Matemáticas I

J. Miguel Farto Álvarez

Curso 2023-2024

Índice general

Índice de tablas

License

Capítulo 0

Nociones previas

El contenido de este capítulo se supone ya conocido y no forma parte de las materias propiamente dichas de la asignatura. No obstante es recomendable su lectura para fijar ideas y notaciones.

0.1 Conjuntos

No entraremos en los sutiles detalles de la teoría de conjuntos y asumiremos que se entiende lo que es un conjunto a nivel intuitivo. En este sentido, podríamos decir que un conjunto es una colección de objetos, llamados elementos del conjunto, que se pueden enumerar o describir mediante alguna característica común.

La pertenencia de un elemento x a un conjunto A se denotará por $x \in A$, símbolo que se lee como x *pertenece a* A.

Definición 0.1.1 Diremos que un conjunto B es un *subconjunto* de un conjunto A si se verifica

$$x \in B \Longrightarrow x \in A.$$

Se denotará por $B \subseteq A$ y se lee B *está incluido* en A. $\triangleleft$

Definición 0.1.2 Llamaremos *conjunto vacío*, y lo denotaremos por $\emptyset$, al conjunto que no tiene ningún elemento. $\triangleleft$

Definición 0.1.3 Sea A un conjunto. Llamaremos *partes de* A, y lo denotaremos por $\mathcal{P}(A)$, al conjunto formado por todos los subconjuntos de A. $\triangleleft$

Nota 0.1.4 Es evidente que para cualquier conjunto A se tiene que $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$ y que $A \in \mathcal{P}(A)$ $\triangleleft$

0.1.1 Operaciones sobre conjuntos

Consideraremos las operaciones unión, intersección y producto cartesiano de conjuntos.

0.1.1.1 Unión de conjuntos

Definición 0.1.5 Sean A y B dos conjuntos. La *unión* de A y B es otro unión de A y B es otro conjunto denotado por $A \cup B$, que se lee A *unión* B, definido por

$$A \cup B = \{x \,/\, x \in A \text{ ó } x \in B\}\,.$$

◁

La unión de una familia arbitraria de conjuntos se define de manera análoga:

Definición 0.1.6 Sea $(A_i)_{i \in I}$ una familia de conjuntos. La *unión* de los conjuntos de la familia es un nuevo conjunto definido por

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \,/\ \exists\, i \in I \text{ con } x \in A_i\}\,.$$

◁

0.1.1.2 Intersección de conjuntos

Definición 0.1.7 Sean A y B dos conjuntos. La *intersección* de A y B es otro conjunto denotado por $A \cap B$, que se lee A *intersección* B, definido por

$$A \cap B = \{x \,/\, x \in A \text{ y } x \in B\}\,.$$

◁

La intersección de una familia arbitraria de conjuntos se define de manera análoga:

Definición 0.1.8 Sea $(A_i)_{i \in I}$ una familia de conjuntos. La *intersección* de los conjuntos de la familia es un nuevo conjunto definido por

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \,/\, x \in A_i,\ \forall\, i \in I\}\,.$$

◁

0.1.1.3 Producto cartesiano

Definición 0.1.9 Sean $n \in \mathbb{N}$ y $A_1, \ldots, A_n$ conjuntos. Llamaremos *producto cartesiano* de $A_1, \ldots, A_n$ y lo denotaremos por $A_1 \times \cdots \times A_n$ al conjunto de n-uplas ordenadas de elementos de $A_1, \ldots, A_n$. Es decir

$$A_1 \times \cdots \times A_n = \{(x_1, \ldots, x_n) \,/\, x_i \in A_i, i = 1, \ldots, n\}.$$

$\triangleleft$

Con las notaciones de la Definición 0.1.9, si cada conjunto $A_i = A$, $i = 1, \ldots, n$, entonces utilizaremos la notación siguiente

$$A_1 \times \cdots \times A_n = A^n.$$

0.1.1.4 Propiedades

Sean A, B, C, D conjuntos. Se verifican las siguientes propiedades

1) $A \cup B = B \cup A$.

2) $A \cap B = B \cap A$.

3) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$.

4) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$.

5) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

6) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

7) $(A \cup B) \times (C \cup D) = (A \times C) \cup (A \times D) \cup (B \times C) \cup (B \times D)$.

8) $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D) = (A \times D) \cap (B \times C)$.

0.1.2 Correspondencias

Definición 0.1.10 Sean A y B dos conjuntos. Una *correspondencia* de A en B es un subconjunto del producto cartesiano $A \times B$. $\triangleleft$

Definición 0.1.11 Sean A y B dos conjuntos y F un correspondencia de A en B.

1) Si $C \subseteq A$, llamaremos *imagen* de C por F y la denotaremos por $F(C)$ al subconjunto de B dado por

$$F(C) = \{y \in B \,/\, \exists x \in C \text{ con } (x, y) \in F\}.$$

Si $C = \{x\}$, es decir, se reduce a un solo elemento, podemos utilizar la notación $F(x)$ para referirnos a $F(\{x\})$.

2) Si $D \subseteq B$, llamaremos *contraimagen* de D por F y la denotaremos por $F^{-1}(D)$ al subconjunto de A dado por

$$F^{-1}(D) = \{x \in A \,/\, \exists\, y \in D \text{ con } (x, y) \in F\}\,.$$

Si $D = \{y\}$, es decir, se reduce a un solo elemento, podemos utilizar la notación $F^{-1}(y)$ para referirnos a $F^{-1}(\{y\})$.

3) Llamaremos *imagen* de F y lo denotaremos por $\operatorname{Img} F$ a $F(A)$.

4) Llamaremos *contraimagen* o *anti-imagen* de F a $F^{-1}(B)$.

$\triangleleft$

No introduciremos notaciones adicionales para las correspondencias, pues carecerán de interés para nosotros.

0.1.2.1 Aplicaciones

Las correspondencias que tienen interés para nosotros serán las llamadas *aplicaciones.*

Definición 0.1.12 Sean A y B dos conjuntos. Una *aplicación* de A en B es una correspondencia, f, de A en B tal que $f(x)$ es un conjunto con uno y sólo un elemento para cada $x \in A$. $\triangleleft$

Sean A y B dos conjuntos, f una aplicación de A en B y $x \in A$. Por definición $f(x)$ contiene un sólo elemento, es decir, podemos poner $f(x) = \{y\}$ para cierto $y \in B$. Para simplificar la notación, escribiremos simplemente $f(x) = y$ y diremos que y es la imagen por f de x.

El resto de definiciones que teníamos para las correspondencias se mantienen tal cual para las aplicaciones.

Además, en vez de intentar interpretar directamente f como un subconjunto de $A \times B$ con unas propiedades especiales, resulta más cómodo emplear la siguiente notación para manejar f

$$\begin{aligned} f : A &\longrightarrow B \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}\;,$$

donde en la práctica en vez de $f(x)$ se suele escribir, si es posible, algún mecanismo de transformación (generalmente de tipo aritmético) que permite obtener el valor de $f(x)$ a partir de x.

Otra notación abreviada que se puede emplear para indicar que f es una aplicación de A en B es

$$f : A \longrightarrow B\;.$$

Definición 0.1.13 Sean A, B dos conjuntos y

$$f : A \longrightarrow B$$

una aplicación. Diremos que A es el *dominio de definición* o simplemente el *dominio* de f. $\triangleleft$

Definición 0.1.14 Sean A, B dos conjuntos, $C \subseteq A$ y

$$f : A \longrightarrow B$$

una aplicación. Llamaremos *restricción* de f a C y la denotaremos por $f|_C$ a la aplicación

$$\begin{aligned} f|_C : C &\longrightarrow B \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned} .$$

$\triangleleft$

Definición 0.1.15 Sean A y B dos conjuntos. Diremos que una aplicación

$$f : A \longrightarrow B$$

es *inyectiva* si para cada $y \in B$, el conjunto $f^{-1}(y)$ tiene a lo sumo un elemento. $\triangleleft$

Proposición 0.1.16 Sean A y B dos conjuntos y una aplicación

$$f : A \longrightarrow B \ .$$

Son equivalentes

(i) f es inyectiva.

(ii) Si $x_1, x_2 \in A$ y $f(x_1) = f(x_2)$, entonces $x_1 = x_2$.

