Curso elemental de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

J. Miguel FARTO ÁLVAREZ

Curso 2024-2025

Índice general

License

Capítulo 1

Conceptos básicos

1.1 Introducción

En esta asignatura estudiaremos un tipo especial de ecuaciones en las que las incógnitas serán funciones reales de una única variable real. Estas ecuaciones estarán constituidas por los siguientes elementos:

1) Aparecerán obligatoriamente derivadas de las funciones incógnitas (de orden uno y/o superior).

2) Podrán aparecer las propias funciones incógnitas.

3) Podrá aparecer la variable de dichas funciones.

Llamaremos a este tipo de ecuaciones *ecuaciones diferenciales ordinarias*, abreviadamente EDO.

También estudiaremos sistemas de EDO. Siempre consideraremos sistemas con el mismo número de ecuaciones que de funciones incógnita. Por lo tanto cuando trabajemos con una sola EDO, tendremos una sola función incógnita.

Veamos algunos ejemplos sencillos que nos mostrarán cómo este tipo de ecuaciones surgen de manera natural en ciertos contextos.

Ejemplo 1.1.1 Consideremos el cálculo de primitivas. Supongamos que tenemos una función $f(t)$ y queremos calcular una primitiva suya $y(t)$. Normalmente escribimos este problema como

$$y(t) = \int f(t)\,\mathrm{d}t. \tag{1.1}$$

Utilizando la definición de primitiva, (1.1) es equivalente a

$$y'(t) = f(t). \tag{1.2}$$

La ecuación (1.2) es una EDO, donde se supone que f es conocida e y es la función incógnita.

Así, concretando un poco más, obtener las primitivas de, por ejemplo, $\operatorname{sen}^2 t$ equivale a resolver la EDO

$$y'(t) = \operatorname{sen}^2 t,$$

donde $y(t)$ sería la función incógnita y cuyas soluciones son

$$y(t) = \frac{t - \operatorname{sen} t \cos t}{2} + c,\ c \in \mathbb{R}.$$

◁

Nota 1.1.2 [Hechos fundamentales]
Por supuesto (1.2) es el tipo de EDO más simple que se puede formular, pero aun así podemos observar varios hechos fundamentales

1) Si f es continua, podemos garantizar que (1.2) tienen solución, pero en otro caso no podemos afirmar nada. Por tanto no se pueden plantear EDO arbitrariamente y esperar que tengan solución.

2) Cuando (1.2) tiene solución, ésta no es única. Es bien sabido que si una función admite primitiva, entonces admite infinitas.

3) En ocasiones se sabe que (1.2) tiene solución, pero no se puede calcular explícitamente. Recordemos que hay integrales indefinidas como

$$\int \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, \mathrm{d}t$$

que *no salen*, como se decía en Bachillerato. Por lo tanto la EDO

$$y'(t) = \frac{\operatorname{sen} t}{t}$$

no se puede resolver explícitamente, aunque se sabe que tiene soluciones.

◁

Ejemplo 1.1.3 Consideremos la EDO

$$y''(t) = \operatorname{sen}^2 t. \tag{1.3}$$

Podríamos resolver esta ecuación utilizando técnicas elementales de cálculo de primitivas. Sabemos que $y''(t) = (y')'(t)$, luego $y'(t)$ debe ser una primitiva de $\operatorname{sen}^2 t$. Por tanto

$$y'(t) = \frac{t - \operatorname{sen} t \cos t}{2} + c_1,\ c_1 \in \mathbb{R},$$

de donde
$$y(t) = \frac{1}{4}\cos^2 t + \frac{1}{4}t^2 + c_1 t + c_2, \text{ con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$
Vemos así que en una EDO pueden aparecer derivadas de orden superior de la incógnita. $\triangleleft$

Ejemplo 1.1.4 Consideremos una función derivable $y(x)$ tal que por cada punto P de su gráfica, la recta tangente a $y(x)$ en P es perpendicular al vector posición de P.

Un punto genérico del grafo de $y(x)$ es $(x, y(x))$, y este es su vector posición. Por la interpretación geométrica de la derivada, sabemos que un vector director de la recta tangente en $(x, y(x))$ es $(1, y'(x))$. Ahora

$$(x, y(x)) \perp (1, y'(x)) \Longleftrightarrow 0 = (x, y(x)) \cdot (1, y'(x)) = x + y(x)y'(x),$$

luego $y(x)$ debe verificar la EDO

$$y(x)y'(x) + x = 0. \tag{1.4}$$

Vemos en este ejemplo que un problema geométrico se transforma en un problema de EDO. $\triangleleft$

Nota 1.1.5 [Problemas geométricos]
Debido a la interpretación geométrica de la derivada, muchos problemas geométricos pueden ser descritos y estudiados mediante EDO, como en el Ejemplo 1.1.4.

Observemos que la EDO (1.4) es significativamente más complicada que las que aparecían en los Ejemplos 1.1.1 y 1.1.3. En (1.4) aparecen explícitamente una derivada de la función incógnita y la variable de la función, pero a diferencia de las EDO de los ejemplos 1.1.1 y 1.1.3, ahora también aparece la propia función incógnita. $\triangleleft$

Nota 1.1.6 [Simplificando las notaciones]
La escritura de la ecuación (1.4) comienza a ser un poco engorrosa. Es habitual, cuando se sabe o se puede deducir cuál es la variable de la que depende la función incógnita, omitir la evaluación explícita en esa variable. Así la ecuación (1.4) podría escribirse de manera más cómoda como

$$yy' + x = 0. \tag{1.5}$$

Si en un enunciado nos propusiesen la EDO (1.5) sin más explicaciones, sabríamos inmediatamente que y es la función incógnita, pues aparece en la expresión alguna derivada suya.

Deberíamos suponer además que x es la variable de la función y (por tanto la variable respecto de la cual se deriva y), ya que en caso de no serlo deberían advertirnos que era una constante o parámetro del problema.

Otra cosa bastante molesta es la nomenclatura que estamos utilizando para y y x. Referirse a y como la función incógnita y a x como la variable de la que depende y no parece muy adecuado. Se suele llamar a y la *variable dependiente* de la EDO y a x la *variable independiente.*

Al principio esto puede resultar algo confuso. Cuando trabajamos con ecuaciones del tipo que sea, solemos identificar la palabra *variable* con la palabra *incógnita*. En una EDO las incógnitas son exclusivamente las variables dependientes. La variable independiente no es una incógnita de la ecuación (no hay que *despejarla*). No es más que una variable de la cual dependen las soluciones de la EDO. $\triangleleft$

Ejemplo 1.1.7 Consideremos un móvil puntual con movimiento rectilíneo. Supongamos que su velocidad es proporcional a su desplazamiento desde el origen. Veamos cómo podemos describir dicho movimiento.

Sea t la variable que representa el tiempo. En cada instante de tiempo t, la posición del objeto queda determinada por una coordenada $x(t)$, una vez fijado el origen de la recta por la que se desplaza.

Sabemos que la derivada de la posición puede ser interpretada como la velocidad, por lo que la velocidad en el instante t será $x'(t)$. Por las condiciones que nos dan, existe un constante $\alpha \in \mathbb{R}$

$$x'(t) = \alpha x(t), \tag{1.6}$$

que es una ecuación diferencial. $\triangleleft$

Nota 1.1.8 [Más sobre notaciones]
Como antes, podemos escribir la ecuación (1.6)

$$x' = \alpha x. \tag{1.7}$$

A la vista de la ecuación, queda claro que x es la variable dependiente, pero ¿Cuál es la independiente? Si en enunciado nos presentan la ecuación (1.7) sin más información, consideraríamos que α es la variable independiente, pero entonces (1.7) sería otra ecuación que no tiene nada que ver con (1.6). Si nos presentan la ecuación (1.7) para referirse a la (1.6), nos tendrían que decir explícitamente que α es un parámetro o una constante.

Imaginemos ahora que nos proporcionan (1.7) diciéndonos además que α es un parámetro. Vemos que la variable independiente no aparece explícitamente. Salvo que nos dijesen lo contrario, podríamos usar cualquier símbolo (distinto de x y α, por supuesto) para denotar la variable independiente.

¿Qué símbolos se suelen utilizar para denotar a las variables dependientes e independientes en una EDO? No hay nada predeterminado. Por ejemplo, nosotros hemos utilizado x en el ejemplo 1.1.4 para la variable independiente pero sin embargo, en el Ejemplo 1.1.7 hemos denotado por x a la variable dependiente.

No obstante, a veces se observa cierta tendencia a utilizar x, y, z para las variables dependientes y t para la independiente, sobre todo en EDO utilizadas para modelizar fenómenos físicos en los que la variable independiente representa el tiempo. $\triangleleft$

Nota 1.1.9 [Las EDO y la Física]
La Física es una fuente inagotable de EDO útiles. Por ejemplo, a la hora de describir fenómenos en Mecánica, las derivadas representan velocidades o aceleraciones. Es muy común conocer las fuerzas que actúan sobre un sistema. Muchas leyes de la física (por ejemplo las de Newton) establecen relaciones entre fuerzas, aceleraciones y momentos (aparece la velocidad), y así el planteamiento de un sistema de EDO está servido. $\triangleleft$

Ejemplo 1.1.10 Un objeto puntual de masa 1 se mueve en un plano. Sobre él se aplica una fuerza con valor
$$-\lambda^2\frac{(x,y)}{||(x,y)||},$$
para cada punto (x,y) del plano, donde $\lambda\neq 0$ es una constante.

Si $(x(t),y(t))$ es la posición del móvil en cada instante de tiempo t, por la segunda ley de Newton se tiene que
$$(x(t),y(t))''=-\lambda^2\frac{(x,y)}{||(x,y)||},$$
e igualando componente a componente,
$$\begin{cases} x''(t)=-\lambda^2\dfrac{x(t)}{\sqrt{x(t)^2+y(t)^2}} \\ y''(t)=-\lambda^2\dfrac{y(t)}{\sqrt{x(t)^2+y(t)^2}} \end{cases},$$
que es un sistema de EDO. Escrito con nuestra notación simplificada,
$$\begin{cases} x''=-\lambda^2\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ y''=-\lambda^2\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases}. \tag{1.8}$$

$\triangleleft$

1.2 Ecuaciones diferenciales ordinarias

1.2.1 Forma general

Sean $n, m \in \mathbb{N}$,

$$\boldsymbol{y} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^m \ ,$$

y

$$\boldsymbol{F} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m(n+1)} \longrightarrow \mathbb{R}^m \ .$$

Una *Ecuación Diferencial Ordinaria* (EDO) es

$$\boldsymbol{F}(t, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}', \ldots, \boldsymbol{y}^{(n)}) = \mathbf{0}. \tag{1.9}$$

El valor n es el *orden* de la EDO (se supone que $\boldsymbol{y}^{(n)}$ aparece explícitamente en la expresión de $\boldsymbol{F}$).

- Si $m = 1$ se llama EDO *escalar*.
- Si $m > 1$ se llama EDO *vectorial* o *sistema* de EDO (con m ecuaciones y m incógnitas).

1.2.2 Tipos de EDO

1) *Ecuaciones autónomas*. Son aquellas en las que t no aparece explícitamente en la expresión de $\boldsymbol{F}$, es decir

$$\boldsymbol{F} : \mathbb{R}^{m(n+1)} \longrightarrow \mathbb{R}^m \ ,$$

y la ecuación es de la forma

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}', \ldots, \boldsymbol{y}^{(n)}) = \mathbf{0}.$$

2) *Ecuaciones en forma normal*. Son aquellas en las que la derivada de orden superior aparece despejada. Es decir, son de la forma

$$\boldsymbol{y}^{(n)} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{y}, \ldots, \boldsymbol{y}^{(m-1)}),$$

con

$$\boldsymbol{f} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{mn} \longrightarrow \mathbb{R}^m \ .$$

3) *Ecuaciones escalares lineales*. Son de la forma

$$a_0(t)y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(t)y' + a_n(t)y = b(t),$$

donde

$$a_i, b, y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \ , \ i = 0, \ldots, n$$

4) *Sistemas diferenciales lineales.* Son de la forma

$$\boldsymbol{y}' = \mathsf{A}(t)\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}(t),$$

donde

$$\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_m)\,,$$

y $\mathsf{A}(t)$ es una matriz $m \times m$

$$\mathsf{A}(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1m}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}(t) & \cdots & a_{mm}(t) \end{pmatrix},$$

siendo

$$\boldsymbol{b} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^m \ , \quad a_{ij} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \ , \ i, j = 1, \ldots, m.$$

1.2.3 Soluciones

Dada una EDO como (1.9) podemos expresar sus *soluciones* de diferentes maneras

1) La más directa es considerar que una solución de (1.9) es una función

$$\boldsymbol{\varphi} : I \longrightarrow \mathbb{R}^m \ , \tag{1.10}$$

donde I es un cierto intervalo abierto, derivable al menos hasta orden n en I y tal que se verifique

$$\boldsymbol{F}(t, \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\varphi}', \ldots, \boldsymbol{\varphi}^{(n)}) = \boldsymbol{0}.$$

Una solución expresada de esta manera se llama *solución explícita* de la EDO (1.9).

Así, una solución explícita de la ecuación (1.3) del Ejemplo 1.1.3 es la función

$$\varphi(t) = \frac{1}{4}(\cos^2 t + t^2),$$

definida en todo $\mathbb{R}$.

2) Otra manera de expresar las soluciones es en *forma implícita.* Supongamos que existe una función $\boldsymbol{G}(t, \boldsymbol{y})$ de forma que en un cierto punto $(t_0, \boldsymbol{y}_0)$ se verifiquen las condiciones del teorema de la función implícita y podamos afirmar que existe una función

$$\boldsymbol{\varphi} : I \longrightarrow \mathbb{R}^m \ ,$$

definida en un cierto intervalo abierto I tal que

$$\boldsymbol{G}(t, \boldsymbol{\varphi}(t)) = 0, \ \forall\, t \in I,$$

y de forma que $\boldsymbol{\varphi}$ sea una solución explícita de (1.3). En este caso diremos que

$$\boldsymbol{G}(t, \boldsymbol{y}) = 0,$$

es una *solución implícita* de (1.3).

Nótese que aunque no sea posible encontrar una expresión cerrada para $\boldsymbol{\varphi}$, es posible ver si es solución o no de (1.3) utilizando las fórmulas de derivación implícita o simplemente la regla de la cadena. Podemos, por ejemplo, considerar la ecuación (1.5). Es fácil ver que

$$y^2 + x^2 - 1 = 0, \tag{1.11}$$

es una solución en forma implícita de (1.5). En efecto, si consideramos que (1.11) define implícitamente a y como función de x y derivamos (1.11) respecto de x aplicando la regla de la cadena, obtenemos

$$2yy' + 2x = 0,$$

de donde

$$yy' + x = 0,$$

que es justamente la ecuación de partida (1.5). Por tanto tal función $y(x)$ definida implícitamente por (1.11) debe ser una solución explícita de (1.5), por lo que (1.11) es una solución implícita de (1.5).

3) Finalmente consideraremos soluciones expresadas en *forma paramétrica*. Supongamos que podemos expresar explícitamente tanto t como $\boldsymbol{y}$ como funciones de otra variable τ, definidas en un cierto intervalo abierto

$$\begin{aligned} t &= \lambda(\tau), \\ \boldsymbol{y} &= \boldsymbol{\mu}(\tau). \end{aligned} \tag{1.12}$$

Aplicando la regla de la cadena y fórmula de la derivada de la función inversa, tendríamos que

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}t} = \frac{\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\mu}}{\mathrm{d}\tau}}{\dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\tau}},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\dfrac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{\mu}}{\mathrm{d}\tau^2}\dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\tau} - \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\mu}}{\mathrm{d}\tau}\dfrac{\mathrm{d}^2\lambda}{\mathrm{d}\tau^2}}{\left(\dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\tau}\right)^3},$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

Si sustituyendo estas expresiones en la ecuación (1.9) hacen que se verifique, entonces diremos que (1.12) es una *solución paramétrica* de (1.9).

