t)\operatorname{sen} 2t \end{pmatrix} = (2e^t - 1) \begin{pmatrix} \cos 2t \\ -\operatorname{sen} 2t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

◁

Ejemplo 9.1.22 Calcular la solución general de

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \boldsymbol{y}.$$

Utilizando la exponencial calculada en 9.1.17, la solución es

$$\boldsymbol{y}(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{3t}+e^t & -e^{3t}+e^t & 0 & 0 \\ -e^{3t}+e^t & e^{3t}+e^t & 0 & 0 \\ 2te^t & 2te^t & e^{3t}+e^t & e^{3t}-e^t \\ -2te^t & -2te^t & e^{3t}-e^t & e^{3t}+e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix}, \; c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}.$$

$\triangleleft$

9.2 La ecuación lineal de orden n

Sea $n \in \mathbb{N}$, $I \in \mathbb{R}$ un intervalo abierto y

$$a_1, \ldots, a_n, b : I \longrightarrow \mathbb{R} \;,$$

continuas en I. Escribiremos una *ecuación lineal* de orden n como

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(t)y' + a_n(t)y = b(t). \tag{9.15}$$

La función $b(t)$ recibe el nombre de *término independiente*.
Un problema de Cauchy será de la forma

$$\begin{cases} y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(t)y' + a_n(t)y = b(t). \\ \\ y(t_0) = \alpha_0, \; y'(t_0) = \alpha_1, \ldots, \; y^{(n-1)}(t_0) = \alpha_{n-1} \end{cases}, \tag{9.16}$$

con $t_0 \in I$, $\alpha_0, \ldots \alpha_{n-1} \in \mathbb{R}$.
La ecuación lineal homogénea *asociada* a (9.15) es

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(t)y' + a_n(t)y = 0. \tag{9.17}$$

Utilizando los resultados de § 7.2.5, podemos construir el sistema diferencial lineal de tamaño n *asociado* a (9.15)

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -a_n(t) & -a_{n-1}(t) & -a_{n-2}(t) & \ldots & -a_1(t) \end{pmatrix} \boldsymbol{y} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}, \tag{9.18}$$

con $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n)$.

Proposición 9.2.1 Son equivalentes:

(i) $\boldsymbol{y}(t) = (y_1(t), \ldots, y_n(t))$ es solución de (9.18).

(ii) $y_1(t)$ es solución de (9.15) y

$$\boldsymbol{y}(t) = \left(y_1(t), y_1'(t), \ldots, y_1^{(n-1)}(t)\right).$$

◁

Para la ecuación homogénea (9.17), el sistema asociado sería

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -a_n(t) & -a_{n-1}(t) & -a_{n-2}(t) & \ldots & -a_1(t) \end{pmatrix} \boldsymbol{y}, \tag{9.19}$$

que es un sistema homogéneo. También tenemos

Proposición 9.2.2 Son equivalentes:

(i) $\boldsymbol{y}(t) = (y_1(t), \ldots, y_n(t))$ es solución de (9.19).

(ii) $y_1(t)$ es solución de (9.17) y

$$\boldsymbol{y}(t) = \left(y_1(t), y_1'(t), \ldots, y_1^{(n-1)}(t)\right).$$

◁

El problema de Cauchy (9.16) también tiene se traduce a un problema de Cauchy para sistemas

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -a_n(t) & -a_{n-1}(t) & -a_{n-2}(t) & \ldots & -a_1(t) \end{pmatrix} \boldsymbol{y} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}, \\ y_1(t_0) = \alpha_0,\ y_2(t_0) = \alpha_1, \ldots,\ y_n(t_0) = \alpha_{n-1} \end{cases}, \tag{9.20}$$

y por supuesto se tiene que

Proposición 9.2.3 Son equivalentes:

(i) $\boldsymbol{y}(t) = (y_1(t), \ldots, y_n(t))$ es solución de (9.20).

(ii) $y_1(t)$ es solución de (9.16) y

$$\boldsymbol{y}(t) = \left(y_1(t), y_1'(t), \ldots, y_1^{(n-1)}(t)\right).$$

◁

Todo lo anterior tiene unas consecuencias que detallaremos a continuación

Propiedades 9.2.4

1) El problema de Cauchy (9.16) tiene solución única en I. Esta es la versión del Teorema de Picard para ecuaciones lineales.

2) Las soluciones de la ecuación homogénea (9.17) forman un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión n. Llamaremos sistema fundamental de soluciones de (9.17) a toda base del espacio de soluciones de (9.17).

3) Todo sistema fundamental de soluciones de (9.17) forma la primera fila de alguna matriz fundamental de (9.19)

4) Más concretamente, para $[u_1, \ldots, u_n][t]$ soluciones de (9.17) las siguientes condiciones son equivalentes

(i) $[u_1(t), \ldots, u_n(t)]$ es un sistema fundamental de soluciones de (9.17).