(iii) Para cada par $x_1, x_2 \in A$ con $x_1 \neq x_2$, se tiene que $f(x_1) \neq f(x_2)$.

(iv) Para cada $y \in \operatorname{Img} f$, existe un único $x \in A$ tal que $f(x) = y$.

$\triangleleft$

Definición 0.1.17 Sean A y B dos conjuntos. Diremos que una aplicación

$$f : A \longrightarrow B$$

es *suprayectiva*, *sobreyectiva* o simplemente *sobre* si para cada $y \in B$, el conjunto $f^{-1}(y)$ tiene al menos un elemento. $\triangleleft$

Proposición 0.1.18 Sean A y B dos conjuntos y una aplicación

$$f : A \longrightarrow B \ .$$

Son equivalentes

(i) f es sobre.

(ii) Para cada $y \in B$, $f^{-1}(y) \neq \emptyset$.

(iii) $\operatorname{Img} f = B$.

(iv) Para cada $y \in B$, existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$.

$\triangleleft$

Definición 0.1.19 Sean A y B dos conjuntos. Diremos que una aplicación

$$f : A \longrightarrow B \ ,$$

es *biyectiva* si para cada $y \in B$, el conjunto $f^{-1}(y)$ tiene exactamente un elemento. $\triangleleft$

Proposición 0.1.20 Sean A y B dos conjuntos y una aplicación

$$f : A \longrightarrow B \ .$$

Son equivalentes

(i) f es biyectiva.

(ii) f es inyectiva y sobre.

(iii) Para cada $y \in B$, existe un único $x \in A$ tal que $f(x) = y$.

$\triangleleft$

Dados A y B conjuntos, una aplicación $f : A \longrightarrow B$ biyectiva e $y \in B$, como $f^{-1}(y)$ contiene un elemento y sólo uno, podemos poner $f^{-1}(y) = \{x\}$ para cierto $x \in A$. Para simplificar la notación, escribiremos simplemente $f^{-1}(y) = x$ y diremos que x es la contraimagen por f de y.

De esta forma, podemos definir una aplicación de B en A a la que llamaremos la aplicación inversa de f y a la que denotaremos por f^{-1}, definida por

$$\begin{aligned} f^{-1} : B &\longrightarrow A \\ y &\longmapsto f^{-1}(y) \end{aligned} \ .$$

Nótese que f^{-1} también es una aplicación biyectiva y que $(f^{-1})^{-1} = f$.

0.2 Operaciones

0.2.1 Operaciones internas

Definición 0.2.1 Sea A un conjunto. Una *operación binaria interna* (o simplemente una operación) sobre A o definida en A, es una aplicación

$$\begin{aligned} \star :\ & A \times A \longrightarrow A \\ & (a_1, a_2) \longmapsto \star(a_1, a_2) \end{aligned}$$

$\triangleleft$

Nota 0.2.2 Normalmente no se utiliza la notación de aplicaciones dada en la Definición 0.2.1 para las operaciones internas, sino que se suele utilizar la llamada *notación binaria*. Así $\star(a_1, a_2)$ se denotará por $a_1 \star a_2$. $\triangleleft$

Ejemplo 0.2.3 La suma y el producto sobre los conjuntos de números habituales son ejemplos de operaciones binarias. $\triangleleft$

Nota 0.2.4 Si A es un conjunto, $\star$ una operación interna sobre A y $B \subseteq A$ verificando la propiedad

$$b_1 \star b_2 \in B,\ \forall\, b_1, b_2 \in B,$$

entonces $\star$ induce una operación binaria interna sobre B. $\triangleleft$

Definición 0.2.5 Sean A un conjunto y $\star, \diamond$ dos operaciones internas sobre A.

1) Diremos que la operación $\star$ verifica la *propiedad asociativa* si

$$a \star (b \star c) = (a \star b) \star c,\ \forall\, a, b, c \in A.$$

también podremos decir que $\star$ es asociativa.

2) Diremos que la operación $\star$ verifica la *propiedad conmutativa* si

$$a \star b = b \star a,\ \forall\, a, b \in A.$$

También se dirá que $\star$ es conmutativa.