Veamos un ejemplo. Tomemos de nuevo la ecuación (1.5). Tenemos que

$$x(\tau) = \operatorname{sen}\tau,$$
$$y(\tau) = \cos\tau,$$

es una solución paramétrica de

$$yy' + x = 0.$$

En efecto, tenemos que

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau}}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}} = -\frac{\operatorname{sen}\tau}{\cos\tau}.$$

Sustituyendo todas las expresiones que tenemos en nuestra EDO,

$$-\cos\tau\frac{\operatorname{sen}\tau}{\cos\tau} + \operatorname{sen}\tau = -\operatorname{sen}\tau + \operatorname{sen}\tau = 0.$$

Por tanto nuestra afirmación es cierta.

En otro orden de cosas, sea cual sea la expresión de las soluciones, podemos tener varios tipos de soluciones.

1) *Solución particular*. Tendremos una solución particular de una EDO cuando conozcamos una solución concreta de la EDO. Por ejemplo, tal como vimos antes,

$$\varphi(t) = \frac{1}{4}(\cos^2 t + t^2),$$

sería una solución particular de (1.3).

También
$$y^2 + x^2 - 1 = 0,$$
sería una solución particular de (1.5).

2) *Solución general.* Tendremos la solución general de un EDO cuando dispongamos de una expresión, generalmente dependiendo de uno o varios parámetros, que englobe a todas las soluciones de la EDO salvo quizá algunos casos particulares.

Como se vio en el Ejemplo 1.1.3, la expresión
$$y(t) = \frac{1}{4}\cos^2 t + \frac{1}{4}t^2 + c_1 t + c_2, \text{ con } c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$
es lo que ahora llamamos la solución general de la ecuación (1.3).

3) *Familia de soluciones.* En ocasiones se dispone de una familia de soluciones de una EDO, dependiente de uno o varios parámetros, que no es la solución general, pues hay otras familias de soluciones que también son solución de la EDO.

Por ejemplo para el sistema (1.8), todas las funciones de la familia
$$(x(t), y(t)) = \frac{1}{c^2}\left(\cos(a + c\lambda t), \operatorname{sen}(a + c\lambda t)\right), \ a, c \in \mathbb{R}, \ c \neq 0,$$
es una familia de soluciones de (1.8), pero no es la solución general, pues hay más familias de soluciones del sistema.

1.2.4 Problemas de Cauchy

Supongamos que f es una función continua en $\mathbb{R}$. Cuando estudiábamos la integración, con el símbolo
$$\int f(t)\,\mathrm{d}t, \tag{1.13}$$
denotábamos a todas las posibles primitivas de f, por lo que en cada ejemplo concreto al *resolver* la integral nos aparece la llamada *constante de integración.* En el lenguaje de las EDO, el símbolo (1.13) denota la solución general de
$$y' = f(t). \tag{1.14}$$
Sea ahora $t_0 \in \mathbb{R}$. Si escribimos
$$\int_{t_0}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x, \tag{1.15}$$

estaremos seleccionando una primitiva particular de f entre las infinitas que tiene, en concreto aquella primitiva $y(t)$ que verifica la condición

$$y(t_0) = 0. \tag{1.16}$$

Es decir, (1.15) denota a la solución particular de la EDO (1.14) que además verifica la igualdad (1.16). A esta última se la llamará *condición inicial*. El problema constituido por una EDO y una condición inicial se llamará *problema de Cauchy*. El problema de Cauchy que estamos considerando se escribiría

$$\begin{cases} y' = f(t) \\ y(t_0) = 0 \end{cases} \tag{1.17}$$

En general un *problema de Cauchy* estará constituido por una EDO de orden $n \in \mathbb{N}$ expresada en forma normal, junto con unas *condiciones iniciales*, que serán valores concretos para la variable dependiente y sus derivadas hasta orden $n-1$ en un mismo punto. De manera más precisa, un problema de Cauchy será de la forma

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}^{(n)} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}', \ldots, \boldsymbol{y}^{(n-1)}) \\ \boldsymbol{y}(t_0) = \boldsymbol{y}_0, \boldsymbol{y}'(t_0) = \boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}^{(n-1)}(t_0) = \boldsymbol{y}_{n-1} \end{cases} \tag{1.18}$$

donde $n \in \mathbb{N}$, $t_0 \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{y}_0, \ldots, \boldsymbol{y}_{n-1} \in \mathbb{R}^m$ y

$$\boldsymbol{f} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{mn} \longrightarrow \mathbb{R}^m \ .$$

En particular, para primer orden, un problema de Cauchy adoptaría la forma

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{y}) \\ \boldsymbol{y}(t_0) = \boldsymbol{y}_0 \end{cases} \tag{1.19}$$

Bajo hipótesis adecuadas, añadir condiciones iniciales a una EDO supone seleccionar una solución particular entre las posibles soluciones contenidas en la solución general. Veamos un caso en el que las condiciones iniciales *seleccionan* una única solución.

Teorema 1.2.1 [Teorema de Picard-Lindelöf]
Sea $(t_0, \boldsymbol{y}_0) \in \mathbb{R}^{m+1}$ y sea el problema de Cauchy

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{y}) \\ \boldsymbol{y}(t_0) = \boldsymbol{y_0} \end{cases}$$

Si existe un entorno $D \subseteq \mathbb{R}^{m+1}$ de $(t_0, \boldsymbol{y_0})$ con $\boldsymbol{f} \in \mathcal{C}^1(D)$, entonces existen un entorno I de t_0 y una única solución del problema de Cauchy definida en I. $\triangleleft$

Hay otros resultados de existencia y unicidad de soluciones que no trataremos aquí.

1.2.5 Reducción del orden

Sea una EDO vectorial de orden n con m ecuaciones y m incógnitas

$$\boldsymbol{F}(t, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}', \ldots, \boldsymbol{y}^{(n)}) = \mathbf{0}. \tag{1.20}$$

Tomemos nuevas variables dependientes

$$\boldsymbol{x_0}, \ldots, \boldsymbol{x_{n-1}},$$

cada una de ellas con m componentes. Sea el sistema de orden 1 con mn ecuaciones y mn incógnitas

$$\begin{cases} \boldsymbol{x_0'} = \boldsymbol{x_1} \\ \boldsymbol{x_1'} = \boldsymbol{x_2} \\ \vdots \\ \boldsymbol{x_{n-2}'} = \boldsymbol{x_{n-1}} \\ \boldsymbol{F}(t, \boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{x_1}, \ldots, \boldsymbol{x_{n-1}}, \boldsymbol{x_{n-1}'}) = \mathbf{0} \end{cases} \tag{1.21}$$

Entonces $\boldsymbol{y}(t)$ es solución de (1.20) si y sólo si existe

$$(\boldsymbol{x_0}(t), \ldots, \boldsymbol{x_{n-1}}(t)),$$

solución de (1.21) con $\boldsymbol{x_0}(t) = \boldsymbol{y}(t)$. Además

1) $\boldsymbol{y}^{(j)} = \boldsymbol{x_j}(t),\ j = 1, \ldots, n-1$

2) Si (1.20) estuviese en forma normal, se podría expresar directamente (1.21) también en forma normal.

3) $\boldsymbol{y}(t)$ verifica condiciones iniciales

$$\boldsymbol{y}(t_0) = \boldsymbol{y_0}, \boldsymbol{y}'(t_0) = \boldsymbol{y_1}, \ldots, \boldsymbol{y}^{(n-1)}(t_0) = \boldsymbol{y_{n-1}},$$

si y sólo si $(\boldsymbol{x_0}(t), \ldots, \boldsymbol{x_{n-1}}(t))$ verifica condiciones iniciales

$$\boldsymbol{x_0}(t_0) = \boldsymbol{y_0}, \boldsymbol{x_1}(t_0) = \boldsymbol{y_1}, \ldots, \boldsymbol{x_{n-1}}(t_0) = \boldsymbol{y_{n-1}}.$$

Como conclusión, vemos que toda EDO se puede expresar como un sistema de orden 1. Por lo tanto, podríamos restringir todo nuestro estudio a sistemas de orden 1.

1.2.6 Cambios de variable

Nos centraremos aquí exclusivamente en sistemas de orden 1 expresados en forma normal. Dada

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{y}), \tag{1.22}$$

a veces es conveniente aplicar cambios de variable para simplificar la EDO o bien para transformarla en otra conocida. Consideraremos dos tipos de cambio de variable.

1.2.6.1 Cambio de variable independiente

Un *cambio!de variable!independiente*cambio de variable independiente viene dado por

$$t = \varphi(s),$$

donde φ es de clase $\mathcal{C}^1$ y localmente inversible. Por la regla de la cadena tenemos

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[\boldsymbol{y}(\varphi(s))] = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}t}[\varphi(s)]\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}[s],$$

o, abusando de la notación mediante la identificando $\boldsymbol{y} \circ \varphi$ con $\boldsymbol{y}$ donde corresponda,

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}t}\varphi'(s),$$

la ecuación (1.22) se transforma en

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(\varphi(s), \boldsymbol{y})\varphi'(s),$$

donde ahora la variable independiente es s.

1.2.6.2 Cambio de variable dependiente

Un cambio de la variable dependiente $\boldsymbol{y}$ a una nueva variable dependiente $\boldsymbol{z}$ se formula mediante una relación

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\phi}(t, \boldsymbol{z}),$$

donde $\boldsymbol{\phi}$ es de clase $\mathcal{C}^1$. Por la regla de la cadena, se tiene

$$\boldsymbol{y}' = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\phi}(t, \boldsymbol{z}) = \frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial t}(t, \boldsymbol{z})\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial \boldsymbol{z}}(t, \boldsymbol{z})\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{z}}{\mathrm{d}t}.$$

Sustituyendo en (1.22)

$$\frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial t}(t, \boldsymbol{z}) + \frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial \boldsymbol{z}}(t, \boldsymbol{z})\boldsymbol{z}' = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{\phi}(t, \boldsymbol{z})),$$

y despejando $\boldsymbol{z}'$

$$\boldsymbol{z}' = \left(\frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial \boldsymbol{z}}(t, \boldsymbol{z})\right)^{-1} \left(\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{\phi}(t, \boldsymbol{z})) - \frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial t}(t, \boldsymbol{z})\right),$$

que es la EDO transformada por el cambio de variable. Nótese que para que el cambio tenga sentido y la nueva ecuación se pueda expresar en forma normal, la matriz Jacobiana

$$\frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial \boldsymbol{z}},$$

debe ser inversible.

Es habitual que $\boldsymbol{\phi}$ no dependa de t, en cuyo caso la ecuación transformada queda

$$\boldsymbol{z}' = \left(\frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial \boldsymbol{z}}(\boldsymbol{z})\right)^{-1} \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{z})),$$

En el caso escalar no aparece ninguna matriz Jacobiana y las fórmulas, aunque formalmente similares, son algo más sencillas en la práctica.

Nótese que si tuviésemos un problema de Cauchy, las condiciones iniciales se transformarían de manera directa para ambos tipos de cambio de variable, invirtiendo las expresiones de los cambios.

1.3 Ejercicios

Ejercicio 1.1 Para cada una de las siguientes EDO, especificar sus variables dependientes e independiente, su orden y su tipo. Expresarlas en forma normal, si es posible.

a) $y'' + 5y^3 - 4y = e^x$.

b) $(1 - x)y'' - 4xy' + 5y = \cos x$.

c) $y'' = \sqrt{1 + y'^2}$.

d) $y''' \operatorname{sen} x - y' \cos x = 2$.

e) $y^2 - 1 + xy' = 0$.

Ejercicio 1.2 Comprobar que $y(x) = x^4/16$ es solución en un cierto intervalo de $y' = x\sqrt{y}$.

Ejercicio 1.3 Comprobar que $y(x) = xe^x$ es solución en un cierto intervalo de $y'' - 2y' + y = 0$.

Ejercicio 1.4 Comprobar que $-2x^2y + y^2 = 1$ es solución en un cierto intervalo de $2xy + (x^2 - y)y' = 0$.

Ejercicio 1.5 Encontrar una EDO en forma normal y con variable dependiente y para la cual la solución general sea $x^2 + y^2 = 2cx,\ c \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 1.6 Hallar las soluciones constantes de $2xy' + 3y = 6$.

Ejercicio 1.7 Calcular los valores de m para los que e^{mx} es solución de $y' + 2y = 0$.

Ejercicio 1.8 Asumiendo que la solución general de $y' + 2xy^2 = 0$ es $1/(x^2 + c),\ c \in \mathbb{R}$, resolver, si es posible, los problemas de Cauchy para la EDO dada con condiciones iniciales

a) $y(0) = -1$.

b) $y(2) = 1/3$.

c) $y(0) = 1$.

d) $y(0) = 0$.

Determinar en cada caso el intervalo más grande donde son válidas las soluciones obtenidas.

Ejercicio 1.9 Sea la EDO escalar

$$y' = f(x, y).$$

Encontrar que EDO deben verificar las curvas ortonormales a sus soluciones.

Ejercicio 1.10 Establecer si los problemas de Cauchy siguientes verifican las hipótesis del teorema de Picard-Lindelöf. Calcular sus soluciones, si es posible.

a) $\begin{cases} xy' - y = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} xy' + y = x \\ y(0) = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} xy' - y = x \\ y(0) = 0 \end{cases}$

Capítulo 2

Ecuaciones diferenciales ordinarias de orden 1

El tipo de EDO en el que centraremos nuestra atención en este capítulo es el más *sencillo* posible, la ecuación escalar de orden 1

$$F(t, y, y') = 0. \tag{2.1}$$

Abordaremos exclusivamente el problema de la resolución analítica de EDO, del cual poco habíamos dicho hasta ahora. En general, éste es un problema intratable. Ni siquiera la EDO (2.1) es resoluble casi nunca. Por lo tanto simplemente estudiaremos algunos casos particulares de éste tipo de EDO para los cuales se conocen métodos de resolución sistemáticos.

Ahora bien, volvamos sobre el caso más simple de EDO que mostrábamos en el Ejemplo 1.1.1. Este tipo de EDO es totalmente equivalente al problema de cálculo de primitivas, por lo que su resolución en forma cerrada depende de que sea posible o no la realización de una cierta integral indefinida. Este hecho también será aplicable a casi todos los casos que vamos a estudiar, con lo cual nuestros *métodos de resolución* puede que a veces no conduzcan a la obtención de una forma cerrada para la solución.

Por otra parte, veremos que para algunos tipo de EDO, la forma natural de presentar las soluciones, no es la explícita, sino la implícita. Esto suele resultar extraño para un alumno con poca experiencia en este campo, que suele tender a pensar que las soluciones implícitas no son soluciones *de verdad*.

2.1 Ecuaciones de variables separadas

Son ecuaciones que se pueden escribir como

$$y' = f(t)g(y) \tag{2.2}$$

Veamos cómo se resuelven.

1) Si $\alpha \in \mathbb{R}$ verifica que $g(\alpha) = 0$, entonces $y(t) = \alpha$ es solución. Por lo tanto resolviendo la ecuación $g(y) = 0$ obtendríamos las soluciones constantes de (2.2).

2) Para $g(y) \neq 0$, tenemos

$$y' = f(t)g(y) \Longleftrightarrow \frac{y'}{g(y)} = f(t) \Longrightarrow \int \frac{y'(t)}{g(y(t))}\,\mathrm{d}t = \int f(t)\,\mathrm{d}t + c.$$

Haciendo el cambio de variable

$$s = y(t) \Longrightarrow \mathrm{d}s = y'(t)\ \mathrm{d}t,$$

en la primera integral, tenemos que

$$\int \frac{\mathrm{d}s}{g(s)} = \int f(t)\,\mathrm{d}t + c.$$

Tras hacer la primera integral, tendríamos que deshacer el cambio de variable, que correspondería a sustituir s por y. Por lo tanto, obtendríamos el mismo resultado renombrando la variable s como la variable y en la primera integral. Así podemos expresar la solución como

$$\boxed{\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int f(t)\,\mathrm{d}t + c,\ c \in \mathbb{R}} \tag{2.3}$$

que (una vez calculadas las integrales, si es posible) nos proporciona la solución general en forma implícita.