(ii) La matriz wronskiana

$$\begin{pmatrix} u_1(t) & u_2(t) & \cdots & u_n(t) \\ u_1'(t) & u_2'(t) & \cdots & u_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_1^{(n-1)}(t) & u_2^{(n-1)}(t) & \cdots & u_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

es un sistema fundamental de soluciones de (9.19).

(iii) El wronskiano

$$\begin{vmatrix} u_1(t) & u_2(t) & \cdots & u_n(t) \\ u_1'(t) & u_2'(t) & \cdots & u_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_1^{(n-1)}(t) & u_2^{(n-1)}(t) & \cdots & u_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix} \neq 0, \ \forall\, t \in I.$$

(iv) El wronskiano

$$\begin{vmatrix} u_1(t_0) & u_2(t_0) & \cdots & u_n(t_0) \\ u_1'(t_0) & u_2'(t_0) & \cdots & u_n'(t_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_1^{(n-1)}(t_0) & u_2^{(n-1)}(t_0) & \cdots & u_n^{(n-1)}(t_0) \end{vmatrix} \neq 0, \ \exists\, t_0 \in I.$$

5) La solución general de (9.15) se obtiene sumando una solución particular de (9.15) a la solución general de (9.17).

6) Se puede obtener una solución particular mediante el *método de variación de las constantes*, que adaptado a la ecuación (9.15) consiste en

6.1) Obtener un sistema fundamental de soluciones de (9.17)

$$[u_1, \ldots, u_n][t].$$

6.2) Encontrar las funciones $\boldsymbol{c}(t) = (c_1, \ldots, c_n)\,[t]$ que proporciona el método de variación de las constantes para sistemas visto en § 9.1.2 para el sistema (9.18) y para la matriz fundamental

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) & u_2(t) & \cdots & u_n(t) \\ u_1'(t) & u_2'(t) & \cdots & u_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_1^{(n-1)}(t) & u_2^{(n-1)}(t) & \cdots & u_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}.$$

6.3) La solución particular buscada es

$$u(t) = c_1(t)u_1(t) + \cdots + c_n(t)u_n(t).$$

$\triangleleft$

Proposición 9.2.5 [Principio de superposición de soluciones] Sean $k \in \mathbb{N}$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ y $b_1(t), \ldots, b_k(t)$ funciones continuas en el intervalo I. Si para cada $j = 1, \ldots, k$, $u_j(t)$ es una solución de

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(t)y' + a_n(t)y = b_j(t),$$

entonces

$$u(t) = \lambda_1 u_1(t) + \cdots + \lambda_k u_k(t),$$

es solución de

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(t)y' + a_n(t)y = \lambda_1 b_1(t) + \cdots + \lambda_k b_k(t).$$

$\triangleleft$

9.2.1 Coeficientes constantes

Cuando las funciones $a_1(t), \dots, a_n(t)$ son constantes, se dice que la ecuación lineal de orden n es de coeficientes constantes. En este caso, la ecuación adopta la forma

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = b(t), \tag{9.21}$$

con $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ y $b(t)$ continua en un intervalo abierto I.
La ecuación homogénea asociada, es ahora

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0. \tag{9.22}$$

Obsérvese que en el caso homogéneo, el intervalo donde hay existencia y unicidad para las soluciones es todo $\mathbb{R}$.

9.2.1.1 Resolución de la ecuación homogénea

Como el sistema diferencial lineal asociado a una ecuación lineal de orden n es también de coeficientes constantes, por lo expuesto anteriormente bastaría resolver aquél para resolver la ecuación.

Ejemplo 9.2.6 Se considera

$$y'' + 4y = 0.$$

Calcularemos un sistema fundamental de soluciones resolviendo el sistema asociado

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{y}.$$

Utilizando el algoritmo para el cálculo de la exponencial, llegamos a

$$e^{t\mathsf{A}} = \begin{pmatrix} \cos 2t & \dfrac{1}{2} \operatorname{sen} 2t \\ -2 \operatorname{sen} 2t & \cos 2t \end{pmatrix},$$

por lo que su primera fila nos proporciona el sistema fundamental de soluciones para la ecuación

$$[\cos 2t, \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2t].$$

Es inmediato ver que

$$[\cos 2t, \operatorname{sen} 2t],$$

es otro sistema fundamental de soluciones. ◁

Veremos a continuación un método directo para calcular un sistema fundamental de soluciones, aunque en general no proporciona el mismo sistema fundamental que el método anterior ilustrado en el Ejemplo 9.2.6.

Algoritmo 9.2.7 Partimos de la ecuación (9.22) y obtendremos un sistema fundamental de soluciones.