3) Diremos que A tiene *elemento neutro* para $\star$, si existe un elemento $n \in A$ tal que

$$n \star a = a \star n = a,\ \forall\, a \in A.$$

Nótese que el elemento neutro, si existe es único.

4) Supongamos que existe elemento neutro $n \in A$ para $\star$. Diremos que $\star$ verifica la propiedad de existencia de *elemento simétrico*, si

$$\forall\, a \in A,\ \exists\, b \in A \,/\, a \star b = b \star a = n.$$

En general el elemento simétrico de $a \in A$, si existe, se suele denotar por a^{-1}.

En algunos contextos, se llama *elemento opuesto* al elemento simétrico, en cuyo caso el opuesto de un elemento $a \in A$, se denota por $-a$. En otros, el elemento simétrico recibe el nombre de *elemento inverso*, en cuyo caso el elemento inverso de $a \in A$ se denota por a^{-1} o por $1/a$.

5) Diremos que la operación $\diamond$ es *distributiva* respecto de $\star$ si

$$a \diamond (b \star c) = (a \diamond b) \star (a \diamond c),\ \forall\, a, b, c \in A.$$

y

$$(b \star c) \diamond a = (b \diamond a) \star (c \diamond a),\ \forall\, a, b, c \in A.$$

$\triangleleft$

0.2.2 Operaciones externas

Definición 0.2.6 Sean A, B dos conjuntos. Una *operación externa* o una *ley externa* de A sobre B es una aplicación

$$\begin{aligned} \cdot : A \times B &\longrightarrow B \\ (a, b) &\longmapsto \star(a, b) \end{aligned}$$

$\triangleleft$

Nota 0.2.7 Normalmente no se utiliza la notación de aplicaciones dada en la Definición 0.2.6 para las leyes externas, sino que se suele utilizar la *notación binaria*. Así $\cdot(a, b)$ se denotará por $a \cdot b$. $\triangleleft$

Nota 0.2.8 Sean A, B dos conjuntos, $\cdot$ una operación interna sobre A y $A_1 \subseteq A$. Entonces $\cdot$ induce una ley externa de A_1 sobre B.
Del mismo modo, si $B_1 \subseteq B$ de manera que

$$a \cdot b \in B_1,\ \forall\, a \in A,\ \forall\, b \in B_1,$$

entonces $\cdot$ induce una ley externa de A sobre B_1. $\triangleleft$

0.2.3 Estructuras algebraicas

Definición 0.2.9

1) Un *grupoide* es un par $(A, \star)$ donde A es un conjunto y $\star$ es una operación interna sobre A.

2) Diremos que un grupoide $(A, \star)$ es un *semigrupo* si $\star$ es asociativa. Si además $\star$ es conmutativa, diremos que $(A, \star)$ es un *semigrupo conmutativo* o *abeliano*

3) Diremos que un semigrupo $(A, \star)$ es un *monoide* si $\star$ tiene elemento neutro. Si además $\star$ es conmutativa, diremos que $(A, \star)$ es un *monoide conmutativo* o *abeliano*

4) Diremos que un monoide $(A, \star)$ es un *grupo* si $\star$ tiene la propiedad de existencia de elemento simétrico. Si además $\star$ es conmutativa, diremos que $(A, \star)$ es un *grupo conmutativo* o *abeliano*

5) Una terna $(A, \star, \diamond)$, donde A es un conjunto y $\star, \diamond$ son dos operaciones internas sobre A se dice que es un *anillo* si

1. $(A, \star)$ es un grupo abeliano,
2. $(A, \diamond)$ es un semigrupo y
3. $\diamond$ es distributiva respecto de $\star$.

En caso de que $(A, \diamond)$ sea un monoide, se dice que $(A, \star, \diamond)$ es una *anillo unitario.*

En caso de que $(A, \diamond)$ sea un semigrupo conmutativo, se dice que $(A, \star, \diamond)$ es un *anillo conmutativo.*

Si $(A, \star, \diamond)$ es un anillo, la operación $\star$ se llama suma del anillo y se suele utilizar el símbolo $+$ para denotarla. Al elemento neutro de $(A, \star)$ se le suele denotar por 0_A (ó por 0 si no hay ambigüedad) y se llaman *opuestos* a los elementos simétricos.