Ejemplo 2.1.1 Consideremos la ecuación

$$y' = \frac{(t-4)y^4}{t^3(y^2-3)}.$$

Es sencillo ver que es de variables separadas sin más que escribirla en la forma

$$y' = \frac{t-4}{t^3}\frac{y^4}{y^2-3},$$

donde con las notaciones anteriores tendríamos que

$$f(t) = \frac{t-4}{t^3}$$
$$g(y) = \frac{y^4}{y^2-3}$$

y aplicando la fórmula de resolución (2.3) tendríamos que la solución general es

$$\int \frac{y^2-3}{y^4}\,\mathrm{d}y = \int \frac{t-4}{t^3}\,\mathrm{d}t,$$

e integrando tenemos

$$\frac{1-y^2}{y^3} = \frac{2-t}{t^2} + c,\ c \in \mathbb{R},$$

de donde

$$t^2(1-y^2) = y^3(2-t) + ct^2y^3,\ c \in \mathbb{R},$$

que es la solución general en forma implícita.

Nos faltaría por estudiar si hay soluciones constantes. Este es un punto que se suele olvidar fácilmente cuando se resuelven este tipo de ecuaciones. Debemos resolver

$$\frac{y^4}{y^2-3} = 0,$$

cuya única solución es $y = 0$. Por tanto $y(t) = 0$ es la única solución constante de la ecuación. $\triangleleft$

2.2 Ecuaciones exactas

Diremos que una EDO

$$P(x,y) + Q(x,y)y' = 0 \tag{2.4}$$

es exacta si

$$\exists\, F(x,y) \,/\, P(x,y) = \frac{\partial F}{\partial x}(x,y),\ Q(x,y) = \frac{\partial F}{\partial y}(x,y). \tag{2.5}$$

Las solución general sería en este caso

$$\boxed{F(x,y) = c,\ c \in \mathbb{R}}. \tag{2.6}$$

Ejemplo 2.2.1 La ecuación

$$y^2 + 2xyy' = 0,$$

es exacta con $F(x,y) = xy^2$, ya que

$$\frac{\partial F}{\partial x} = y^2,\ \frac{\partial F}{\partial y} = 2xy.$$

por lo tanto su solución general es

$$ty^2 = c,\ c \in \mathbb{R}.$$

$\triangleleft$

Ejemplo 2.2.2 La ecuación

$$y + 2xy' = 0,$$

no es es exacta. Aunque sería sencillo verlo directamente, introduciremos a continuación un resultado que nos permitirá comprobarlo de manera inmediata. $\triangleleft$

Proposición 2.2.3 [Criterio de exactitud]
Sean $P(x,y)$, $Q(x,y)$ de clase $\mathcal{C}^1$. Se tiene que

$$P(x,y) + Q(x,y)y' = 0 \text{ es exacta } \Longleftrightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Demostración:
$\boxed{\Longrightarrow}$
Como la ecuación es exacta, existe F tal que

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P,\ \frac{\partial F}{\partial y} = Q.$$

Puesto que P y Q son de clase $\mathcal{C}^1$, F es de clase $\mathcal{C}^2$. Por tanto podemos aplicar el lema se Schwarz, de donde

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

y se cumple la condición.

$\boxed{\Longleftarrow}$
Ahora se supone que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

y pretendemos construir una función $F(x,y)$ que verifique

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P,\ \frac{\partial F}{\partial y} = Q.$$

Tendríamos que

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P \Longrightarrow F = \int P \,\mathrm{d}x + \phi(y),$$

donde ϕ debería ser una función que dependiera sólo de y para ajustar adecuadamente la *constante (respecto de x) de integración*. Pero entonces tendríamos que

$$Q = \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \int P \, \mathrm{d}x + \phi'(y),$$

y despejando

$$\phi'(y) = Q - \frac{\partial}{\partial y} \int P \, \mathrm{d}x.$$

Si efectivamente la expresión anterior depende sólo de y, entonces $\phi(y)$ podría ser obtenida por integración respecto de y y tendríamos calculada F. Para ver este punto, derivamos respecto de x

$$\frac{\partial}{\partial x}\phi'(y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(Q - \frac{\partial}{\partial y}\int P \, \mathrm{d}x\right) = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial^2}{\partial y \partial x}\int P \, \mathrm{d}x =$$
$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\int P \, \mathrm{d}x = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0.$$

Por tanto ϕ' sólo depende de y y es

$$\phi(y) = \int \left(Q - \frac{\partial}{\partial y}\int P \, \mathrm{d}x\right) \mathrm{d}y.$$

Quedando así F totalmente determinada. $\triangleleft$

La demostración de esta proposición es esencial para calcular las soluciones una vez establecida la exactitud de una EDO, pues bajo la condición

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

proporciona la siguiente fórmula para calcular F

$$\boxed{F = \int P \, \mathrm{d}x + \int \left(Q - \frac{\partial}{\partial y}\int P \, \mathrm{d}x\right) \mathrm{d}y}.$$

Haciendo un razonamiento análogo, se podría obtener también la siguiente fórmula

$$\boxed{F = \int Q \, \mathrm{d}y + \int \left(P - \frac{\partial}{\partial x}\int Q \, \mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x}.$$

En las fórmulas anteriores, las integrales indefinidas no denotan todas las primitivas de sus funciones respectivas como es habitual, sino una primitiva concreta en cada caso.

Ejemplo 2.2.4 Sea
$$3x^2 + 4xy + (2x^2 + 2y)y' = 0.$$
En este caso
$$P = 3x^2 + 4xy,\ Q = 2x^2 + 2y.$$
Tenemos que
$$\frac{\partial P}{\partial y} = 4x = \frac{\partial Q}{\partial x},$$
luego por la Proposición 2.2.3, la ecuación es exacta. Para resolverla debemos calcular F mediante una de las dos fórmulas anteriores. Utilizaremos la primera.
$$\int P \,\mathrm{d}x = \int (3x^2 + 4xy)\,\mathrm{d}x = x^3 + 2x^2y.$$
Por lo tanto
$$\int \left(Q - \frac{\partial}{\partial y}\int P\,\mathrm{d}x\right)\,\mathrm{d}y = \int \left(2x^2 + 2y - \frac{\partial}{\partial y}(x^3 + 2x^2y)\right)\,\mathrm{d}y = \int (2x^2 + 2y - 2x^2)\,\mathrm{d}y = \int 2y\,\mathrm{d}y = y^2.$$
Así $F = x^3 + 2x^2y + y^2$ y las soluciones de la ecuación son
$$x^3 + 2x^2y + y^2 = c,\ c \in \mathbb{R}.$$
$\triangleleft$

2.3 Factores integrantes

A veces una EDO no es exacta, pero multiplicándola por una cierta función se convierte en exacta, en cuyo caso se puede resolver. A tales funciones se las llamará *factores integrantes*.

Definición 2.3.1 Diremos que $\mu(x, y)$ es un *factor integrante* de
$$P(x, y) + Q(x, y)y',$$
si
$$\mu(x, y)P(x, y) + \mu(x, y)Q(x, y)y',$$
es exacta. $\triangleleft$

Las soluciones de la ecuación original serán las mismas que las de la nueva ecuación exacta, salvo quizá algunas que introduzca o elimine el factor integrante. Más concretamente, puede que se añadan soluciones de la forma

$$\mu(x,y)=0,$$

o que se eliminen soluciones de la forma

$$\frac{1}{\mu(x,y)}=0.$$

Por lo tanto, cada vez que se utilice un factor integrante habrá que comprobar si ambos tipos de función son solución o no de la ecuación original.

Veamos que condición debería verificar un factor integrante $\mu(x,y)$ para una EDO $P(x,y)+q(x,y)y'$. Debería ocurrir

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu P)=\frac{\partial}{\partial x}(\mu Q),$$

de donde

$$\boxed{Q\frac{\partial \mu}{\partial x}-P\frac{\partial \mu}{\partial y}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mu=0}, \tag{2.7}$$

que es una ecuación en derivadas parciales más difícil, en general, de estudiar y resolver que la ecuación original. No obstante hay casos en los que el factor integrante adopta una forma especial, de manera que la condición anterior se transforma en una EDO de resolución sencilla. Supongamos que el factor integrante es de la forma

$$\mu(g(x,y)),$$

para una cierta función particular $g(x,y)$. Es decir, μ sería una función de una variable, llamémosla t, que al ser evaluada en la función $g(x,y)$, nos proporciona el factor integrante.

En este caso, la condición (2.7) quedaría expresada como

$$\left(Q\frac{\partial g}{\partial x}-P\frac{\partial g}{\partial y}\right)\mu'(g(x,y))=\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\mu(g(x,y)),$$

de donde

$$\frac{\mu'}{\mu}=\frac{\dfrac{\partial P}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial x}}{Q\dfrac{\partial g}{\partial x}-P\dfrac{\partial g}{\partial y}}.$$

Por lo tanto, para que exista un factor integrante de la forma fijada, debe existir una función de una variable $f(t)$ tal que

$$f(g(x,y)) = \frac{\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}}{Q\dfrac{\partial g}{\partial x} - P\dfrac{\partial g}{\partial y}}. \tag{2.8}$$

En este caso obtendríamos μ como una solución particular de

$$\frac{\mu'}{\mu} = f(t),$$

que es de variables separadas y se puede resolver como

$$\mu(t) = e^{\int f(t)\,\mathrm{d}t},$$

por lo que el factor integrante sería

$$\mu(g(x,y)) = e^{\int f(t)\,\mathrm{d}t}\Big|_{t=g(x,y)}. \tag{2.9}$$

Algunos casos particulares interesantes son los siguientes

1) Factor integrante de la forma $\mu(x)$. Es decir tendríamos $g(x,y) = x$. La condición, que se deduce de (2.8), para que esto sea posible es que exista $f(x)$ tal que

$$f(x) = \frac{\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}}{Q},$$

siendo en ese caso el factor integrante

$$\mu(x) = e^{\int f(x)\,\mathrm{d}x}$$

2) Factor integrante de la forma $\mu(y)$. Es decir tendríamos $g(x,y) = y$. La condición, que se deduce de (2.8), para que esto sea posible es que exista $f(y)$ tal que

$$f(y) = \frac{\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}}{P},$$

siendo en ese caso el factor integrante

$$\mu(y) = e^{\int f(y)\,\mathrm{d}y}$$

3) Otros casos interesantes podrían ser $g(x,y) = xy$, $g(x,y) = ax + by$ con $a, b \in \mathbb{R}$, etc. Se deja al alumno deducir la condición que tendría que verificar la EDO y la fórmula para calcular el factor integrante.

2.3.1 Ecuación lineal de orden 1

Consideramos una ecuación escalar lineal de orden 1 de la forma

$$y' + a(t)y = b(t). \tag{2.10}$$

De todo lo anterior, se deduce con facilidad que

$$\mu(t) = e^{\int a(t)\,\mathrm{d}t},$$

es un factor integrante. Por tanto la ecuación

$$e^{\int a(t)\,\mathrm{d}t}y' + a(t)e^{\int a(t)\,\mathrm{d}t}y = b(t)e^{\int a(t)\,\mathrm{d}t},$$

es una ecuación exacta. Para resolverla podríamos utilizar la teoría general, pero en este caso observemos que

$$\left(e^{\int a(t)\,\mathrm{d}t}y\right)' = e^{\int a(t)\,\mathrm{d}t}y' + a(t)e^{\int a(t)\,\mathrm{d}t}y,$$

por lo que

$$\left(e^{\int a(t)\,\mathrm{d}t}y\right)' = b(t)e^{\int a(t)\,\mathrm{d}t},$$

de donde

$$e^{\int a(t)\,\mathrm{d}t}y = \int b(t)e^{\int a(t)\,\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t + c,\ c \in \mathbb{R},$$

y así la solución de la ecuación (2.10) es

$$\boxed{y(t) = e^{-\int a(t)\,\mathrm{d}t}\left(\int b(t)e^{\int a(t)\,\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t + c\right),\ c \in \mathbb{R}}.$$

Nota 2.3.2 En caso de tener una ecuación lineal de la forma

$$a_0(t)y' + a_1(t)y = c(t),$$

antes de poder aplicar lo anterior hay que escribirla en la forma

$$y' + \frac{a_1(t)}{a_0(t)}y = \frac{c(t)}{a_0(t)},$$

expresión que será válida para $a_0(t) \neq 0$. $\triangleleft$

Ejemplo 2.3.3 Sea la ecuación lineal

$$y' + \frac{2t+1}{t} y = e^{-2t}.$$

En este caso

$$a(t) = \frac{2t+1}{t},\ b(t) = e^{-2t}.$$

Calculemos un factor integrante. Sea

$$A(t) = \int a(t)\,\mathrm{d}t = \int \frac{2t+1}{t}\,\mathrm{d}t = 2t + \log|t|.$$

Un factor integrante es

$$e^{A(t)} = |t|e^{2t}.$$

Multiplicando la ecuación por el factor integrante, llegamos a

$$(|t|e^{2t}y)' = |t|,$$

e integrando

$$|t|e^{2t}y = \int |t|\,\mathrm{d}t = \frac{|t|t}{2} + c,\ c \in \mathbb{R},$$

por lo que la solución general es

$$y(t) = \left(\frac{t}{2} + \frac{c}{|t|}\right) e^{-2t},$$

válida si $t \neq 0$. $\triangleleft$

2.4 Cambios de variable

Ciertas ecuaciones se reducen por cambio de variable (dependiente, independiente o ambas) a alguna de las anteriores.

En general es difícil ver si existen tales cambios de variable y encontrarlos, pero hay ciertos tipos particulares de EDO para las cuales existen cambios de variable establecidos.

2.4.1 Ecuaciones homogéneas

Las ecuaciones homogéneas son de la forma

$$y' = h(y/t). \tag{2.11}$$

A veces una ecuación homogénea puede estar escrita de forma que sea difícil a simple vista ver que es homogénea. Una manera de comprobar con facilidad si una ecuación es homogénea es la siguiente

$$y' = f(t, y) \text{ es homogénea } \iff f(\alpha t, \alpha y) = f(t, y),\ \forall\, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Para resolver una ecuación homogénea se realiza el cambio de variable dependiente

$$\boxed{y = zt}.$$

Para este cambio se tiene

$$y' = z't + z,$$

por lo que la ecuación (2.11) queda

$$z' = \frac{h(z) - z}{t},$$

que es de variables separadas.

Ejemplo 2.4.1 La ecuación

$$y' = \frac{2xy}{3x^2 - y^2},$$

es homogénea, ya que

$$\frac{2\alpha x \alpha y}{3\alpha^2 x^2 - \alpha^2 y^2} = \frac{2xy}{3x^2 - y^2}.$$

Hacemos el cambio

$$y = xz \iff y' = xz' + z,$$

y queda

$$\begin{aligned} xz' + z &= \frac{2x^2 z}{3x^2 - x^2 z^2} = \frac{2z}{3 - z^2} \implies \\ xz' &= \frac{2z}{3 - z^2} - z = \frac{z(z^2 - 1)}{3 - z^2} \implies \frac{z'(3 - z^2)}{z(z^2 - 1)} = \frac{1}{x}, \end{aligned}$$

que es de variables separadas. La solución general se obtiene

$$\int \frac{3 - z^2}{z(z^2 - 1)}\, \mathrm{d}z = \int \frac{1}{x}\, \mathrm{d}x \implies \log\left(\frac{z^2 - 1}{z^3}\right) = \log|x| + k,$$

de donde

$$z^2 - 1 = cxz^3,\ c \in \mathbb{R},$$

es la solución general. Deshaciendo el cambio de variable, tenemos

$$y^2(1 - cy) = x^2,\ c \in \mathbb{R}.$$

Además puede verse que $y = 0$ es solución. $\triangleleft$

2.4.2 Reducción a ecuaciones homogéneas

Consideramos una ecuación de la forma

$$y' = h\left(\frac{a_1t + b_1y + c_1}{a_2t + b_2y + c_2}\right),$$

con $a_1 \neq 0$ o $b_1 \neq 0$. Se pueden presentar varios casos.

1) Si $c_1 = c_2 = 0$, la ecuación es homogénea.

2) Si

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0,$$

2.1) Si $b_1 = 0$ entonces $b_2 = 0$ y la ecuación es de variables separadas.