1) Calcular el *polinomio característico* de (9.22), que por definición es

$$P(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n,$$

y obtener todas sus raíces

$$\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{C},$$

junto con sus multiplicidades respectivas

$$r_1, \ldots, r_k \in \mathbb{N}.$$

2) Considerar la función auxiliar

$$f(x) = e^{tx}.$$

3) Las n funciones siguientes

$$\begin{array}{l} f(\lambda_1), f'(\lambda_1), \ldots, f^{(r_1-1)}(\lambda_1) \\ \vdots \\ f(\lambda_k), f'(\lambda_k), \ldots, f^{(r_k-1)}(\lambda_k), \end{array}$$

son un sistema fundamental de soluciones de (9.22)

$\triangleleft$

Ejemplo 9.2.8

$$y''' - y'' - 5y' - 3y = 0.$$

Su polinomio característico es

$$P(x) = x^3 - x^2 - 5x - 3 = (x-3)(x+1)^2.$$

Por tanto sus raíces son 3 y -1 con multiplicidades respectivas 1 y 2. Ahora

$$f(x) = e^{tx},\ f'(x) = te^{tx},$$

de donde un sistema fundamental de soluciones es

$$[f(3), f(-1), f'(-1)] = [e^{3t}, e^{-t}, te^{-t}].$$

Si hubiéramos calculado un sistema fundamental de soluciones mediante la exponencial del sistema asociado como en el ejemplo 9.2.6, hubiéramos obtenido

$$[\frac{12t + e^{4t} + 15}{16}e^{-t}, \frac{4t + e^{4t} - 1}{8}e^{-t}, -\frac{12t - e^{4t} + 1}{16}e^{-t}],$$

que es mucho más complicado. $\triangleleft$

Ejemplo 9.2.9

$$y^{(5)} - 7y^{(4)} + 19y''' - 25y'' + 16y' - 4y = 0.$$

Su polinomio característico es

$$P(x) = x^5 - 7x^4 + 19x^3 - 25x^2 + 16x - 4 = (x-1)^3(x-2)^2.$$

Sus raíces son 1 y 2 con multiplicidades respectivas 3 y 2. Necesitamos considerar

$$f(x) = e^{tx},\ f'(x) = te^{tx},\ f''(x) = t^2 e^{tx},$$

por lo que un sistema fundamental de soluciones es

$$[f(1), f'(1), f''(1), f(2), f'(2)] = [e^t, te^t, t^2e^t, e^{2t}, te^{2t}].$$

Con la exponencial del sistema asociado tendríamos

$$\begin{aligned}
&[(2t-7)e^{2t} + 2(t^2+2t+4)e^t, (24-7t)e^{2t} - 2(3t^2+8t+12)e^t,\\
&(9t-30)e^{2t} + (\frac{13t^2}{2} + 21t + 30)e^t, (16-5t)e^{2t} - (3t^2+11t+16)e^t,\\
&(t-3)e^{2t} + (\frac{t^2}{2} + 2t + 3)e^t].
\end{aligned}$$

◁

Ejemplo 9.2.10

$$y'' + 4y = 0.$$

El polinomio característico es

$$P(x) = x^2 + 4 = (x-2i)(x+2i).$$

Sus raíces son $2i$ y $-2i$ con multiplicidad 1 las dos. Consideramos

$$f(x) = e^{tx},$$

por lo que un sistema fundamental de soluciones es

$$[f(2i), f(-2i)] = [e^{2it}, e^{-2it}] = [\cos 2t + i\operatorname{sen} 2t, \cos 2t - i\operatorname{sen} 2t].$$

Vemos que aparecen funciones complejas, lo cual no es adecuado al problema que nosotros consideramos, que es real. Si llamamos

$$v_1(t) = \cos 2t + i\operatorname{sen} 2t,\ v_2(t) = \cos 2t - i\operatorname{sen} 2t,$$

Entonces las funciones

$$u_1(t) = \frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_2$$

$$u_2(t) = \frac{1}{2i}v_1 - \frac{1}{2i}v_2,$$

también serán un sistema fundamental de soluciones, puesto que la matriz

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2i} & -\frac{1}{2i} \end{pmatrix},$$

es inversible. Pero puesto que v_1 y v_2 son conjugadas, u_1 es la parte real de v_1 y u_2 su parte imaginaria, luego son funciones reales. De este modo obtenemos un sistema fundamental de soluciones formado por funciones reales

$$[u_1, u_2] = [\cos 2t, \operatorname{sen} 2t].$$

$\triangleleft$

Lo que se ha hecho en el Ejemplo 9.2.10 es completamente general. Siempre que nos aparezca una solución compleja, aparecerá también su conjugada, con lo cual se podrán sustituir las dos por la parte real y la parte imaginaria de una de ellas, para conseguir finalmente un sistema fundamental de soluciones reales.

9.2.1.2 Resolución de la ecuación no homogénea

Para resolver un sistema homogéneo, bastaría resolver el homogéneo y luego aplicar el método de variación de las constantes al sistema diferencial asociado para calcular una solución particular del sistema no homogéneo.