La operación $\diamond$ se llama producto o multiplicación del anillo y se suele utilizar el símbolo $\cdot$ ó la yuxtaposición cuando no hay ambigüedad, para denotarla. Si el anillo es unitario, al elemento neutro de $(A, \diamond)$ se suele denotar por 1_A (o por 1 si no hay ambigüedad). Se utiliza el término *inverso* para denotar a los elementos simétricos de $(A, \diamond)$ cuando existan.

Se da precedencia al producto sobre la suma, lo cual es útil para simplificar la escritura de las expresiones.

6) Un *cuerpo* es un anillo $(A, +, \cdot)$ donde además $(A - \{0_A\}, \cdot)$ es un grupo.

Si además $(A - \{0\}, \cdot)$ es un grupo conmutativo, se dice que el cuerpo es *conmutativo* o *abeliano*.

7) Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo conmutativo y unitario. Un A-*módulo* es una terna $(M, \star, \diamond)$ donde $(M, \star)$ es un grupo abeliano y $\diamond$ es una ley externa de A sobre M,

$$\diamond : A \times M \longrightarrow M \ ,$$

verificando las siguientes propiedades

1. $a \diamond (p \star q) = a \diamond p \star a \diamond q, \ \forall\, a \in A, \ \forall\, p, q \in M.$
2. $(a + b) \diamond p = a \diamond p \star b \diamond p, \ \forall\, a, b \in A, \ \forall\, p \in M.$
3. $(a \cdot b) \diamond p = a \diamond (b \diamond p), \ \forall\, a, b \in A, \ \forall\, p \in M.$
4. $1_A \diamond p = p, \ \forall\, p \in M.$

La operación $\star$ se suele llamar la suma de M y se denota por $+$, siguiendo los mismos convenios que los de la suma de un anillo.

La ley externa $\diamond$ se suele llamar producto por escalares y se denota por $\cdot$ ó por yuxtaposición cuando es posible.

Se da precedencia a $\cdot$ sobre $\star$.

Puede parecer confuso utilizar la misma notación para operaciones diferentes, pero lo cierto es que en las fórmulas nunca hay ambigüedad posible y su escritura se vuelve más simple. Así por ejemplo las propiedades de la ley externa quedarían

1. $a(p + q) = ap + aq, \ \forall\, a \in A, \ \forall\, p, q \in M.$
2. $(a + b)p = ap + bp, \ \forall\, a, b \in A, \ \forall\, p \in M.$
3. $(ab)p = a(bp), \ \forall\, a, b \in A, \ \forall\, p \in M.$
4. $1_A p = p, \ \forall\, p \in M.$

Un A-módulo también se llama a veces módulo sobre A.

8) Un $\mathbb{K}$-*espacio vectorial* es un $\mathbb{K}$-módulo donde además $\mathbb{K}$ es un cuerpo (conmutativo).

9) Una A-*álgebra* es un anillo M con estructura de A-módulo y con la propiedad adicional

$$a(pq) = (ap)q = p(aq), \ \forall\, a \in A, \ \forall\, p, q \in M.$$

Nótese que por comodidad se emplea una misma notación para el producto de A, el producto de M y la ley externa de A sobre M. En las fórmulas no hay ambigüedad posible.

◁

0.3 Conjuntos de números

En la presente asignatura manejaremos los siguientes conjuntos de números, que se suponen conocidos, con las siguientes notaciones

- $\mathbb{N}$, números naturales ($\{1, 2, 3, \ldots\}$).
- $\mathbb{Z}$, números enteros ($\mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{-1, -2, -3, \ldots\}$).
- $\mathbb{Q}$, números racionales (fracciones).
- $\mathbb{R}$, números reales.
- $\mathbb{C}$, números complejos.

Observemos que el 0 no se considera número natural. Esto es un mero convenio y en otras referencias bibliográficas puede considerarse lo contrario.

El conjunto de números más importante para nosotros será $\mathbb{R}$. Sobre él y sus potencias definiremos los principales objetos que iremos estudiando a lo largo del curso.
A los elementos de $\mathbb{R}^n$ con $n \geq 2$ se les suele llamar *vectores* de n componentes.