2.2) Si $b_1 \neq 0$, el cambio $a_1t + b_1y = z$ la reduce a una de variables separadas.

3) Si

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

Se calcula el punto (t_0, y_0) de intersección de las rectas $a_1t + b_1y + c_1 = 0$ y $a_2t + b_2y + c_2 = 0$ y se hacen los cambios $t = s + t_0$ e $y = z + y_0$, que la reducen a una homogénea.

2.4.3 Ecuación de Bernoulli

Son de la forma

$$y' + a(t)y = b(t)y^n \text{ con } n \in \mathbb{R}. \tag{2.12}$$

- Si $n = 0, 1$, es lineal.
- Si $n \neq 0$, $n \neq 1$ se hace el cambio de variable dependiente

$$\boxed{z = y^{1-n}},$$

que la reduce a una lineal, como veremos ahora

$$z = y^{1-n} \Longrightarrow z' = (1-n)y^{-n}y'.$$

Haciendo el cambio en la ecuación

$$z' + (1-n)a(t)y^{1-n} = b(t)(1-n) \Longleftrightarrow z' + (1-n)a(t)z = (1-n)b(t),$$

que es lineal.

Ejemplo 2.4.2 Sea
$$3ty' - 2y = \frac{t^3}{y^2}.$$
Es de Bernoulli con $n = -2$. El cambio que hay que realizar es por tanto
$$z = y^3,$$
de donde
$$z' = 3y^2y'.$$
reescribimos la ecuación
$$3ty^2y' - 2y^3 = t^3,$$
y hacemos el cambio de variable
$$tz' - 2z = t^3,$$
que es lineal. Para resolverla la debemos escribir en la forma
$$z' - \frac{2z}{t} = t^2.$$
Sea
$$A(t) = \int -\frac{2}{t}\,\mathrm{d}t = -\log t^2.$$
Un factor integrante es entonces
$$\mu(t) = \frac{1}{t^2}.$$
Así la ecuación queda
$$\left(\frac{1}{t^2}z\right)' = 1,$$
de donde
$$z(t) = t^3 + ct^2,\ c \in \mathbb{R} \Longrightarrow y^3 = t^3 + ct^2,\ c \in \mathbb{R}.$$
◁

2.4.4 Ecuación de Riccati

Son de la forma
$$y' + a(t)y^2 + b(t)y = c(t). \tag{2.13}$$

- Si $a(t) = 0$ es lineal.

- Si $c(t) = 0$ es de Bernoulli.
- En cualquier otro caso, dada $y_0(t)$ solución particular,se hace el cambio de variable dependiente
$$\boxed{y = y_0(t) + \frac{1}{z}},$$
que la reduce a una lineal
$$z' - (2y_0(t)a(t) + b(t))z = a(t).$$

Ejemplo 2.4.3 Para la ecuación
$$y' = \frac{y}{x} + x^3y^2 - x^5,$$
se tiene la solución particular $y_0(x) = x$. Hacemos el cambio
$$y = x + \frac{1}{z} \Longrightarrow y' = 1 - \frac{z'}{z^2},$$
y nos queda
$$z' + z\left(\frac{1}{x} + 2x^4\right) = -x^3.$$
que se puede resolver fácilmente, pues es lineal. ◁

2.5 Ejercicios

Ejercicio 2.1 Resolver las siguientes EDO

a) $y' = \cos^2 y$.

b) $(1 + e^x)yy' = e^x$.

c) $y' = f(t)$.

d) $yy' + x = 0$.

e) $x' + \alpha x = 0$, con $\alpha \in \mathbb{R}$.

f) $-xy' + y = 3y^2$.

g) $xy' - y = 0$.

h) $xy' - y = x$.

i) $xy' + y = 0$.

j) $y' = x\sqrt{y}$.

k) $3e^x \tan y = y'(e^x - 2)\sec^2 y$.

l) $y' \operatorname{sen} t \cos y = -\cos t \operatorname{sen} y$.

m) $y' = \operatorname{sen}^2(x - y)$ (Cambio $u = x - y$).

Ejercicio 2.2 Resolver las siguientes EDO

a) $x^3 + xy^2 + (x^2y + y^3)y' = 0.$

b) $2xy = (y - x^2)y'.$

c) $2xy + (1 + x^2)y' = 0.$

d) $3x^2 + 4xy + (2x^2 + 2y)y' = 0.$

e) $1 + e^x y + xe^x y + (xe^x + 2)y' = 0.$

f) $e^y + (te^y + 2y)y' = 0.$

g) $2x \cos y + 3x^2 y = (y + x^2(\operatorname{sen} y - x))y'.$

Ejercicio 2.3 Encontrar un factor integrante de la forma indicada y resolver las siguientes EDO

a) $x^2y' = y^2 + 2xy$, con factor integrante $\mu(y)$.

b) $3y^2 - x + (2y^3 - 6xy)y' = 0$, con factor integrante $\mu(x + y^2)$.

c) $y + (t^2y - t)y' = 0$, con factor integrante $\mu(t)$.

d) $2xy^2 - 3y^3 = (7 - 3xy^2)y'$, con factor integrante $\mu(y)$.

e) $ty + (2t^2 + 3y^2 - 20)y' = 0$, con factor integrante $\mu(y)$.

f) $xy^3 + 2x^2y^2 - y^2 + (x^2y^2 + 2x^3y - 2x^2)y' = 0$, con factor integrante $\mu(xy)$.

g) $x - y + (x + y)y' = 0$, con factor integrante $\mu(x^2 + y^2)$.

Ejercicio 2.4 Encontrar la solución general de las ecuaciones siguientes

a) $(x^2 + 1)y' + 4xy = x.$

b) $y' = \dfrac{2y + (x + 1)^4}{x + 1}.$

c) $y' + 2y = t^2 + 2t.$

d) $y' + y \cos x = \sin x \cos x.$

e) $xy' + y = 3x^2.$

f) $\dfrac{y'}{x} - \dfrac{2y}{x^2} = x \cos x.$

Ejercicio 2.5 Encontrar la solución general de las ecuaciones siguientes

a) $y^4 - 2x^3y + (x^4 - 2xy^3)y' = 0.$

b) $t + y - (t - y)y' = 0.$

c) $x^2 + 2xy - x^2y' = 0.$

d) $\dfrac{2x}{y^3} + \dfrac{y^2 - 3x^2}{y^4}y' = 0.$

e) $t^2 - y^2 + 2tyy' = 0.$

f) $2xyy' = 4x^2 + 3y^2.$

g) $y' = \dfrac{3t - 4y - 2}{3t - 4y - 3}.$

h) $(1 - t + y)y' = t + y - 3.$

i) $x^2 + xy + 3y^2 - (x^2 + 2xy)y' = 0.$

j) $y' = \dfrac{3x - y + 2}{6x - 2y}.$

k) $y' = \dfrac{12t + 5y - 9}{-5t - 2y + 3}$.

l) $y' = \dfrac{y - x - 3}{3x + y + 1}$.

m) $y' = \dfrac{-2x - 2y + 1}{x + y - 2}$.

Ejercicio 2.6 Resolver las ecuaciones siguientes

a) $8ty' - y = \dfrac{1}{y^3\sqrt{t+1}}$.

b) $x^2y' + 2x^3y = y^2(1 + 2x^2)$.

c) $y' + \dfrac{y}{x+1} = -\dfrac{1}{2}(x+1)^3y^3$.

d) $y' + \dfrac{y}{2t} = \dfrac{t}{y^3}$.

e) $xy' + y = x^4y^3$.

f) $xy^2y' + y^3 = x\cos x$.

g) $-xy' + y = 3y^2$.

h) $y' = x\sqrt{y}$.

i) $y' = \dfrac{(1-2x)y^4 - y}{3}$.

j) $xy' + y = x^2y^2$.

k) $ty' + 6y = 3ty^{4/3}$.

l) $y' - y = e^ty^2$.

m) $x + yy' = x^2 + y^2$.

Ejercicio 2.7 Resolver las ecuaciones siguientes

a) $y' = (1-t)y^2 + (2t-1)y - t$. (Solución particular $y_0(t) = 1$).

b) $y' = -8xy^2 + 4x(4x+1)y - 8x^3 - 4x^2 + 1$. (Solución particular $y_0(x) = x$).

c) $y' = x^2 - 2xy + y^2$. (Solución particular $y_0(x) = ax + b$ para ciertos a y b).

d) $y' = -\dfrac{4}{t^2} - \dfrac{y}{t} + y^2$. (Solución particular $y_0(t) = \dfrac{2}{t}$).

Ejercicio 2.8 Resolver los siguientes problemas de Cauchy y determinar el mayor intervalo posible donde están definidas dichas soluciones.

a) $\begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = -1 \end{cases}$

Ejercicio 2.9 Un volcán hace erupción y comienza a caer ceniza de forma regular en varios kilómetros a la redonda. Un equipo de salvamento tratan de acceder a una población en la zona de influencia del volcán. Para ello deben despejar de cenizas la carretera de acceso. Comienzan la operación a las 9:00 horas. Durante la primera hora avanzan el doble de distancia que durante la segunda. ¿Cuándo estalló el volcán?

Ejercicio 2.10 Calcular la familia de curvas ortogonales a

$$x^2 + y^2 = 2cx, \; c \in \mathbb{R}.$$

Ejercicio 2.11 Calcular la familia de curvas que verifican que la ordenada de la intersección de la recta tangente en cada punto con el eje de ordenadas es el triple del cuadrado de la ordenada del punto.

Ejercicio 2.12 Una colonia de bacterias crece de forma proporcional a su número. Si en el instante $t = 0$ hay x_0 bacterias y en una hora se triplican ¿Cuántas bacterias habrá en 2 horas?

Ejercicio 2.13 Una alumno con gripe va a su escuela de 1000 estudiantes. La razón de propagación del virus es proporcional a la cantidad de infectados y a la de no infectados. Si a los 4 días hay 50 infectados, ¿Cuántos habrá en 6 días?

Ejercicio 2.14 Un circuito LR en serie con una inductancia $L = 0{,}1$ henrios y una resistencia $R = 40$ ohmios, se conecta en el instante $t = 0$ a una fuente con fuerza electromotriz $E(t) = 110$ voltios. Calcular la intensidad $I(t)$.

Ejercicio 2.15 La vida media de un material radiactivo es el tiempo transcurrido para que la cantidad de material se reduzca a la mitad. Un material se desintegra 2/3 en 1000 años y se sabe que el decaimiento es proporcional a la cantidad. ¿Cuál es su vida media?

Ejercicio 2.16 Calcular la familia de curvas tales que en cada punto la pendiente de su recta tangentes el triple de la pendiente de la recta que une el punto con el origen.

Ejercicio 2.17 Calcular la trayectoria que sigue un punto P que inicialmente estaba en la posición $(0, a)$, al ser arrastrado sin deslizamiento por un punto Q inicialmente en $(0, 0)$ que se mueve a lo largo del eje de ordenadas, de forma que P y Q están unidos por una cuerda inextensible de longitud a. (Curva tractriz).

Ejercicio 2.18 Obtener la curva que pasa por $(0, -2)$ tal que en cada uno de sus puntos su recta tangente tiene como pendiente la ordenada del punto incrementada en 3 unidades..

Ejercicio 2.19 Un émbolo de sección circular contiene un volumen V_0 de aire a presión p_0. Se comprime adiabáticamente hasta un volumen V_1. ¿Cuál es el trabajo realizado durante la compresión? (Indicación: En una compresión adiabática, la relación entre volúmenes y presiones es

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{V_0}{V}\right)^k,$$

para una cierta constante k que depende del gas).

Ejercicio 2.20 Hallar una curva que pase por el punto $(0,-2)$ y de forma que el ángulo que forma la recta tangente en cada punto con el eje OX sea igual al triple de la ordenada del punto.

Ejercicio 2.21 Sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Calcular una curva $y(x)$ tal que para cada punto x, el área limitada por la curva y las rectas $X = 0$, $Y = 0$, $X = x$ valga

$$\alpha^2 \log \frac{y}{\alpha}$$

Ejercicio 2.22 Una masa puntual de 1 gr se mueve sobre una recta. Sobre ella actúa una fuerza proporcional al tiempo e inversamente proporcional a la velocidad. En el instante $t = 10$ s la velocidad era 50 cm/s y la fuerza 4 dinas. ¿Qué velocidad alcanzará el cuerpo al cabo de un minuto?

Ejercicio 2.23 Calcular las curvas tales que en cada punto el segmento de la recta tangente comprendido entre los dos ejes coordenados tiene su punto medio en dicho punto.

Capítulo 3

Ecuaciones diferenciales lineales

3.1 Sistemas diferenciales lineales

Como ya dijimos en el apartado 1.2.2, un *sistema diferencial lineal* de tamaño $m \in \mathbb{N}$ es de la forma

$$\boldsymbol{y}' = \mathsf{A}(t)\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}(t), \tag{3.1}$$

donde

$$\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_m)\,,$$

y $\mathsf{A}(t)$ es una matriz $m \times m$

$$\mathsf{A}(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1m}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}(t) & \cdots & a_{mm}(t) \end{pmatrix},$$

siendo

$$\boldsymbol{b} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^m \;\;,\;\; a_{ij} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \;,\; i, j = 1, \ldots, m.$$

Diremos que $\mathsf{A}(t)$ es la *matriz del sistema* y que $\boldsymbol{b}(t)$ es el *término independiente.*

Ejemplo 3.1.1 Consideremos el sistema de tamaño 3,

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} t & e^t & t\cos t \\ 1 & 4t & \log t \\ -\operatorname{sen}^2 t & 0 & e^{t^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t^2 - t \\ \dfrac{1-t}{1+t} \\ te^t + 1 \end{pmatrix}$$

◁

Los problemas de Cauchy asociados a sistemas diferenciales lineales son de la forma

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}' = \mathsf{A}(t)\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}(t) \\ \boldsymbol{y}(t_0) = \boldsymbol{y}_0, \end{cases} \tag{3.2}$$

con $t_0 \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{y}_0 \in \mathbb{R}^m$.

Teorema 3.1.2 [Teorema de Picard]
Sean I un intervalo abierto, $t_0 \in I$, $\boldsymbol{y}_0 \in \mathbb{R}^m$, $\mathsf{A}(t)$ una matriz $m \times m$ de funciones continuas en I y $\boldsymbol{b} : I \longrightarrow \mathbb{R}^m$ continua en I. Entonces el problema de Cauchy

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}' = \mathsf{A}(t)\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}(t) \\ \boldsymbol{y}(t_0) = \boldsymbol{y}_0, \end{cases}$$

tiene una única solución definida en I. $\triangleleft$

En lo sucesivo supondremos que todos los sistemas diferenciales que aparezcan estarán en las condiciones del teorema 3.1.2 en algún intervalo abierto I.

3.1.1 Sistemas homogéneos

Los sistemas diferenciales *homogéneos* son de la forma

$$\boldsymbol{y}' = \mathsf{A}(t)\boldsymbol{y}, \tag{3.3}$$

es decir, en un sistema homogéneo el término independiente es $\mathbf{0}$.

Lema 3.1.3 Supongamos que I es un intervalo abierto en el que el sistema (3.3) está en las condiciones del Teorema de Picard, 3.1.2, y sea $t_0 \in I$. Entonces la única solución definida en I del problema de Cauchy

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}' = \mathsf{A}(t)\boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{y}(t_0) = \mathbf{0}, \end{cases}$$

es $\boldsymbol{y}(t) = \mathbf{0}$, $\forall\, t \in I$.
Demostración:
Es inmediato ver que $\boldsymbol{y}(t) = \mathbf{0}$ es solución, y por el Teorema de Picard, 3.1.2, ésta ha de ser la única definida en I. $\triangleleft$

Teorema 3.1.4 Sea I un intervalo abierto en el cual el sistema homogéneo de tamaño m (3.3) está en las condiciones del teorema de Picard 3.1.2. Las soluciones de (3.3) (definidas en I), forman un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión m.
Demostración:

Sea $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{C}^1(I)$ el conjunto de soluciones de (3.3). Basta probar que $\mathcal{S}$ es un subespacio vectorial de dimensión m de $\mathcal{C}^1(I)$.