Ejemplo 9.2.11 Resolveremos el problema de Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 4y = \operatorname{sen} t \\ y(0) = 1, y'(0) = 0. \end{cases}$$

1) Primero necesitamos obtener un sistema fundamental de soluciones de la ecuación homogénea asociada. Eso ya lo hicimos en el Ejemplo 9.2.10. Tenemos así

$$[u_1, u_2] = [\cos 2t, \operatorname{sen} 2t].$$

2) Resolvemos el problema de Cauchy homogéneo asociado

$$\begin{cases} y'' + 4y = 0 \\ y(0) = 1, \ y'(0) = 0. \end{cases} \tag{9.23}$$

Buscamos una solución de la forma

$$u(t) = c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \operatorname{sen} 2t,$$

a la que imponemos las condiciones iniciales

$$\begin{aligned} u(0) = 1 &\iff c_1 \cos 0 + c_2 \operatorname{sen} 0 = 1 \iff c_1 = 1 \\ u'(0) = 0 &\iff -c_1 \operatorname{sen} 0 + c_2 \cos 0 = 0 \iff c_2 = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto $u(t) = \cos 2t$.

3) Calculamos ahora la solución de

$$\begin{cases} y'' + 4y = \operatorname{sen} t \\ y(0) = 0, \ y'(0) = 0, \end{cases}$$

por el método de variación de las constantes para el problema de Cauchy asociado,

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} + \begin{pmatrix} 0 \\ \operatorname{sen} t \end{pmatrix} \\ \boldsymbol{y}(0) = (0,0). \end{cases} \tag{9.24}$$

Una matriz fundamental para el sistema homogéneo asociado es la matriz wronskiana del sistema fundamental de soluciones de la ecuación homogénea calculado antes,

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) & u_2(t) \\ u_1'(t) & u_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2t & \operatorname{sen} 2t \\ -2 \operatorname{sen} 2t & 2\cos 2t \end{pmatrix}$$

La fórmula (9.7) que proporciona el método de variación de las constantes, nos dice que la solución de (9.24) es

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_p(t) =&\Phi(t)\int_0^t \Phi^{-1}(s)\begin{pmatrix}0\\ \operatorname{sen} s\end{pmatrix}\mathrm{d}s =\\
&\Phi(t)\int_0^t \begin{pmatrix}\cos 2s & -\dfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2s\\ \operatorname{sen} 2s & \dfrac{1}{2}\cos 2s\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ \operatorname{sen} s\end{pmatrix}\mathrm{d}s =\\
&\Phi(t)\int_0^t \begin{pmatrix}-\dfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2s\operatorname{sen} s\\ \dfrac{1}{2}\cos 2s\operatorname{sen} s\end{pmatrix}\mathrm{d}s = \Phi(t)\begin{pmatrix}\displaystyle\int_0^t -\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2s\operatorname{sen} s\,\mathrm{d}s\\ \displaystyle\int_0^t \frac{1}{2}\cos 2s\operatorname{sen} s\,\mathrm{d}s\end{pmatrix} =\\
&\begin{pmatrix}\cos 2t & \operatorname{sen} 2t\\ -2\operatorname{sen} 2t & 2\cos 2t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{3}\operatorname{sen} 3t - \operatorname{sen} t\right)\\ \dfrac{1}{4}\left(\cos t - \dfrac{1}{3}\cos 3t - \dfrac{2}{3}\right)\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

La solución $u_p(t)$ de (9.23) es la primera componente de $\boldsymbol{u}_p(t)$, por lo tanto del producto de matrices anterior, sólo calculamos la primera fila de $\Phi(t)$ por la matriz columna, resultando que

$$\begin{aligned}
u_p(t) =&\frac{1}{4}\left(\left(\frac{1}{3}\operatorname{sen} 3t - \operatorname{sen} t\right)\cos 2t + \left(\cos t - \frac{1}{3}\cos 3t - \frac{2}{3}\right)\operatorname{sen} 2t\right) =\\
&\frac{1}{3}(1-\cos t)\operatorname{sen} t.
\end{aligned}$$

La solución al problema de Cauchy inicial es

$$u_p(t) + u(t) = \frac{1}{3}(1-\cos t)\operatorname{sen} t + \cos 2t.$$

◁

No obstante, este método, aunque completamente general, suele ser bastante costoso. Afortunadamente, en ciertos casos especiales resulta más sencillo obtener una solución particular, como veremos a continuación. Utilizaremos el principio de superposición de soluciones, 9.2.5 y el resultado siguiente.

Proposición 9.2.12 Si en la ecuación (9.21), el término independiente es de la forma

$$b(t) = e^{\alpha t}(p(t)\cos\beta t + q(t)\operatorname{sen}\beta t), \tag{9.25}$$

donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $p(t), q(t)$ son polinomios en t, entonces existe una solución particular de (9.21) de la forma

$$u_p(t) = t^r e^{\alpha t}(\tilde{p}(t)\cos\beta t + \tilde{q}(t)\operatorname{sen}\beta t), \tag{9.26}$$

donde $\tilde{p}(t), \tilde{q}(t)$ son polinomios en t de grado menor o igual que el máximo de los grados de p y q y el valor $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ es la multiplicidad de $\alpha + i\beta$ como raíz del polinomio característico de (9.21). $\triangleleft$

En la práctica la solución (9.26) se busca escribiendo los polinomios $\tilde{p}$ y $\tilde{q}$ con coeficientes indeterminados e imponiendo que $u_p(t)$ sea solución de (9.21). Esto nos proporciona un sistema de ecuaciones lineales cuyas incógnitas son dichos coeficientes indeterminados.