Ejemplo 0.3.1

- $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \,/\, x, y \in \mathbb{R}\}$. Son los pares ordenados de números reales. Elementos concretos de $\mathbb{R}^2$ son por ejemplo

$$(0,0)\,,(-1,3)\,,(\pi,3/2)\,.$$

- $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \,/\, x, y, z \in \mathbb{R}\}$. Son tripletas de números reales. Elementos concretos de $\mathbb{R}^3$ son por ejemplo

$$(0,0,0)\,,(2,3,4)\,,(1/2,-7,345)\,.$$

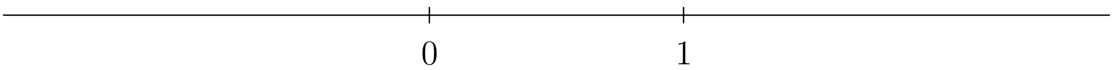
- $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$.

◁

0.4 Los números reales

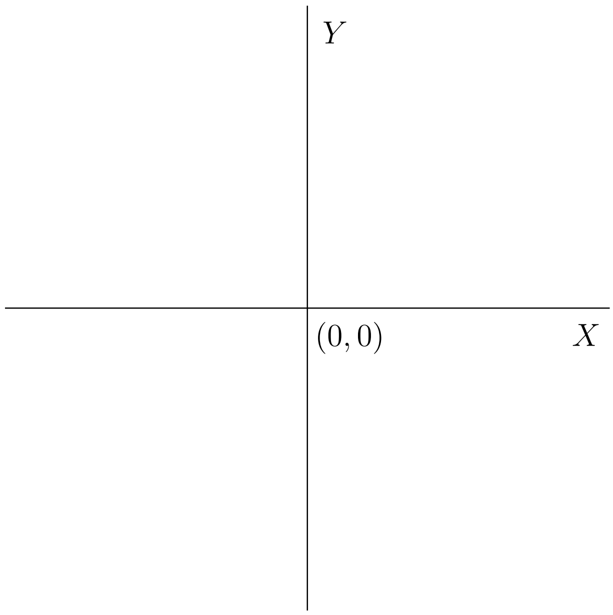
0.4.1 Representación gráfica de $\mathbb{R}^n$

Utilizaremos las representaciones gráficas habituales. Así por ejemplo $\mathbb{R}$ se representa gráficamente mediante una recta en la que se fija el origen y la unidad a la que se llama la *recta real*.

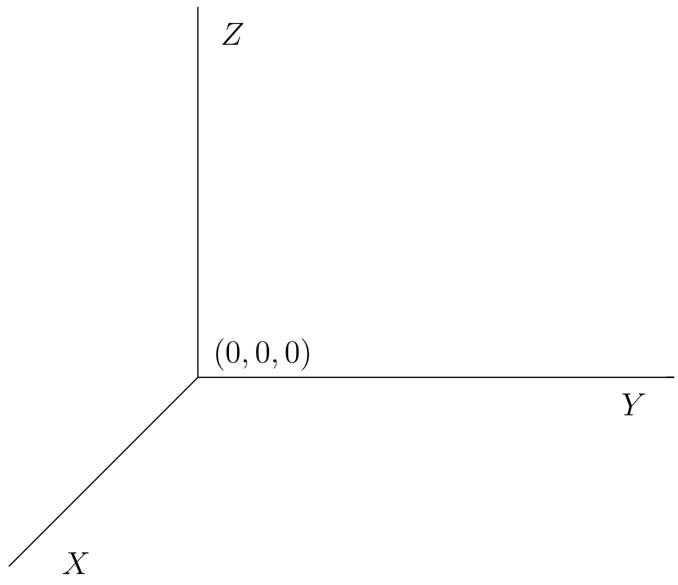


Intuitivamente podemos decir que $\mathbb{R}$ es el conjunto de números que *llena* completamente una recta sin dejar *agujeros*.

De la misma manera $\mathbb{R}^2$ se representa gráficamente mediante un plano en el que se fijan unos ejes coordenados que se cortan en $(0,0)$.
El eje horizontal es el eje de *abscisas*, eje OX o eje de las x. En él se representa la primera coordenada de cada punto de $\mathbb{R}^2$.
El eje vertical es el eje de *ordenadas*, eje OY o eje de las y. En él se representa la segunda coordenada de cada punto de $\mathbb{R}^2$.