Veamos primero que es subespacio. Sean $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v} \in \mathcal{S}$ y α, $\beta \in \mathbb{R}$. Tenemos que

$$\boldsymbol{u}' = A(t)\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v}' = A(t)\boldsymbol{v}.$$

Ahora

$$\begin{aligned}
&(\alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{v})' = \\
&\qquad\qquad \text{(por las propiedades de la derivada)} \\
&= \alpha\boldsymbol{u}' + \beta\boldsymbol{v}' = \\
&\qquad\qquad \text{(por ser } \boldsymbol{u} \text{ y } \boldsymbol{v} \text{ soluciones)} \\
&= \alpha\mathsf{A}(t)\boldsymbol{u} + \beta\mathsf{A}(t)\boldsymbol{v} = \\
&\qquad\qquad \text{(por las propiedades de las operaciones matriciales)} \\
&= \mathsf{A}(t)(\alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{v}),
\end{aligned}$$

luego $(\alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{v}) \in \mathcal{S}$ y por tanto $\mathcal{S}$ es subespacio.

Veamos ahora que $\mathcal{S}$ es de dimensión m. Sea $t_0 \in I$. Definimos la siguiente aplicación

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\Delta}_{t_0} : \mathcal{S} &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\
\boldsymbol{u} &\longmapsto \boldsymbol{u}(t_0)
\end{aligned}$$

Si comprobamos que es un isomorfismo de espacios vectoriales, habremos acabado. Para ello necesitamos ver que es lineal y biyectiva. Veamos primero que es lineal. Sean $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v} \in \mathcal{S}$ y α, $\beta \in \mathbb{R}$.

$$\boldsymbol{\Delta}_{t_0}(\alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{v}) = (\alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{v})(t_0) = \alpha\boldsymbol{u}(t_0) + \beta\boldsymbol{v}(t_0) = \alpha\boldsymbol{\Delta}_{t_0}(\boldsymbol{u}) + \beta\boldsymbol{\Delta}_{t_0}(\boldsymbol{v}),$$

luego $\boldsymbol{\Delta}_{t_0}$ es lineal.

Veamos que es sobreyectiva. Sea $\boldsymbol{y}_0 \in \mathbb{R}^m$. Por el teorema de Picard, 3.1.2, el problema de Cauchy

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}' = \mathsf{A}(t)\boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{y}(t_0) = \boldsymbol{y}_0, \end{cases}$$

tiene una única solución $\boldsymbol{u}$. Pero

$$\boldsymbol{\Delta}_{t_0}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u}(t_0) = \boldsymbol{y}_0,$$

y en consecuencia $\boldsymbol{\Delta}_{t_0}$ es sobreyectiva.

Nos queda ver que es inyectiva, para lo cual basta probar que el núcleo se reduce al cero. Recordemos que el cero de $\mathcal{S}$ es la aplicación

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{0} : I &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\
t &\longmapsto \boldsymbol{0}
\end{aligned}.$$

Tomemos $\boldsymbol{u} \in \operatorname{Ker} \boldsymbol{\Delta}_{t_0}$. Se tiene que

$$\mathbf{0} = \boldsymbol{\Delta}_{t_0}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u}(t_0),$$

por lo que $\boldsymbol{u}$ debe ser solución del problema de Cauchy

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}' = \mathsf{A}(t)\boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{y}(t_0) = \mathbf{0}. \end{cases}$$

Pero por el Lema 3.1.3, $\boldsymbol{u}$ debe ser la función cero, con lo cual concluye la demostración. ◁

Definición 3.1.5 Llamaremos *sistema fundamental* de soluciones de (3.3) a toda base del espacio de soluciones de (3.3). ◁

Nota 3.1.6 Dado un sistema

$$[\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m]$$

de soluciones de (3.3), de la demostración del teorema 3.1.4 se sigue que

$$[\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m]$$

es un sistema fundamental de soluciones de (3.3) si y sólo si existe $t_0 \in I$ tal que

$$[\boldsymbol{u}_1(t_0), \ldots, \boldsymbol{u}_m(t_0)]$$

es una base de $\mathbb{R}^m$. ◁

Definición 3.1.7 Una *matriz fundamental* de (3.3) es una matriz $\Phi(t)$ cuadrada $m \times m$ de funciones definidas en I tal que sus columnas son un sistema fundamental de soluciones de (3.3).
Diremos además que es *principal* en un punto $t_0 \in I$ si $\Phi(t_0)$ es la matriz identidad de orden m, I_m. ◁

Proposición 3.1.8 Son equivalentes

(i) $\Phi(t)$ es una matriz fundamental de (3.3).

(ii) $\Phi'(t) = \mathsf{A}(t)\Phi(t)$ y $\det \Phi(t) \neq 0$, $\forall\, t \in I$.

(iii) $\Phi'(t) = \mathsf{A}(t)\Phi(t)$ y $\det \Phi(t_0) \neq 0$, $\exists\, t_0 \in I$.

◁

Propiedades 3.1.9 Sea $\Phi(t)$ una matriz fundamental de (3.3).

1) El conjunto de todas las matrices fundamentales de (3.3) es

$$\{\Phi(t)\mathsf{C}\,/\,\mathsf{C} \text{ es una matriz real } m \times m \text{ inversible}\}.$$

2) Sea $t_0 \in I$. $\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)$ es la matriz fundamental de (3.3) principal en t_0.

3) Sean $t_0 \in I$, $\boldsymbol{y}_0 \in \mathbb{R}^m$. La solución del problema de Cauchy

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}' = \mathsf{A}(t)\boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{y}(t_0) = \boldsymbol{y}_0, \end{cases}$$

es

$$\boxed{y(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\boldsymbol{y}_0}.$$

4) La solución general de (3.3) es

$$\boxed{\boldsymbol{y}(t) = \Phi(t)\boldsymbol{c},\ \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^m}.$$

◁

3.1.2 Sistemas no homogéneos

Sea I un intervalo abierto y consideremos un sistema diferencial lineal de tamaño m en las condiciones del Teorema de Picard, 3.1.2 en I

$$\boldsymbol{y}' = \mathsf{A}(t)\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}(t). \tag{3.4}$$

Supondremos además que $\boldsymbol{b}(t) \neq \boldsymbol{0}$, en cuyo caso se dice que el sistema es *no homogéneo*.
Al sistema

$$\boldsymbol{y}' = \mathsf{A}(t)\boldsymbol{y}, \tag{3.5}$$

se le llama sistema homogéneo *asociado* a (3.4). Es claro que (3.5) también está en las condiciones del Teorema de Picard en I.

Teorema 3.1.10 Si $\boldsymbol{y}_p(t)$ es una solución particular de (3.4) y $\Phi(t)$ es una matriz fundamental del sistema homogéneo asociado (3.5), entonces la solución general de (3.4) es

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{y}_p(t) + \Phi(t)\boldsymbol{c},\ \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^m.$$

◁

Por lo tanto, para resolver el sistema no homogéneo (3.4) basta encontrar una matriz fundamental $\Phi(t)$ del homogéneo (3.5) y una solución particular de (3.4). Veremos a continuación como la propia matriz fundamental $\Phi(t)$ nos permitirá encontrar dicha solución particular.

Para ello, desarrollaremos el llamado *método de variación de las constantes*. Se trata se buscar una solución de (3.4) que sea de la forma

$$\boldsymbol{y}_p(t) = \Phi(t)\boldsymbol{c}(t),$$

es decir, convertimos en funciones la parte que era constante en la solución de (3.5). Además fijaremos $t_0 \in I$ e intentaremos que la solución buscada verifique $\boldsymbol{y}_p(t_0) = \mathbf{0}$, es decir, buscamos resolver el problema de Cauchy

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}' = \mathsf{A}(t)\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}(t) \\ \boldsymbol{y}(t_0) = \mathbf{0}. \end{cases} \tag{3.6}$$

Imponiendo que nuestra $\boldsymbol{y}_p(t)$ sea solución de (3.4), tendremos

$$(\Phi(t)\boldsymbol{c}(t))' = \Phi'(t)\boldsymbol{c}(t) + \Phi(t)\boldsymbol{c}'(t) = \mathsf{A}(t)\Phi(t)\boldsymbol{c}(t) + \boldsymbol{b}(t).$$

Como $\Phi(t)$ es inversible $\forall\, t \in I$, podemos despejar $\boldsymbol{c}'(t)$,

$$\boldsymbol{c}'(t) = \Phi^{-1}(t)\left((\mathsf{A}(t)\Phi(t) - \Phi'(t))\,\boldsymbol{c}(t) + \boldsymbol{b}(t)\right) = \Phi^{-1}(t)\boldsymbol{b}(t),$$

y por lo tanto, $\boldsymbol{c}(t)$ se puede obtener integrando. Ajustando la constante de integración para que se verifique la condición inicial del problema de Cauchy (3.6)

$$\boldsymbol{c}(t) = \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)\boldsymbol{b}(s)\,\mathrm{d}s,$$

y la solución particular adopta la forma

$$\boldsymbol{y}_p(t) = \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)\boldsymbol{b}(s)\,\mathrm{d}s, \tag{3.7}$$

por lo que la solución general de (3.4) es

$$\boxed{\boldsymbol{y}(t) = \Phi(t)\boldsymbol{c} + \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)\boldsymbol{b}(s)\,\mathrm{d}s,\ \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^m.} \tag{3.8}$$

Como consecuencia, la solución del problema de Cauchy

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}' = \mathsf{A}(t)\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}(t) \\ \boldsymbol{y}(t_0) = \boldsymbol{y}_0, \end{cases}$$

adoptará la forma

$$\boxed{\boldsymbol{y}(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\boldsymbol{y}_0 + \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)\boldsymbol{b}(s)\,\mathrm{d}s.} \tag{3.9}$$

Proposición 3.1.11 [Principio de superposición de soluciones] Si $\boldsymbol{y}_j(t)$ es solución de $\boldsymbol{y}' = \mathsf{A}(t)\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}_j(t)$, $j = 1, \ldots, k$, entonces

$$\sum_{j=1}^{k} \boldsymbol{y}_j(t),$$

es solución de

$$\boldsymbol{y}' = \mathsf{A}(t)\boldsymbol{y} + \sum_{j=1}^{k} \boldsymbol{b}_j(t).$$

◁

3.1.3 Resolución de sistemas con coeficientes constantes

Supondremos ahora que la matriz del sistema es constante, es decir, una matriz de números reales. En este caso proporcionaremos un método efectivo de resolución. Basta con saber calcular una matriz fundamental para un sistema homogéneo de coeficientes constantes. Dicha matriz fundamental resuelve el sistema homogéneo (ver las propiedades 3.1.9) y también permite resolver cualquier sistema no homogéneo con la misma matriz asociada en virtud de la fórmula (3.8) que nos proporciona el método de variación de las constantes.

Sea por tanto un sistema

$$\boldsymbol{y}' = \mathsf{A}\boldsymbol{y}, \tag{3.10}$$

donde A es una matriz de números reales.

Ejemplo 3.1.12 El sistema

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -4 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},$$

es un sistema diferencial lineal homogéneo de coeficientes constantes, pues su matriz es una matriz de números reales. ◁

Observemos que cualquier problema de Cauchy que tenga como EDO a (3.10) tiene solución única definida en todo $\mathbb{R}$, ya que para $I = \mathbb{R}$ el sistema está en las condiciones del teorema de Picard 3.1.2.

Para resolver el sistema (3.10) debemos introducir la noción de exponencial de una matriz. Ésta nos permitirá obtener directamente un sistema fundamental de soluciones.

3.1.3.1 La exponencial de una matriz

Definición 3.1.13 Sea $\mathsf{A}(t)$ una matriz $m \times m$ de funciones la *exponencial* de $A(t)$ es la matriz

$$e^{\mathsf{A}(t)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(\mathsf{A}(t))^k \tag{3.11}$$

$\triangleleft$

No estudiaremos con detalle bajo que condiciones la exponencial de una matriz está bien definida. Admitiremos que si A es de coeficientes constantes, entonces para cada $t \in \mathbb{R}$ la exponencial de $t\mathsf{A}$ está bien definida. La fórmula (3.11) queda en este caso

$$e^{t\mathsf{A}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}\mathsf{A}^k. \tag{3.12}$$

Esta fórmula (3.12) no se puede utilizar directamente para calcular la exponencial. Proporcionaremos un sencillo algoritmo, que no justificaremos, para realizar dicho cálculo.

Algoritmo 3.1.14 [Cálculo de la exponencial de $t\mathsf{A}$]
Sea A una matriz de números reales $m \times m$. Para calcular $e^{t\mathsf{A}}$, ejecutaremos el siguiente procedimiento.

1) Calcular las raíces de $P_{\mathsf{A}}(x)$ (polinomio característico de A)

$$\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{C}$$

con sus multiplicidades respectivas

$$r_1, \ldots, r_k \in \mathbb{N}.$$

2) Considerar la función auxiliar dependiente del parámetro t

$$f(x) = e^{tx}.$$

3) Calcular por coeficientes indeterminados el polinomio de grado $m-1$

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{m-1}x^{m-1},$$

que verifica las m condiciones siguientes

$$p^{(j)}(\lambda_h) = f^{(j)}(\lambda_h),\ h = 1, \ldots, k,\ j = 0, \ldots, r_h - 1.$$

Dicho polinomio siempre existe y es único. Sus coeficientes son solución de un sistema de m ecuaciones lineales con m incógnitas que siempre va a ser compatible y determinado para cada t.

4) Se tiene finalmente que
$$e^{t\mathsf{A}} = p(\mathsf{A}).$$

◁

Ejemplo 3.1.15 Consideremos la matriz del sistema del Ejemplo 3.1.12
$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -4 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Apliquemos el Algoritmo 3.1.14.

1) Calculemos las raíces del polinomio característico con sus multiplicidades.
$$P_{\mathsf{A}}(x) = \begin{vmatrix} 1-x & 0 & -2 \\ 1 & -1-x & -4 \\ -1 & 0 & -x \end{vmatrix} = -(1+x)\begin{vmatrix} 1-x & -2 \\ -1 & -x \end{vmatrix} = -(x+1)^2(x-2),$$
cuyas raíces son -1, 2 con multiplicidades respectivas 2, 1.