Obsérvese que combinando la Proposición 9.2.12 con el principio de superposición de soluciones, 9.2.5, en caso de que en la ecuación (9.21) el término independiente sea una combinación lineal de términos $b_1(t), \ldots, b_k(t)$, cada uno de ellos de la forma (9.25)

$$b(t) = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j b_j(t),$$

entonces para cada $j = 1, \ldots, k$ podríamos obtener una solución particular u_{pj} de la forma (9.26) para el problema

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_n y = b_j(t),$$

en cuyo caso una solución particular del problema total sería

$$u_p(t) = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j u_{pj}(t).$$

Ejemplo 9.2.13 Calculemos la solución general de

$$\begin{aligned} y^{(4)} - 10y''' + 38y'' - 66y' + 45y = {} & 5te^t\cos 2t + 4e^t - 6t^2e^{3t} - 2te^{2t}\operatorname{sen} t + 3te^{3t} \\ & + 10t^3e^t\cos 2t + e^{2t}\cos t - 10e^t\operatorname{sen} 2t. \end{aligned}$$

Primero resolvamos el problema homogéneo asociado

$$y^{(4)} - 10y''' + 38y'' - 66y' + 45y = 0$$

El polinomio característico es

$$P(x) = x^4 - 10x^3 + 38x^2 - 66x + 45,$$

cuyas raíces son $2+i$, $2-i$ y 3 con multiplicidades 1, 1 y 2. Por tanto un sistema fundamental de soluciones es

$$[e^{3t}, te^{3t}, e^{2t}\cos t, e^{2t}\operatorname{sen} t].$$

Ahora vamos a calcular una solución particular de la ecuación no homogénea. Debemos agrupar convenientemente el término independiente

$$\begin{aligned}
b(t) &= 5te^t\cos 2t + 4e^t - 6t^2e^{3t} - 2te^{2t}\operatorname{sen} t + 3te^{3t} + 10t^3e^t\cos 2t \\
&\quad + e^{2t}\cos t - 10e^t\operatorname{sen} 2t \\
&= e^{2t}(\cos t - 2t\operatorname{sen} t) + 3e^{3t}(t-2t^2) \\
&\quad + 5e^t((t+2t^3)\cos 2t - 2\operatorname{sen} 2t) + 4e^t.
\end{aligned}$$

Sean

$$\begin{aligned}
b_1(t) &= e^{2t}(\cos t - 2t\operatorname{sen} t) \\
b_2(t) &= e^{3t}(t-2t^2) \\
b_3(t) &= e^t((t+2t^3)\cos 2t - 2\operatorname{sen} 2t) \\
b_4(t) &= e^t.
\end{aligned}$$

Cada una de estas funciones b_j es de la forma (9.25). Nuestro problema original es

$$y^{(4)} - 10y''' + 38y'' - 66y' + 45y = b_1(t) + 3b_2(t) + 5b_3(t) + 4b_4(t).$$

Por tanto calcularemos soluciones particulares para cuatro ecuaciones a cada una de las cuales podremos aplicarle 9.2.5.

1)

$$y^{(4)} - 10y''' + 38y'' - 66y' + 45y = b_1(t) = e^{2t}(\cos t - 2t\operatorname{sen} t).$$

En este caso tendremos $\alpha = 2$, $\beta = 1$, $p(t) = 1$, $q(t) = -2t$ y por tanto el grado de $\tilde{p}$ y $\tilde{q}$ deberá ser 1. Como $2+i$ es raíz del polinomio característico con multiplicidad 1, tenemos que $r = 1$. Así la solución buscada es de la forma

$$u_{p1}(t) = te^{2t}((A_0 + A_1t)\cos t + (B_0 + B_1t)\operatorname{sen} t).$$

Imponiendo que sea solución de la ecuación y agrupando, obtenemos

$$\begin{aligned}
&8A_1te^{2t}\cos t + (4A_0 - 12B_1 - 1 - 8A_1)e^{2t}\cos t + \\
&(8B_1 + 2)te^{2t}\operatorname{sen} t + (-8B_1 + 4B_0 + 12A_1)e^{2t}\operatorname{sen} t = 0,
\end{aligned}$$

lo cual impone que los coeficientes tengan que anularse y por lo tanto queda un sistema de ecuaciones lineales con matriz ampliada