Se suele representar $\mathbb{R}^3$ mediante tres ejes que se cortan en $(0,0,0)$ dibujados en el plano de la siguiente manera



donde si $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, x, y, z se representan en los ejes X, Y, Z respectivamente. No existen representaciones gráficas útiles para $\mathbb{R}^n$ con $n > 3$.

0.4.2 Relación de orden en $\mathbb{R}$

Los números de $\mathbb{R}$ están ordenados, según el orden convencional (denotado por $\leq$) que no vamos a detallar aquí. Las principales propiedades de dicho orden son las que se describen a continuación.

Propiedades 0.4.1 [Orden total]
Para cada a, b, c, $d \in \mathbb{R}$.

1) $a \leq b$ ó $b \leq a$.

2) $a \leq b$ y $b \leq a \Longrightarrow a = b$.

3) $a \leq b$ y $b \leq c \Longrightarrow a \leq c$.

$\triangleleft$

Propiedades 0.4.2 [Compatibilidad con la suma]
Para cada a, b, c, $d \in \mathbb{R}$.

1) $a \leq b \Longrightarrow a + c \leq b + c$.

2) $a \leq b$ y $c \leq d \Longrightarrow a + c \leq b + d$.

$\triangleleft$

Propiedades 0.4.3 [Producto y cociente]
Para cada a, b, c, $d \in \mathbb{R}$.

1) $a \leq b$ y $c \geq 0 \Longrightarrow ac \leq bc$.

2) $a \leq b$ y $c \leq 0 \Longrightarrow ac \geq bc$.

3) $ab > 0$ y $a \leq b \Longrightarrow 1/a \geq 1/b$.

4) $0 \leq a \leq b \Longrightarrow a^2 \leq b^2$.

$\triangleleft$

Las propiedades anteriores, salvo las dos primeras de la Proposición 0.4.1 son ciertas si se escriben en todos los lugares desigualdades estrictas.

Nota 0.4.4 Se establecen los siguientes símbolos

- ∞ infinito, y
- $-\infty$ menos infinito.

Por convenio

$$-\infty < a < \infty, \quad \forall\, a \in \mathbb{R}.$$

$\triangleleft$

0.4.3 Valor absoluto en $\mathbb{R}$

Definición 0.4.5 Sea $a \in \mathbb{R}$, llamaremos valor absoluto o módulo de a a la cantidad

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}.$$

$\triangleleft$

Propiedades 0.4.6 Sean a, $b \in \mathbb{R}$.

1) $|-a| = |a|$.

2) Si $k \in \mathbb{R}$ con $k \geq 0$,

$$|a| \leq k \Longleftrightarrow -k \leq a \leq k.$$

3) $|ab| = |a|\,|b|$.

4) $|a + b| \leq |a| + |b|$ (desigualdad triangular).

5) $|a-b| \leq |a|+|b|$.

6) $|a-b| \geq ||a|-|b|| \geq \begin{cases} |a|-|b| \\ |b|-|a| \end{cases}$.

7) $\sqrt{a^2} = |a|$.

$\triangleleft$

Nota 0.4.7 La Propiedad **2)**. También es cierta con desigualdades estrictas. Para la Propiedad **7)** adoptamos el convenio de que $\sqrt{\ }$ es la *raíz cuadrada positiva*. Cuando queramos expresar la *raíz cuadrada negativa* escribiremos explícitamente $-\sqrt{\ }$. $\triangleleft$

Nota 0.4.8 El valor absoluto sirve para *medir* la distancia entre dos números reales. Si $a,\ b \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{d}(a,b) = |a-b|\,,$$

es la longitud del segmento que une a y b, es decir lo que entendemos intuitivamente como distancia entre a y b. Por lo tanto $|a| = |a-0|$ también puede interpretarse como la distancia de a al cero. $\triangleleft$

0.4.4 Acotación

Definición 0.4.9 Diremos que un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ es o está *acotado* si existe $M \in \mathbb{R}$ tal que

$$|a| \leq M,\ \forall\, a \in A.$$

$\triangleleft$

La anterior condición de acotación es equivalente a

$$\exists\, M \in \mathbb{R} \,/\, -M \leq a \leq M,\ \forall\, a \in A.$$

Definición 0.4.10 Diremos que $A \subseteq \mathbb{R}$ está:

1) *Acotado inferiormente* si existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $a \geq M$ para cada $a \in A$.