2) Sea
$$f(x) = e^{tx}.$$
Tendremos que
$$f'(x) = te^{tx}.$$

3) Construimos
$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2,$$
de donde
$$p'(x) = a_1 + 2a_2 x.$$
Imponemos las condiciones
$$\begin{aligned} &p(-1) = f(-1) \\ &p'(-1) = f'(-1) \\ &p(2) = f(2), \end{aligned}$$
que dan lugar al sistema
$$\left\{\begin{array}{ccccccc} a_0 & - & a_1 & + & a_2 & = & e^{-t} \\ & & a_1 & - & 2a_2 & = & te^{-t} \\ a_0 & + & 2a_1 & + & 4a_2 & = & e^{2t} \end{array}\right. .$$

Construimos su matriz ampliada y resolvemos

$$\left(\begin{array}{rrr|l} 1 & -1 & 1 & e^{-t} \\ 0 & 1 & -2 & te^{-t} \\ 1 & 2 & 4 & e^{2t} \end{array}\right) \xrightarrow{f_{31}^{-1}} \left(\begin{array}{rrr|l} 1 & -1 & 1 & e^{-t} \\ 0 & 1 & -2 & te^{-t} \\ 0 & 3 & 3 & e^{2t}-e^{-t} \end{array}\right) \xrightarrow{f_{32}^{-3}}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|l} 1 & -1 & 1 & e^{-t} \\ 0 & 1 & -2 & te^{-t} \\ 0 & 0 & 9 & e^{2t}-e^{-t}-3te^{-t} \end{array}\right) \xrightarrow{f_{3}^{1/9}} \left(\begin{array}{rrr|l} 1 & -1 & 1 & e^{-t} \\ 0 & 1 & -2 & te^{-t} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{e^{-t}}{9}(e^{3t}-1-3t) \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{f_{23}^{2}f_{13}^{-1}} \left(\begin{array}{rrr|l} 1 & -1 & 0 & \frac{e^{-t}}{9}(-e^{3t}+10+3t) \\ 0 & 1 & 0 & \frac{e^{-t}}{9}(2e^{3t}-2+3t) \\ 0 & 0 & 1 & \frac{e^{-t}}{9}(e^{3t}-1-3t) \end{array}\right) \xrightarrow{f_{12}^{1}}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|l} 1 & 0 & 0 & \frac{e^{-t}}{9}(e^{3t}+8+6t) \\ 0 & 1 & 0 & \frac{e^{-t}}{9}(2e^{3t}-2+3t) \\ 0 & 0 & 1 & \frac{e^{-t}}{9}(e^{3t}-1-3t) \end{array}\right)$$

Así los coeficientes de $p(x)$ son

$$a_0 = \frac{e^{-t}}{9}(e^{3t}+8+6t),\ a_1 = \frac{e^{-t}}{9}(2e^{3t}-2+3t),\ a_2 = \frac{e^{-t}}{9}(e^{3t}-1-3t),$$

y por tanto

$$p(x) = \frac{e^{-t}}{9}(e^{3t}+8+6t+(2e^{3t}-2+3t)x+(e^{3t}-1-3t)x^2).$$

4) Para evaluar $p(x)$ en A necesitamos calcular

$$\mathsf{A}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -4 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -4 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Tenemos finalmente

$$e^{t\mathsf{A}} = p(\mathsf{A}) = \frac{e^{-t}}{9}\left((e^{3t}+8+6t)\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} + \right.$$

$$\left.(2e^{3t}-2+3t)\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ 1 & -1 & -4\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix} + (e^{3t}-1-3t)\begin{pmatrix}3 & 0 & -2\\ 4 & 1 & 2\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix}\right) =$$

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2e^{2t}+e^{-t} & 0 & -2e^{2t}+2e^{-t}\\ 2e^{2t}-2e^{-t}-3te^{-t} & 3e^{-t} & -2e^{2t}+2e^{-t}-6te^{-t}\\ -e^{2t}+e^{-t} & 0 & e^{2t}+2e^{-t}\end{pmatrix}.$$

◁

Ejemplo 3.1.16 Sea la matriz

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & 1\end{pmatrix}.$$

Calculemos $e^{t\mathsf{A}}$. Tenemos que

$$P_{\mathsf{A}}(x) = x^2 - 2x + 5,$$

cuyas raíces son $1+2i$, $1-2i$, ambas con multiplicidad 1. Consideramos la función auxiliar

$$f(x) = e^{tx},$$

y el polinomio

$$p(x) = a_0 + a_1 x.$$

Imponemos las condiciones

$$\begin{aligned} p(1+2i) &= f(1+2i)\\ p(1-2i) &= f(1-2i), \end{aligned}$$

que nos proporciona el sistema de ecuaciones lineales para obtener a_0, a_1 que tiene por matriz ampliada

$$\left(\begin{array}{cc|c}1 & 1+2i & e^{(1+2i)t}\\ 1 & 1-2i & e^{(1-2i)t}\end{array}\right),$$

cuyas soluciones son

$$\begin{aligned} a_0 &= e^t(\cos 2t - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t)\\ a_1 &= \frac{1}{2}e^t \operatorname{sen} 2t. \end{aligned}$$

Por lo tanto
$$p(x) = e^t(\cos 2t - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t + \frac{x}{2}e^t \operatorname{sen} 2t),$$
de donde
$$e^{t\mathsf{A}} = p(\mathsf{A}) = e^t \begin{pmatrix} \cos 2t & \operatorname{sen} 2t \\ -\operatorname{sen} 2t & \cos 2t \end{pmatrix}.$$
◁

Ejemplo 3.1.17 Sea
$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$
Calculemos $e^{t\mathsf{A}}$. El polinomio característico de A es
$$P_{\mathsf{A}}(x) = (1-x)^2(3-x)^2,$$
por lo que sus raíces son 1 y 3 ambas con multiplicidad 2. Sea
$$f(x) = e^{tx},\ f'(x) = te^{tx}.$$
Necesitamos
$$\begin{aligned} p(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \\ p'(x) &= a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 \end{aligned}$$
Imponemos las condiciones
$$\begin{aligned} p(1) &= f(1) \\ p'(1) &= f'(1) \\ p(2) &= f(2) \\ p'(2) &= f'(2), \end{aligned}$$
lo que nos lleva al sistema para calcular los coeficientes de $p(x)$ dado por la matriz ampliada
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & e^t \\ 0 & 1 & 2 & 3 & te^t \\ 1 & 3 & 9 & 27 & e^{3t} \\ 0 & 1 & 6 & 27 & te^{3t} \end{array}\right),$$
y resolviendo y evaluando el polinomio en A, obtenemos
$$e^{t\mathsf{A}} = p(\mathsf{A}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{3t}+e^t & -e^{3t}+e^t & 0 & 0 \\ -e^{3t}+e^t & e^{3t}+e^t & 0 & 0 \\ 2te^t & 2te^t & e^{3t}+e^t & e^{3t}-e^t \\ -2te^t & -2te^t & e^{3t}-e^t & e^{3t}+e^t \end{pmatrix}.$$
◁

Propiedades 3.1.18 Sean $m \in \mathbb{N}$, A, B matrices de números reales $m \times m$ y $\lambda \in \mathbb{R}$.

1) $\left|\left|e^{\mathsf{A}}\right|\right| \leq e^{||\mathsf{A}||}$.

2) $e^{0_{m\times m}} = \mathrm{I}_m$.

3) $e^{\lambda \mathrm{I}_m} = e^{\lambda}\mathrm{I}_m$.

4) Si $\mathsf{AB} = \mathsf{BA}$, entonces $e^{\mathsf{A}+\mathsf{B}} = e^{\mathsf{A}}e^{\mathsf{B}}$, y por lo tanto $e^{\mathsf{A}}e^{\mathsf{B}} = e^{\mathsf{B}}e^{\mathsf{A}}$.

5) e^{A} es inversible y $(e^{\mathsf{A}})^{-1} = e^{-\mathsf{A}}$.

6) Si P es una matriz $m \times m$ inversible y $\mathsf{A} = \mathsf{P}^{-1}\mathsf{B}\mathsf{P}$, entonces $e^{\mathsf{A}} = \mathsf{P}^{-1}e^{\mathsf{B}}\mathsf{P}$.

7) Si $\mathsf{C}(t)$ es una matriz $m \times m$ de funciones de clase $\mathcal{C}^1$, tal que

$$\mathsf{C}(t)\mathsf{C}'(t) = \mathsf{C}'(t)\mathsf{C}(t),$$

entonces

$$\left(e^{\mathsf{C}(t)}\right)' = \mathsf{C}'(t)e^{\mathsf{C}(t)}.$$

$\triangleleft$

Las Propiedades 3.1.18 tienen la consecuencia siguiente

Teorema 3.1.19 Si A es una matriz $m \times m$ de números reales y $t_0 \in \mathbb{R}$, entonces la matriz

$$e^{(t-t_0)\mathsf{A}},$$

es la matriz fundamental principal en t_0 del sistema

$$\boldsymbol{y}' = \mathsf{A}\boldsymbol{y}.$$

$\triangleleft$

La solución general de

$$\boldsymbol{y}' = \mathsf{A}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}(t),$$

es

$$\boxed{\boldsymbol{y}(t) = e^{t\mathsf{A}}\boldsymbol{c} + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)\mathsf{A}}\boldsymbol{b}(s)\,\mathrm{d}s,\ \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n,} \tag{3.13}$$

donde $t_0 \in I$.

La solución del problema de Cauchy es

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}' = \mathrm{A}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}(t) \\ \boldsymbol{y}(t_0) = \boldsymbol{y}_0. \end{cases}$$

será

$$\boxed{\boldsymbol{y}(t) = e^{(t-t_0)\mathrm{A}}\boldsymbol{y}_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)\mathrm{A}}\boldsymbol{b}(s)\,\mathrm{d}s.} \tag{3.14}$$

Apliquemos estos resultados a la resolución de algunos problemas de sistemas diferenciales lineales de coeficientes constantes

Ejemplo 3.1.20 Encontrar la solución general del sistema

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -4 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},$$

Utilizando la exponencial que calculamos en el Ejemplo 3.1.15 y la fórmula (3.13), la solución general es

$$y(t) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2e^{2t} + e^{-t} & 0 & -2e^{2t} + 2e^{-t} \\ 2e^{2t} - 2e^{-t} - 3te^{-t} & 3e^{-t} & -2e^{2t} + 2e^{-t} - 6te^{-t} \\ -e^{2t} + e^{-t} & 0 & e^{2t} + 2e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}, \ c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

◁

Ejemplo 3.1.21 Resolver el problema de Cauchy

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} + \begin{pmatrix} \cos 2t \\ -\operatorname{sen} 2t \end{pmatrix} \\ \boldsymbol{y}(0) = (1, 0). \end{cases}$$

La exponencial obtenida en el Ejemplo 3.1.16 es la matriz fundamental principal en 0 del sistema homogéneo asociado. Aplicando (3.14), las solución buscada es

$$\begin{aligned} y(t) &= e^t \begin{pmatrix} \cos 2t & \operatorname{sen} 2t \\ -\operatorname{sen} 2t & \cos 2t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\quad + \int_0^t e^{t-s} \begin{pmatrix} \cos 2(t-s) & \operatorname{sen} 2(t-s) \\ -\operatorname{sen} 2(t-s) & \cos 2(t-s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 2s \\ -\operatorname{sen} 2s \end{pmatrix} \mathrm{d}s \\ &= e^t \begin{pmatrix} \cos 2t \\ -\operatorname{sen} 2t \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} e^{t-s}(\cos 2(t-s)\cos 2s - \operatorname{sen} 2(t-s)\operatorname{sen} 2s) \\ -e^{t-s}(\operatorname{sen} 2(t-s)\cos 2s + \cos 2(t-s)\operatorname{sen} 2s) \end{pmatrix} \mathrm{d}s \\ &= e^t \begin{pmatrix} \cos 2t \\ -\operatorname{sen} 2t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (e^t - 1)\cos 2t \\ (1 - e^t)\operatorname{sen} 2t \end{pmatrix} = (2e^t - 1) \begin{pmatrix} \cos 2t \\ -\operatorname{sen} 2t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

◁

Ejemplo 3.1.22 Calcular la solución general de

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \boldsymbol{y}.$$

Utilizando la exponencial calculada en 3.1.17, la solución es

$$\boldsymbol{y}(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{3t}+e^t & -e^{3t}+e^t & 0 & 0 \\ -e^{3t}+e^t & e^{3t}+e^t & 0 & 0 \\ 2te^t & 2te^t & e^{3t}+e^t & e^{3t}-e^t \\ -2te^t & -2te^t & e^{3t}-e^t & e^{3t}+e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix}, \ c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}.$$

$\triangleleft$

3.2 La ecuación lineal de orden n

Sea $n \in \mathbb{N}$, $I \in \mathbb{R}$ un intervalo abierto y

$$a_1, \ldots, a_n, b : I \longrightarrow \mathbb{R} \ ,$$

continuas en I. Escribiremos una *ecuación lineal* de orden n como

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(t)y' + a_n(t)y = b(t). \tag{3.15}$$

La función $b(t)$ recibe el nombre de *término independiente*.
Un problema de Cauchy será de la forma

$$\begin{cases} y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(t)y' + a_n(t)y = b(t). \\ \\ y(t_0) = \alpha_0, \ y'(t_0) = \alpha_1, \ldots, \ y^{(n-1)}(t_0) = \alpha_{n-1} \end{cases}, \tag{3.16}$$

con $t_0 \in I$, $\alpha_0, \ldots \alpha_{n-1} \in \mathbb{R}$.
La ecuación lineal homogénea *asociada* a (3.15) es

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(t)y' + a_n(t)y = 0. \tag{3.17}$$

Utilizando los resultados de § 1.2.5, podemos construir el sistema diferencial lineal de tamaño n *asociado* a (3.15)

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -a_n(t) & -a_{n-1}(t) & -a_{n-2}(t) & \ldots & -a_1(t) \end{pmatrix} \boldsymbol{y} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}, \tag{3.18}$$

con $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n)$.

Proposición 3.2.1 Son equivalentes:

(i) $\boldsymbol{y}(t) = (y_1(t), \ldots, y_n(t))$ es solución de (3.18).

(ii) $y_1(t)$ es solución de (3.15) y

$$\boldsymbol{y}(t) = \left(y_1(t), y_1'(t), \ldots, y_1^{(n-1)}(t)\right).$$

◁

Para la ecuación homogénea (3.17), el sistema asociado sería

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -a_n(t) & -a_{n-1}(t) & -a_{n-2}(t) & \ldots & -a_1(t) \end{pmatrix} \boldsymbol{y}, \tag{3.19}$$

que es un sistema homogéneo. También tenemos

Proposición 3.2.2 Son equivalentes:

(i) $\boldsymbol{y}(t) = (y_1(t), \ldots, y_n(t))$ es solución de (3.19).

(ii) $y_1(t)$ es solución de (3.17) y

$$\boldsymbol{y}(t) = \left(y_1(t), y_1'(t), \ldots, y_1^{(n-1)}(t)\right).$$

◁

El problema de Cauchy (3.16) también tiene se traduce a un problema de Cauchy para sistemas

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -a_n(t) & -a_{n-1}(t) & -a_{n-2}(t) & \ldots & -a_1(t) \end{pmatrix} \boldsymbol{y} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}, \\ y_1(t_0) = \alpha_0,\ y_2(t_0) = \alpha_1, \ldots,\ y_n(t_0) = \alpha_{n-1} \end{cases}, \tag{3.20}$$

y por supuesto se tiene que

Proposición 3.2.3 Son equivalentes:

(i) $\boldsymbol{y}(t) = (y_1(t), \ldots, y_n(t))$ es solución de (3.20).

(ii) $y_1(t)$ es solución de (3.16) y

$$\boldsymbol{y}(t) = \left(y_1(t), y_1'(t), \ldots, y_1^{(n-1)}(t)\right).$$

◁

Todo lo anterior tiene unas consecuencias que detallaremos a continuación

Propiedades 3.2.4

1) El problema de Cauchy (3.16) tiene solución única en I. Esta es la versión del Teorema de Picard para ecuaciones lineales.

2) Las soluciones de la ecuación homogénea (3.17) forman un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión n. Llamaremos sistema fundamental de soluciones de (3.17) a toda base del espacio de soluciones de (3.17).

3) Todo sistema fundamental de soluciones de (3.17) forma la primera fila de alguna matriz fundamental de (3.19)

4) Más concretamente, para $[u_1, \ldots, u_n][t]$ soluciones de (3.17) las siguientes condiciones son equivalentes

(i) $[u_1(t), \ldots, u_n(t)]$ es un sistema fundamental de soluciones de (3.17).

(ii) La matriz wronskiana

$$\begin{pmatrix} u_1(t) & u_2(t) & \cdots & u_n(t) \\ u_1'(t) & u_2'(t) & \cdots & u_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_1^{(n-1)}(t) & u_2^{(n-1)}(t) & \cdots & u_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

es un sistema fundamental de soluciones de (3.19).

(iii) El wronskiano

$$\begin{vmatrix} u_1(t) & u_2(t) & \cdots & u_n(t) \\ u_1'(t) & u_2'(t) & \cdots & u_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_1^{(n-1)}(t) & u_2^{(n-1)}(t) & \cdots & u_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix} \neq 0, \ \forall\, t \in I.$$

(iv) El wronskiano

$$\begin{vmatrix} u_1(t_0) & u_2(t_0) & \cdots & u_n(t_0) \\ u_1'(t_0) & u_2'(t_0) & \cdots & u_n'(t_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_1^{(n-1)}(t_0) & u_2^{(n-1)}(t_0) & \cdots & u_n^{(n-1)}(t_0) \end{vmatrix} \neq 0,\ \exists\, t_0 \in I.$$

5) La solución general de (3.15) se obtiene sumando una solución particular de (3.15) a la solución general de (3.17).