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 4 & -8 & 0 \\ 4 & -8 & 0 & -12 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & -2 \end{array}\right),$$

en las variables

$$A_0,\ A_1,\ B_0,\ B_1.$$

Resolviendo

$$A_0 = -\frac{1}{2},\ A_1 = 0,\ B_0 = -\frac{1}{2},\ B_1 = -\frac{1}{4},$$

de donde

$$u_{p1}(t) = \frac{1}{4} t e^{2t}(2\cos t - (2+t)\operatorname{sen} t).$$

2)

$$y^{(4)} - 10y''' + 38y'' - 66y' + 45y = b_2(t) = e^{3t}(t - 2t^2).$$

En este caso tendremos $\alpha = 3$, $\beta = 0$, $p(t) = t - 2t^2$, $q(t) = 0$ y por tanto el grado de $\tilde{p}$ deberá ser 2. Como 3 es raíz del polinomio característico con multiplicidad 2, tenemos que $r = 2$. Así la solución buscada es de la forma

$$u_{p2}(t) = t^2 e^{3t}(A_0 + A_1 t + A_2 t^2).$$

Imponiendo que sea solución de la ecuación y agrupando, obtenemos

$$(24A_2 + 2)t^2 e^{3t} + (12A_1 + 48A_2 - 1)te^{3t} + (4A_0 + 24A_2 + 12A_1)e^{3t} = 0,$$

lo cual impone que los coeficientes tengan que anularse y por lo tanto queda un sistema de ecuaciones lineales con matriz ampliada

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 12 & 24 & 0 \\ 0 & 0 & 24 & -2 \\ 0 & 12 & 48 & 1 \end{array}\right),$$

en las variables

$$A_0,\ A_1,\ A_2.$$

Resolviendo

$$A_0 = -\frac{3}{4},\ A_1 = \frac{5}{12},\ A_2 = -\frac{1}{12},$$

de donde

$$u_{p2}(t) = \frac{1}{12} t^2 e^{3t}(-9 + 5t - t^2).$$

3)

$$y^{(4)} - 10y''' + 38y'' - 66y' + 45y = b_3(t) = e^t((t + 2t^3)\cos 2t - 2\,\mathrm{sen}\, 2t).$$

En este caso tendremos $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $p(t) = t + 2t^3$, $q(t) = -2$ y por tanto el grado de $\tilde{p}$ y $\tilde{q}$ deberá ser 3. Como $1+2i$ no es raíz del polinomio característico, tenemos que $r = 0$. Así la solución buscada es de la forma

$$u_{p3}(t) = e^t((A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + A_3 t^3)\cos 2t + (B_0 + B_1 t + B_2 t^2 + B_3 t^3)\,\mathrm{sen}\, 2t).$$

Imponiendo que sea solución de la ecuación y agrupando, obtenemos

$$\begin{aligned}
&(-32A_0 + 56A_1 - 20A_2 - 36A_3 + 16B_0 + 24B_1 - 72B_2 + 48B_3)e^t \cos 2t\\
&+ (-32A_1 + 112A_2 - 60A_3 + 16B_1 + 48B_2 - 216B_3 - 1)te^t \cos 2t\\
&+ (-32A_3 + 16B_3 - 2)t^3 e^t \cos 2t\\
&+ (-32A_2 + 168A_3 + 16B_2 + 72B_3)t^2 e^t \cos 2t\\
&+ (-16A_0 - 24A_1 + 72A_2 - 48A_3 - 32B_0 + 56B_1 - 20B_2 - 36B_3 + 2)e^t\,\mathrm{sen}\, 2t\\
&+ (-16A_1 - 48A_2 + 216A_3 - 32B_1 + 112B_2 - 60B_3)te^t\,\mathrm{sen}\, 2t)\\
&+ (-16A_3 - 32B_3)t^3 e^t\,\mathrm{sen}\, 2t\\
&+ (-16A_2 - 72A_3 - 32B_2 + 168B_3)t^2 e^t\,\mathrm{sen}\, 2t = 0,
\end{aligned}$$

lo cual impone que los coeficientes tengan que anularse y por lo tanto queda un sistema de ecuaciones lineales con matriz ampliada

$$\left(\begin{array}{rrrrrrrr|r}
0 & -32 & 112 & -60 & 0 & 16 & 48 & -216 & 1\\
0 & 0 & 0 & -32 & 0 & 0 & 0 & 16 & 2\\
0 & 0 & -32 & 168 & 0 & 0 & 16 & 72 & 0\\
0 & -16 & -48 & 216 & 0 & -32 & 112 & -60 & 0\\
0 & 0 & 0 & -16 & 0 & 0 & 0 & -32 & 0\\
0 & 0 & -16 & -72 & 0 & 0 & -32 & 168 & 0\\
-32 & 56 & -20 & -36 & 16 & 24 & -72 & 48 & 0\\
-16 & -24 & 72 & -48 & -32 & 56 & -20 & -36 & -2
\end{array}\right),$$

en las variables

$$A_0,\ A_1,\ A_2,\ A_3,\ B_0,\ B_1,\ B_2,\ B_3.$$

Resolviendo

$$A_0 = \frac{11357}{20000},\ A_1 = \frac{1337}{4000},\ A_2 = -\frac{27}{400},\ A_3 = -\frac{1}{20},$$

$$B_0 = \frac{403}{2500},\ B_1 = \frac{521}{1000},\ B_2 = \frac{111}{400},\ B_3 = \frac{1}{40},$$

de donde

$$u_{p3}(t) = \frac{1}{20000}e^t((11357 + 6685t - 1350t^2 - 1000t^3)\cos 2t + (3224 + 10420t + 5550t^2 + 500t^3)\operatorname{sen} 2t).$$

4)

$$y^{(4)} - 10y''' + 38y'' - 66y' + 45y = b_4(t)e^t.$$

En este caso tendremos $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $p(t) = 1$, $q(t) = 0$ y por tanto el grado de $\tilde{p}$ y $\tilde{q}$ deberá ser 0. Como 1 no es raíz del polinomio característico, tenemos que $r = 0$. Así la solución buscada es de la forma

$$u_{p4}(t) = e^t A_0.$$

Imponiendo que sea solución de la ecuación y agrupando, obtenemos

$$(8A_0 - 1)e^t = 0,$$

lo cual impone que los coeficientes tengan que anularse y por lo tanto queda un sistema de ecuaciones lineales con matriz ampliada

$$\left(8 \mid 1\right),$$

en la variable

$$A_0.$$

Resolviendo

$$A_0 = \frac{1}{8},$$

de donde

$$u_{p4}(t) = \frac{1}{8}e^t.$$

Por el principio de superposición de soluciones, 9.2.5, una solución particular del sistema de partida es

$$u_p(t) = u_{p1}(t) + 3u_{p2}(t) + 5u_{p3}(t) + 4u_{p4}(t).$$

y la solución general buscada es

$$\begin{aligned}
y(t) &= u_p(t) + c_1e^{3t} + c_2te^{3t} + c_3e^{2t}\cos t + c_4e^{2t}\operatorname{sen} t\\
&= u_{p1}(t) + 3u_{p2}(t) + 5u_{p3}(t) + 4u_{p4}(t) + c_1e^{3t} + c_2te^{3t} + c_3e^{2t}\cos t + c_4e^{2t}\operatorname{sen} t\\
&= \frac{1}{4}te^{2t}(2\cos t - (2+t)\operatorname{sen} t) + \frac{1}{4}t^2e^{3t}(-9+5t-t^2)\\
&+ \frac{1}{4000}e^t((11357 + 6685t - 1350t^2 - 1000t^3)\cos 2t\\
&+ (3224 + 10420t + 5550t^2 + 500t^3)\operatorname{sen} 2t) + \frac{1}{2}e^t\\
&+ c_1e^{3t} + c_2te^{3t} + c_3e^{2t}\cos t + c_4e^{2t}\operatorname{sen} t,\\
&\text{con } c_1,\ c_2,\ c_3,\ c_4 \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

$\triangleleft$

9.2.2 La ecuación de Euler

La ecuación de Euler es de la forma

$$(ct+d)^n y^{(n)} + a_1(ct+d)^{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(ct+d)y' + a_ny = b(t), \qquad (9.27)$$

con $n \in \mathbb{N}$, $a_1, \ldots, a_n, c, d \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$, y donde se supone que existe I intervalo abierto con $b : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continua.
Para $ct + d > 0$, el cambio de variable independiente $ct + d = e^x$ la convierte en una ecuación lineal de coeficientes constantes.
Para $ct + d < 0$, el cambio de variable independiente $ct + d = -e^x$ la convierte en una ecuación lineal de coeficientes constantes.

9.3 Ejercicios

Ejercicio 9.1 Calcular la exponencial de $t\mathsf{A}$, siendo A cada una de las matrices siguientes.

a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

h) $\begin{pmatrix} 5 & 132 & 72 & 0 & 59 \\ 0 & -48 & -60 & 0 & -18 \\ 0 & 27 & 20 & 0 & 12 \\ 1 & 53 & 23 & 5 & 24 \\ 0 & 88 & 110 & 0 & 33 \end{pmatrix}$

i) $\begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 9 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & -9 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -9 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 1 & -6 \end{pmatrix}$

j) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

k) $\begin{pmatrix} -4 & -20 & 0 & 13 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -8 & -4 & -6 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 0 \\ -2 & -4 & 1 & 12 & -4 \end{pmatrix}$

l) $\begin{pmatrix} -9 & 4 & -27 & 1 & 0 & 31 & -26 & -11 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & -8 & 1 & 0 & 6 & -1 & -3 \\ -6 & 4 & -8 & -2 & 0 & 12 & -4 & -6 \\ 3 & -4 & 6 & -3 & -6 & -6 & 3 & 3 \\ -3 & 2 & -13 & 1 & 0 & 11 & -12 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & -3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

Ejercicio 9.2 Resolver los problemas de Cauchy

a) $\begin{cases} \boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{y}(0) = (1,1) \end{cases}$

b) $\begin{cases} \boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{y}(0) = (0,2) \end{cases}$

c) $\begin{cases} \boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{y}(0) = (1,1) \end{cases}$

d) $\begin{cases} \boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 4 & -3 & 8 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{y}(1) = (-2,0,1) \end{cases}$

e) $\begin{cases} \boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 4 & -3 & 8 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{y}(1) = (-1,0,1) \end{cases}$

f) $\begin{cases} \boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 4 & -3 & 8 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{y}(1) = (1,4,2) \end{cases}$