6) Se puede obtener una solución particular mediante el *método de variación de las constantes*, que adaptado a la ecuación (3.15) consiste en

6.1) Obtener un sistema fundamental de soluciones de (3.17)

$$[u_1, \ldots, u_n][t].$$

6.2) Encontrar las funciones $\boldsymbol{c}(t) = (c_1, \ldots, c_n)\,[t]$ que proporciona el método de variación de las constantes para sistemas visto en § 3.1.2 para el sistema (3.18) y para la matriz fundamental

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) & u_2(t) & \cdots & u_n(t) \\ u_1'(t) & u_2'(t) & \cdots & u_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_1^{(n-1)}(t) & u_2^{(n-1)}(t) & \cdots & u_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}.$$

6.3) La solución particular buscada es

$$u(t) = c_1(t)u_1(t) + \cdots + c_n(t)u_n(t).$$

◁

Proposición 3.2.5 [Principio de superposición de soluciones]
Sean $k \in \mathbb{N}$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ y $b_1(t), \ldots, b_k(t)$ funciones continuas en el intervalo I. Si para cada $j = 1, \ldots, k$, $u_j(t)$ es una solución de

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(t)y' + a_n(t)y = b_j(t),$$

entonces

$$u(t) = \lambda_1 u_1(t) + \cdots + \lambda_k u_k(t),$$

es solución de

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(t)y' + a_n(t)y = \lambda_1 b_1(t) + \cdots + \lambda_k b_k(t).$$

◁

3.2.1 Coeficientes constantes

Cuando las funciones $a_1(t), \ldots, a_n(t)$ son constantes, se dice que la ecuación lineal de orden n es de coeficientes constantes. En este caso, la ecuación adopta la forma

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = b(t), \tag{3.21}$$

con $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ y $b(t)$ continua en un intervalo abierto I.
La ecuación homogénea asociada, es ahora

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0. \tag{3.22}$$

Obsérvese que en el caso homogéneo, el intervalo donde hay existencia y unicidad para las soluciones es todo $\mathbb{R}$.

3.2.1.1 Resolución de la ecuación homogénea

Como el sistema diferencial lineal asociado a una ecuación lineal de orden n es también de coeficientes constantes, por lo expuesto anteriormente bastaría resolver aquél para resolver la ecuación.

Ejemplo 3.2.6 Se considera

$$y'' + 4y = 0.$$

Calcularemos un sistema fundamental de soluciones resolviendo el sistema asociado

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{y}.$$

Utilizando el algoritmo para el cálculo de la exponencial, llegamos a

$$e^{t\mathsf{A}} = \begin{pmatrix} \cos 2t & \dfrac{1}{2} \operatorname{sen} 2t \\ -2 \operatorname{sen} 2t & \cos 2t \end{pmatrix},$$

por lo que su primera fila nos proporciona el sistema fundamental de soluciones para la ecuación

$$[\cos 2t, \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2t].$$

Es inmediato ver que

$$[\cos 2t, \operatorname{sen} 2t],$$

es otro sistema fundamental de soluciones. $\triangleleft$

Veremos a continuación un método directo para calcular un sistema fundamental de soluciones, aunque en general no proporciona el mismo sistema fundamental que el método anterior ilustrado en el Ejemplo 3.2.6.

Algoritmo 3.2.7 Partimos de la ecuación (3.22) y obtendremos un sistema fundamental de soluciones.

1) Calcular el *polinomio característico* de (3.22), que por definición es

$$P(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n,$$

y obtener todas sus raíces

$$\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{C},$$

junto con sus multiplicidades respectivas

$$r_1, \ldots, r_k \in \mathbb{N}.$$

2) Considerar la función auxiliar

$$f(x) = e^{tx}.$$

3) Las n funciones siguientes

$$\begin{aligned} & f(\lambda_1), f'(\lambda_1), \ldots, f^{(r_1-1)}(\lambda_1) \\ & \vdots \\ & f(\lambda_k), f'(\lambda_k), \ldots, f^{(r_k-1)}(\lambda_k), \end{aligned}$$

son un sistema fundamental de soluciones de (3.22)

$\triangleleft$

Ejemplo 3.2.8

$$y''' - y'' - 5y' - 3y = 0.$$

Su polinomio característico es

$$P(x) = x^3 - x^2 - 5x - 3 = (x-3)(x+1)^2.$$

Por tanto sus raíces son 3 y -1 con multiplicidades respectivas 1 y 2. Ahora

$$f(x) = e^{tx},\ f'(x) = te^{tx},$$

de donde un sistema fundamental de soluciones es

$$[f(3), f(-1), f'(-1)] = [e^{3t}, e^{-t}, te^{-t}].$$

Si hubiéramos calculado un sistema fundamental de soluciones mediante la exponencial del sistema asociado como en el ejemplo 3.2.6, hubiéramos obtenido

$$[\frac{12t + e^{4t} + 15}{16}e^{-t}, \frac{4t + e^{4t} - 1}{8}e^{-t}, -\frac{12t - e^{4t} + 1}{16}e^{-t}],$$

que es mucho más complicado. $\triangleleft$

Ejemplo 3.2.9

$$y^{(5)} - 7y^{(4)} + 19y''' - 25y'' + 16y' - 4y = 0.$$

Su polinomio característico es

$$P(x) = x^5 - 7x^4 + 19x^3 - 25x^2 + 16x - 4 = (x-1)^3(x-2)^2.$$

Sus raíces son 1 y 2 con multiplicidades respectivas 3 y 2. Necesitamos considerar

$$f(x) = e^{tx},\ f'(x) = te^{tx},\ f''(x) = t^2e^{tx},$$

por lo que un sistema fundamental de soluciones es

$$[f(1), f'(1), f''(1), f(2), f'(2)] = [e^t, te^t, t^2e^t, e^{2t}, te^{2t}].$$

Con la exponencial del sistema asociado tendríamos

$$\begin{aligned}
&[(2t-7)e^{2t} + 2(t^2+2t+4)e^t, (24-7t)e^{2t} - 2(3t^2+8t+12)e^t,\\
&(9t-30)e^{2t} + (\frac{13t^2}{2} + 21t + 30)e^t, (16-5t)e^{2t} - (3t^2+11t+16)e^t,\\
&(t-3)e^{2t} + (\frac{t^2}{2} + 2t + 3)e^t].
\end{aligned}$$

◁

Ejemplo 3.2.10

$$y'' + 4y = 0.$$

El polinomio característico es

$$P(x) = x^2 + 4 = (x-2i)(x+2i).$$

Sus raíces son $2i$ y $-2i$ con multiplicidad 1 las dos. Consideramos

$$f(x) = e^{tx},$$

por lo que un sistema fundamental de soluciones es

$$[f(2i), f(-2i)] = [e^{2it}, e^{-2it}] = [\cos 2t + i \operatorname{sen} 2t, \cos 2t - i \operatorname{sen} 2t].$$

Vemos que aparecen funciones complejas, lo cual no es adecuado al problema que nosotros consideramos, que es real. Si llamamos

$$v_1(t) = \cos 2t + i \operatorname{sen} 2t,\ v_2(t) = \cos 2t - i \operatorname{sen} 2t,$$

Entonces las funciones

$$u_1(t) = \frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_2$$

$$u_2(t) = \frac{1}{2i}v_1 - \frac{1}{2i}v_2,$$

también serán un sistema fundamental de soluciones, puesto que la matriz

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2i} & -\frac{1}{2i} \end{pmatrix},$$

es inversible. Pero puesto que v_1 y v_2 son conjugadas, u_1 es la parte real de v_1 y u_2 su parte imaginaria, luego son funciones reales. De este modo obtenemos un sistema fundamental de soluciones formado por funciones reales

$$[u_1, u_2] = [\cos 2t, \operatorname{sen} 2t].$$

◁

Lo que se ha hecho en el Ejemplo 3.2.10 es completamente general. Siempre que nos aparezca una solución compleja, aparecerá también su conjugada, con lo cual se podrán sustituir las dos por la parte real y la parte imaginaria de una de ellas, para conseguir finalmente un sistema fundamental de soluciones reales.

3.2.1.2 Resolución de la ecuación no homogénea

Para resolver un sistema homogéneo, bastaría resolver el homogéneo y luego aplicar el método de variación de las constantes al sistema diferencial asociado para calcular una solución particular del sistema no homogéneo.

Ejemplo 3.2.11 Resolveremos el problema de Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 4y = \operatorname{sen} t \\ y(0) = 1, y'(0) = 0. \end{cases}$$

1) Primero necesitamos obtener un sistema fundamental de soluciones de la ecuación homogénea asociada. Eso ya lo hicimos en el Ejemplo 3.2.10. Tenemos así

$$[u_1, u_2] = [\cos 2t, \operatorname{sen} 2t].$$

2) Resolvemos el problema de Cauchy homogéneo asociado

$$\begin{cases} y'' + 4y = 0 \\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0. \end{cases} \tag{3.23}$$

Buscamos una solución de la forma

$$u(t) = c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \operatorname{sen} 2t,$$

a la que imponemos las condiciones iniciales

$$\begin{aligned} u(0) = 1 &\iff c_1 \cos 0 + c_2 \operatorname{sen} 0 = 1 \iff c_1 = 1 \\ u'(0) = 0 &\iff -c_1 \operatorname{sen} 0 + c_2 \cos 0 = 0 \iff c_2 = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto $u(t) = \cos 2t$.

3) Calculamos ahora la solución de

$$\begin{cases} y'' + 4y = \operatorname{sen} t \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0, \end{cases}$$

por el método de variación de las constantes para el problema de Cauchy asociado,

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} + \begin{pmatrix} 0 \\ \operatorname{sen} t \end{pmatrix} \\ \boldsymbol{y}(0) = (0,0). \end{cases} \tag{3.24}$$

Una matriz fundamental para el sistema homogéneo asociado es la matriz wronskiana del sistema fundamental de soluciones de la ecuación homogénea calculado antes,

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) & u_2(t) \\ u_1'(t) & u_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2t & \operatorname{sen} 2t \\ -2 \operatorname{sen} 2t & 2\cos 2t \end{pmatrix}$$

La fórmula (3.7) que proporciona el método de variación de las constantes, nos dice que la solución de (3.24) es

$$\boldsymbol{u}_p(t) = \Phi(t)\int_0^t \Phi^{-1}(s)\begin{pmatrix}0\\ \operatorname{sen} s\end{pmatrix}\mathrm{d}s =$$

$$\Phi(t)\int_0^t \begin{pmatrix}\cos 2s & -\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2s\\ \operatorname{sen} 2s & \frac{1}{2}\cos 2s\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ \operatorname{sen} s\end{pmatrix}\mathrm{d}s =$$

$$\Phi(t)\int_0^t \begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2s\operatorname{sen} s\\ \frac{1}{2}\cos 2s\operatorname{sen} s\end{pmatrix}\mathrm{d}s = \Phi(t)\begin{pmatrix}\int_0^t -\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2s\operatorname{sen} s\,\mathrm{d}s\\ \int_0^t \frac{1}{2}\cos 2s\operatorname{sen} s\,\mathrm{d}s\end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix}\cos 2t & \operatorname{sen} 2t\\ -2\operatorname{sen} 2t & 2\cos 2t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\operatorname{sen} 3t - \operatorname{sen} t\right)\\ \frac{1}{4}\left(\cos t - \frac{1}{3}\cos 3t - \frac{2}{3}\right)\end{pmatrix}$$

La solución $u_p(t)$ de (3.23) es la primera componente de $\boldsymbol{u}_p(t)$, por lo tanto del producto de matrices anterior, sólo calculamos la primera fila de $\Phi(t)$ por la matriz columna, resultando que

$$u_p(t) = \frac{1}{4}\left(\left(\frac{1}{3}\operatorname{sen} 3t - \operatorname{sen} t\right)\cos 2t + \left(\cos t - \frac{1}{3}\cos 3t - \frac{2}{3}\right)\operatorname{sen} 2t\right) =$$
$$\frac{1}{3}(1-\cos t)\operatorname{sen} t.$$

La solución al problema de Cauchy inicial es

$$u_p(t) + u(t) = \frac{1}{3}(1-\cos t)\operatorname{sen} t + \cos 2t.$$

◁

No obstante, este método, aunque completamente general, suele ser bastante costoso. Afortunadamente, en ciertos casos especiales resulta más sencillo obtener una solución particular, como veremos a continuación. Utilizaremos el principio de superposición de soluciones, 3.2.5 y el resultado siguiente.

Proposición 3.2.12 Si en la ecuación (3.21), el término independiente es de la forma

$$b(t) = e^{\alpha t}(p(t)\cos\beta t + q(t)\operatorname{sen}\beta t), \tag{3.25}$$

donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $p(t), q(t)$ son polinomios en t, entonces existe una solución particular de (3.21) de la forma

$$u_p(t) = t^r e^{\alpha t}(\tilde{p}(t)\cos\beta t + \tilde{q}(t)\operatorname{sen}\beta t), \tag{3.26}$$

donde $\tilde{p}(t), \tilde{q}(t)$ son polinomios en t de grado menor o igual que el máximo de los grados de p y q y el valor $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ es la multiplicidad de $\alpha + i\beta$ como raíz del polinomio característico de (3.21). $\triangleleft$

En la práctica la solución (3.26) se busca escribiendo los polinomios $\tilde{p}$ y $\tilde{q}$ con coeficientes indeterminados e imponiendo que $u_p(t)$ sea solución de (3.21). Esto nos proporciona un sistema de ecuaciones lineales cuyas incógnitas son dichos coeficientes indeterminados.

Obsérvese que combinando la Proposición 3.2.12 con el principio de superposición de soluciones, 3.2.5, en caso de que en la ecuación (3.21) el término independiente sea una combinación lineal de términos $b_1(t), \ldots, b_k(t)$, cada uno de ellos de la forma (3.25)

$$b(t) = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j b_j(t),$$

entonces para cada $j = 1, \ldots, k$ podríamos obtener una solución particular u_{pj} de la forma (3.26) para el problema

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_n y = b_j(t),$$

en cuyo caso una solución particular del problema total sería

$$u_p(t) = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j u_{pj}(t).$$

Ejemplo 3.2.13 Calculemos la solución general de

$$\begin{aligned} y^{(4)} - 10y''' + 38y'' - 66y' + 45y = 5te^t\cos 2t + 4e^t - 6t^2e^{3t} - 2te^{2t}\operatorname{sen} t + 3te^{3t} \\ + 10t^3e^t\cos 2t + e^{2t}\cos t - 10e^t\operatorname{sen} 2t. \end{aligned}$$

Primero resolvamos el problema homogéneo asociado

$$y^{(4)} - 10y''' + 38y'' - 66y' + 45y = 0$$

El polinomio característico es

$$P(x) = x^4 - 10x^3 + 38x^2 - 66x + 45,$$

cuyas raíces son $2+i$, $2-i$ y 3 con multiplicidades 1, 1 y 2. Por tanto un sistema fundamental de soluciones es

$$[e^{3t}, te^{3t}, e^{2t}\cos t, e^{2t}\operatorname{sen} t].$$

Ahora vamos a calcular una solución particular de la ecuación no homogénea. Debemos agrupar convenientemente el término independiente

$$\begin{aligned} b(t) &= 5te^t\cos 2t + 4e^t - 6t^2e^{3t} - 2te^{2t}\operatorname{sen} t + 3te^{3t} + 10t^3e^t\cos 2t \\ &\quad + e^{2t}\cos t - 10e^t\operatorname{sen} 2t \\ &= e^{2t}(\cos t - 2t\operatorname{sen} t) + 3e^{3t}(t-2t^2) \\ &\quad + 5e^t((t+2t^3)\cos 2t - 2\operatorname{sen} 2t) + 4e^t. \end{aligned}$$

Sean

$$\begin{aligned} b_1(t) &= e^{2t}(\cos t - 2t\operatorname{sen} t) \\ b_2(t) &= e^{3t}(t-2t^2) \\ b_3(t) &= e^t((t+2t^3)\cos 2t - 2\operatorname{sen} 2t) \\ b_4(t) &= e^t. \end{aligned}$$

Cada una de estas funciones b_j es de la forma (3.25). Nuestro problema original es

$$y^{(4)} - 10y''' + 38y'' - 66y' + 45y = b_1(t) + 3b_2(t) + 5b_3(t) + 4b_4(t).$$

Por tanto calcularemos soluciones particulares para cuatro ecuaciones a cada una de las cuales podremos aplicarle 3.2.5.