Ejercicio 9.3 Sea el sistema diferencial lineal

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}(x).$$

a) Si $\boldsymbol{b}(x) = \left(e^{2x}, 0\right)$, calcular una solución particular del sistema de la forma $e^{2x}\boldsymbol{u}$, con $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2$.

b) Si $\boldsymbol{b}(x) = (e^x, 0)$, calcular una solución particular del sistema de la forma $e^x\,(a + bx, c + dx)$, con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 9.4 Sean $m \in \mathbb{N}$, A una matriz de números reales $m \times m$ tal que 0 no es valor propio de A y $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$. Probar que existe $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^m$ tal que $\boldsymbol{y}_p(t) = \boldsymbol{u}$ es una solución del sistema.

$$\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}.$$

Calcular la solución general de los sistemas

a) $\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$

b) $\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$

Ejercicio 9.5 Sea $a \in \mathbb{R}$. Resolver el problema de Cauchy

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} a+1 & -1 & 1 \\ 1 & a-1 & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \boldsymbol{y} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \boldsymbol{y}(0) = (1, 0, -1) \end{cases}$$

Ejercicio 9.6 Sean $m \in \mathbb{N}$ A una matriz de números reales $m \times m$ e $\boldsymbol{y}_{\boldsymbol{0}}(t)$ una solución de $\boldsymbol{y}' = \mathsf{A}\boldsymbol{y}$. Probar que $t\boldsymbol{y}_{\boldsymbol{0}}(t)$ es solución de $\boldsymbol{y}' = \mathsf{A}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{y}_{\boldsymbol{0}}(t)$.
Calcular la solución general del sistema

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} + \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \\ e^t \end{pmatrix}$$

Ejercicio 9.7 Calcular la solución general de

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} + \begin{pmatrix} t^2e^t \\ 2e^t \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 9.8 Calcular un sistema fundamental de soluciones para cada una de las siguientes ecuaciones

a) $y'' + \lambda y = 0$, siendo $\lambda \in \mathbb{R}$.

b) $y'' - y' - 2y = 0$.

c) $y'' - 2y' + y = 0$.

d) $y'' - 6y' + 13y = 0$.

e) $y''' - y'' + 9y' - 9y = 0$.

f) $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$.

g) $t^2y'' + ty' - 4y = 0$.

h) $x^2y'' - xy' + 2y = 0$.

i) $y'' + \dfrac{2}{1+t}y' = 0$.

Ejercicio 9.9 Comprobar que $[t, te^t]$ es un sistema fundamental de soluciones de

$$t^2y'' - t(t+2)y' + (t+2)y = 0.$$

Ejercicio 9.10 Encontrar las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden que tienen por solución general

a) $c_1e^x + c_2e^{-x},\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

b) $c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t,\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

c) $(c_1 + c_2t)e^t,\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

d) $c_1t + c_2e^{3t},\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

e) $c_1t + c_2 \operatorname{sen} t,\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

f) $c_1e^t \operatorname{sen} t + c_2e^t \cos t,\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 9.11 Resolver los problemas de Cauchy

a) $\begin{cases} y''' - y'' + 4y' - 4y = 0 \\ \\ y(0) = 1,\ y'(0) = -1,\ y''(0) = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y''' + y' = 0 \\ \\ y(\pi) = 0,\ y'(\pi) = 2,\ y''(\pi) = -1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y'' - 5y' + 6y = (12t - 7)e^{-t} \\ \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} t^2y'' - 2y = t^3e^t \\ \\ y(1) = 0,\ y'(1) = 1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} y^{(4)} + 4y''' + 5y'' + 4y' + 4y = 0 \\ \\ y(0) = 1,\ y'(0) = -1,\ y''(0) = -1,\ y'''(0) = 1 \end{cases}$

Ejercicio 9.12 Calcular la solución general de

a) $y'' + y = t \operatorname{sen} 2t - 1.$

b) $y^{(5)} + 2y''' + y' = t.$

c) $y'' - y = te^t.$

d) $y'' - 4y' + 5y = 1 + e^{2t} \operatorname{sen} t.$

e) $y'' + y = \log t - \dfrac{1}{t^2}.$

f) $x^2 y'' + 2xy' = 1.$

g) $y'' - 3y' + 2y = x(x+1)e^{3x}.$

h) $xy'' + y' = 1.$

i) $t^3 y''' + 2t^2 y'' - ty' + y = 12t^2.$

j) $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x}.$

k) $y^{(4)} - 12y''' + 46y'' - 60y' + 25y = e^{2t}.$

l) $y''' - y'' - y' + y = te^t + 2e^{-3t} + \cos t.$

Índice alfabético