1)

$$y^{(4)} - 10y''' + 38y'' - 66y' + 45y = b_1(t) = e^{2t}(\cos t - 2t\operatorname{sen} t).$$

En este caso tendremos $\alpha = 2$, $\beta = 1$, $p(t) = 1$, $q(t) = -2t$ y por tanto el grado de $\tilde{p}$ y $\tilde{q}$ deberá ser 1. Como $2+i$ es raíz del polinomio característico con multiplicidad 1, tenemos que $r = 1$. Así la solución buscada es de la forma

$$u_{p1}(t) = te^{2t}((A_0 + A_1t)\cos t + (B_0 + B_1t)\operatorname{sen} t).$$

Imponiendo que sea solución de la ecuación y agrupando, obtenemos

$$\begin{aligned} &8A_1te^{2t}\cos t + (4A_0 - 12B_1 - 1 - 8A_1)e^{2t}\cos t + \\ &(8B_1 + 2)te^{2t}\operatorname{sen} t + (-8B_1 + 4B_0 + 12A_1)e^{2t}\operatorname{sen} t = 0, \end{aligned}$$

lo cual impone que los coeficientes tengan que anularse y por lo tanto queda un sistema de ecuaciones lineales con matriz ampliada

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 0 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 4 & -8 & 0 \\ 4 & -8 & 0 & -12 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & -2 \end{array}\right),$$

en las variables

$$A_0,\ A_1,\ B_0,\ B_1.$$

Resolviendo

$$A_0 = -\frac{1}{2},\ A_1 = 0,\ B_0 = -\frac{1}{2},\ B_1 = -\frac{1}{4},$$

de donde

$$u_{p1}(t) = \frac{1}{4}te^{2t}(2\cos t - (2+t)\operatorname{sen} t).$$

2)

$$y^{(4)} - 10y''' + 38y'' - 66y' + 45y = b_2(t) = e^{3t}(t - 2t^2).$$

En este caso tendremos $\alpha = 3$, $\beta = 0$, $p(t) = t - 2t^2$, $q(t) = 0$ y por tanto el grado de $\tilde{p}$ deberá ser 2. Como 3 es raíz del polinomio característico con multiplicidad 2, tenemos que $r = 2$. Así la solución buscada es de la forma

$$u_{p2}(t) = t^2e^{3t}(A_0 + A_1t + A_2t^2).$$

Imponiendo que sea solución de la ecuación y agrupando, obtenemos

$$(24A_2 + 2)t^2e^{3t} + (12A_1 + 48A_2 - 1)te^{3t} + (4A_0 + 24A_2 + 12A_1)e^{3t} = 0,$$

lo cual impone que los coeficientes tengan que anularse y por lo tanto queda un sistema de ecuaciones lineales con matriz ampliada

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 4 & 12 & 24 & 0 \\ 0 & 0 & 24 & -2 \\ 0 & 12 & 48 & 1 \end{array}\right),$$

en las variables

$$A_0,\ A_1,\ A_2.$$

Resolviendo

$$A_0 = -\frac{3}{4},\ A_1 = \frac{5}{12},\ A_2 = -\frac{1}{12},$$

de donde

$$u_{p2}(t) = \frac{1}{12}t^2e^{3t}(-9 + 5t - t^2).$$

3)

$$y^{(4)} - 10y''' + 38y'' - 66y' + 45y = b_3(t) = e^t((t + 2t^3)\cos 2t - 2\,\text{sen}\,2t).$$

En este caso tendremos $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $p(t) = t + 2t^3$, $q(t) = -2$ y por tanto el grado de $\tilde{p}$ y $\tilde{q}$ deberá ser 3. Como $1+2i$ no es raíz del polinomio característico, tenemos que $r = 0$. Así la solución buscada es de la forma

$$u_{p3}(t) = e^t((A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + A_3 t^3)\cos 2t + (B_0 + B_1 t + B_2 t^2 + B_3 t^3)\,\text{sen}\,2t).$$

Imponiendo que sea solución de la ecuación y agrupando, obtenemos

$$\begin{aligned}
&(-32A_0 + 56A_1 - 20A_2 - 36A_3 + 16B_0 + 24B_1 - 72B_2 + 48B_3)e^t\cos 2t\\
&+ (-32A_1 + 112A_2 - 60A_3 + 16B_1 + 48B_2 - 216B_3 - 1)te^t\cos 2t\\
&+ (-32A_3 + 16B_3 - 2)t^3e^t\cos 2t\\
&+ (-32A_2 + 168A_3 + 16B_2 + 72B_3)t^2e^t\cos 2t\\
&+ (-16A_0 - 24A_1 + 72A_2 - 48A_3 - 32B_0 + 56B_1 - 20B_2 - 36B_3 + 2)e^t\,\text{sen}\,2t\\
&+ (-16A_1 - 48A_2 + 216A_3 - 32B_1 + 112B_2 - 60B_3)te^t\,\text{sen}\,2t)\\
&+ (-16A_3 - 32B_3)t^3e^t\,\text{sen}\,2t\\
&+ (-16A_2 - 72A_3 - 32B_2 + 168B_3)t^2e^t\,\text{sen}\,2t = 0,
\end{aligned}$$

lo cual impone que los coeficientes tengan que anularse y por lo tanto queda un sistema de ecuaciones lineales con matriz ampliada

$$\left(\begin{array}{rrrrrrrr|r}
0 & -32 & 112 & -60 & 0 & 16 & 48 & -216 & 1\\
0 & 0 & 0 & -32 & 0 & 0 & 0 & 16 & 2\\
0 & 0 & -32 & 168 & 0 & 0 & 16 & 72 & 0\\
0 & -16 & -48 & 216 & 0 & -32 & 112 & -60 & 0\\
0 & 0 & 0 & -16 & 0 & 0 & 0 & -32 & 0\\
0 & 0 & -16 & -72 & 0 & 0 & -32 & 168 & 0\\
-32 & 56 & -20 & -36 & 16 & 24 & -72 & 48 & 0\\
-16 & -24 & 72 & -48 & -32 & 56 & -20 & -36 & -2
\end{array}\right),$$

en las variables

$$A_0,\ A_1,\ A_2,\ A_3,\ B_0,\ B_1,\ B_2,\ B_3.$$

Resolviendo

$$A_0 = \frac{11357}{20000},\ A_1 = \frac{1337}{4000},\ A_2 = -\frac{27}{400},\ A_3 = -\frac{1}{20},$$

$$B_0 = \frac{403}{2500},\ B_1 = \frac{521}{1000},\ B_2 = \frac{111}{400},\ B_3 = \frac{1}{40},$$

de donde

$$u_{p3}(t) = \frac{1}{20000}e^t((11357 + 6685t - 1350t^2 - 1000t^3)\cos 2t + (3224 + 10420t + 5550t^2 + 500t^3)\operatorname{sen} 2t).$$

4)

$$y^{(4)} - 10y''' + 38y'' - 66y' + 45y = b_4(t)e^t.$$

En este caso tendremos $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $p(t) = 1$, $q(t) = 0$ y por tanto el grado de $\tilde{p}$ y $\tilde{q}$ deberá ser 0. Como 1 no es raíz del polinomio característico, tenemos que $r = 0$. Así la solución buscada es de la forma

$$u_{p4}(t) = e^t A_0.$$

Imponiendo que sea solución de la ecuación y agrupando, obtenemos

$$(8A_0 - 1)e^t = 0,$$

lo cual impone que los coeficientes tengan que anularse y por lo tanto queda un sistema de ecuaciones lineales con matriz ampliada

$$\left(8 \mid 1\right),$$

en la variable

$$A_0.$$

Resolviendo

$$A_0 = \frac{1}{8},$$

de donde

$$u_{p4}(t) = \frac{1}{8}e^t.$$

Por el principio de superposición de soluciones, 3.2.5, una solución particular del sistema de partida es

$$u_p(t) = u_{p1}(t) + 3u_{p2}(t) + 5u_{p3}(t) + 4u_{p4}(t).$$

y la solución general buscada es

$$\begin{aligned}
y(t) &= u_p(t) + c_1e^{3t} + c_2te^{3t} + c_3e^{2t}\cos t + c_4e^{2t}\operatorname{sen} t \\
&= u_{p1}(t) + 3u_{p2}(t) + 5u_{p3}(t) + 4u_{p4}(t) + c_1e^{3t} + c_2te^{3t} + c_3e^{2t}\cos t + c_4e^{2t}\operatorname{sen} t \\
&= \frac{1}{4}te^{2t}(2\cos t - (2+t)\operatorname{sen} t) + \frac{1}{4}t^2e^{3t}(-9+5t-t^2) \\
&+ \frac{1}{4000}e^t((11357 + 6685t - 1350t^2 - 1000t^3)\cos 2t \\
&+ (3224 + 10420t + 5550t^2 + 500t^3)\operatorname{sen} 2t) + \frac{1}{2}e^t \\
&+ c_1e^{3t} + c_2te^{3t} + c_3e^{2t}\cos t + c_4e^{2t}\operatorname{sen} t, \\
&\text{con } c_1,\ c_2,\ c_3,\ c_4 \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

$\triangleleft$

3.2.2 La ecuación de Euler

La ecuación de Euler es de la forma

$$(ct+d)^n y^{(n)} + a_1(ct+d)^{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(ct+d)y' + a_ny = b(t), \qquad (3.27)$$

con $n \in \mathbb{N}$, $a_1, \ldots, a_n, c, d \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$, y donde se supone que existe I intervalo abierto con $b : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continua.
Para $ct + d > 0$, el cambio de variable independiente $ct + d = e^x$ la convierte en una ecuación lineal de coeficientes constantes.
Para $ct + d < 0$, el cambio de variable independiente $ct + d = -e^x$ la convierte en una ecuación lineal de coeficientes constantes.

3.3 Ejercicios

Ejercicio 3.1 Calcular la exponencial de $t\mathsf{A}$, siendo A cada una de las matrices siguientes.

a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

h) $\begin{pmatrix} 5 & 132 & 72 & 0 & 59 \\ 0 & -48 & -60 & 0 & -18 \\ 0 & 27 & 20 & 0 & 12 \\ 1 & 53 & 23 & 5 & 24 \\ 0 & 88 & 110 & 0 & 33 \end{pmatrix}$

i) $\begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 9 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & -9 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -9 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 1 & -6 \end{pmatrix}$

j) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

k) $\begin{pmatrix} -4 & -20 & 0 & 13 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -8 & -4 & -6 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 0 \\ -2 & -4 & 1 & 12 & -4 \end{pmatrix}$

l) $\begin{pmatrix} -9 & 4 & -27 & 1 & 0 & 31 & -26 & -11 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & -8 & 1 & 0 & 6 & -1 & -3 \\ -6 & 4 & -8 & -2 & 0 & 12 & -4 & -6 \\ 3 & -4 & 6 & -3 & -6 & -6 & 3 & 3 \\ -3 & 2 & -13 & 1 & 0 & 11 & -12 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & -3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

Ejercicio 3.2 Resolver los problemas de Cauchy

a) $\begin{cases} \boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{y}(0) = (1,1) \end{cases}$

b) $\begin{cases} \boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{y}(0) = (0,2) \end{cases}$

c) $\begin{cases} \boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{y}(0) = (1,1) \end{cases}$

d) $\begin{cases} \boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 4 & -3 & 8 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{y}(1) = (-2,0,1) \end{cases}$

e) $\begin{cases} \boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 4 & -3 & 8 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{y}(1) = (-1,0,1) \end{cases}$

f) $\begin{cases} \boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 4 & -3 & 8 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{y}(1) = (1,4,2) \end{cases}$

Ejercicio 3.3 Sea el sistema diferencial lineal

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}(x).$$

a) Si $\boldsymbol{b}(x) = \left(e^{2x}, 0\right)$, calcular una solución particular del sistema de la forma $e^{2x}\boldsymbol{u}$, con $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2$.

b) Si $\boldsymbol{b}(x) = (e^x, 0)$, calcular una solución particular del sistema de la forma $e^x\,(a + bx, c + dx)$, con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 3.4 Sean $m \in \mathbb{N}$, A una matriz de números reales $m \times m$ tal que 0 no es valor propio de A y $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$. Probar que existe $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^m$ tal que $\boldsymbol{y}_p(t) = \boldsymbol{u}$ es una solución del sistema.

$$\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}.$$

Calcular la solución general de los sistemas

a) $\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$

b) $\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$

Ejercicio 3.5 Sea $a \in \mathbb{R}$. Resolver el problema de Cauchy

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} a+1 & -1 & 1 \\ 1 & a-1 & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \boldsymbol{y} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \boldsymbol{y}(0) = (1, 0, -1) \end{cases}$$

Ejercicio 3.6 Sean $m \in \mathbb{N}$ A una matriz de números reales $m \times m$ e $\boldsymbol{y_0}(t)$ una solución de $\boldsymbol{y}' = \mathsf{A}\boldsymbol{y}$. Probar que $t\boldsymbol{y_0}(t)$ es solución de $\boldsymbol{y}' = \mathsf{A}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{y_0}(t)$.
Calcular la solución general del sistema

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} + \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \\ e^t \end{pmatrix}$$

Ejercicio 3.7 Calcular la solución general de

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} + \begin{pmatrix} t^2e^t \\ 2e^t \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 3.8 Calcular un sistema fundamental de soluciones para cada una de las siguientes ecuaciones

a) $y'' + \lambda y = 0$, siendo $\lambda \in \mathbb{R}$.

b) $y'' - y' - 2y = 0$.

c) $y'' - 2y' + y = 0$.

d) $y'' - 6y' + 13y = 0$.

e) $y''' - y'' + 9y' - 9y = 0$.

f) $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$.

g) $t^2y'' + ty' - 4y = 0$.

h) $x^2y'' - xy' + 2y = 0$.

i) $y'' + \dfrac{2}{1+t}y' = 0$.

Ejercicio 3.9 Comprobar que $[t, te^t]$ es un sistema fundamental de soluciones de

$$t^2y'' - t(t+2)y' + (t+2)y = 0.$$

Ejercicio 3.10 Encontrar las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden que tienen por solución general

a) $c_1e^x + c_2e^{-x}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

b) $c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

c) $(c_1 + c_2t)e^t$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

d) $c_1t + c_2e^{3t}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

e) $c_1t + c_2 \operatorname{sen} t$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

f) $c_1e^t \operatorname{sen} t + c_2e^t \cos t$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 3.11 Resolver los problemas de Cauchy

a) $\begin{cases} y''' - y'' + 4y' - 4y = 0 \\ y(0) = 1,\ y'(0) = -1,\ y''(0) = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y''' + y' = 0 \\ y(\pi) = 0,\ y'(\pi) = 2,\ y''(\pi) = -1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y'' - 5y' + 6y = (12t - 7)e^{-t} \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} t^2y'' - 2y = t^3e^t \\ y(1) = 0,\ y'(1) = 1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} y^{(4)} + 4y''' + 5y'' + 4y' + 4y = 0 \\ y(0) = 1,\ y'(0) = -1,\ y''(0) = -1,\ y'''(0) = 1 \end{cases}$

Ejercicio 3.12 Calcular la solución general de

a) $y'' + y = t \operatorname{sen} 2t - 1$.

b) $y^{(5)} + 2y''' + y' = t$.

c) $y'' - y = te^t$.

d) $y'' - 4y' + 5y = 1 + e^{2t} \operatorname{sen} t$.

e) $y'' + y = \log t - \dfrac{1}{t^2}$.

f) $x^2y'' + 2xy' = 1$.

g) $y'' - 3y' + 2y = x(x+1)e^{3x}$.

h) $xy'' + y' = 1$.

i) $t^3y''' + 2t^2y'' - ty' + y = 12t^2$.

j) $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x}$.

k) $y^{(4)} - 12y''' + 46y'' - 60y' + 25y = e^{2t}$.

l) $y''' - y'' - y' + y = te^t + 2e^{-3t} + \cos t$.