2) *Acotado superiormente* si existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq M$ para cada $a \in A$.

$\triangleleft$

Proposición 0.4.11 De esta forma $A \subseteq \mathbb{R}$ está acotado si y sólo si está acotado superior e inferiormente simultáneamente. $\triangleleft$

Nota 0.4.12 Intuitivamente, un conjunto de $\mathbb{R}$ está acotado cuando *se encuentra en una región finita de* $\mathbb{R}$. $\triangleleft$

0.4.5 Intervalos

En $\mathbb{R}$ podemos considerar ciertos conjuntos especiales que llamaremos intervalos y que utilizaremos profusamente.

Definición 0.4.13 Sean $a,\ b \in \mathbb{R}$ con $a < b$.

1) *Intervalos cerrados*
$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \,/\, a \leq x \leq b\}\,.$$

2) *Intervalos abiertos*

$$\begin{aligned}
&(a,b) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, a < x < b\}\,,\\
&(a,\infty) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, a < x\}\,,\\
&(-\infty,a) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x < a\}\,,\\
&(-\infty,\infty) = \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

3) *Intervalos semiabiertos o semicerrados*

$$\begin{aligned}
&[a,b) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, a \leq x < b\}\,,\\
&(a,b] = \{x \in \mathbb{R} \,/\, a < x \leq b\}\,,\\
&[a,\infty) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, a \leq x\}\,,\\
&(-\infty,a] = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \leq a\}\,.
\end{aligned}$$

4) Sean $c, d \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ con $c < d$ y sea I un intervalo cualquiera con extremos c y d. Llamaremos *interior* al intervalo abierto

$$I^\circ = (c,d).$$

5) Si A es una unión de intervalos, llamaremos interior de A, y lo denotaremos por A°, a la unión de los interiores de todos los intervalos que forman A.

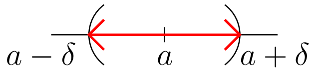
$\triangleleft$

0.4.6 Entornos en $\mathbb{R}$

Definición 0.4.14 Sean $a,\ \delta \in \mathbb{R}$ con $\delta > 0$. Llamaremos:

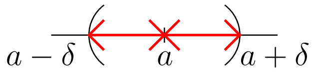
1) *Entorno* de centro a y radio δ al intervalo

$$(a-\delta, a+\delta) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, |x-a| < \delta\}\,.$$



2) *Entorno reducido* de centro a y radio δ al conjunto

$$(a-\delta, a+\delta) - \{a\} = (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, 0 < |x-a| < \delta\}\,.$$



3) Entorno (lateral) de a *por la derecha* de radio δ al intervalo

$$(a, a+\delta).$$

4) Entorno (lateral) de a *por la izquierda* de radio δ al intervalo

$$(a-\delta, a).$$

◁

Definición 0.4.15 [Entornos de $\pm\infty$]
Llamaremos:

1) Entorno, entorno reducido o entorno por la izquierda de ∞ a todo intervalo de la forma (b, ∞) con $b \in \mathbb{R}$.

2) Entorno, entorno reducido o entorno por la derecha de $-\infty$ a todo intervalo de la forma $(-\infty, b)$ con $b \in \mathbb{R}$.

◁

0.5 Los números complejos

Se define la unidad imaginaria como un símbolo i verificando la propiedad

$$i^2 = -1.$$

Llamaremos el conjunto de los números complejos a

$$\mathbb{C} = \{a + bi \,/\, a, b \in \mathbb{R}\},$$

es decir, es el conjunto formado por todos los binomios de la forma $a + bi$ con $a, b \in \mathbb{R}$. Si aplicamos la propiedad anterior $i^2 = -1$ a las sumas y multiplicaciones de dichos binomios, obtenemos

$$\begin{aligned}(a + bi) + (c + di) &= (a + c) + (b + d)i \\ (a + bi)(c + di) &= (ac - bd) + (ad + bc)i,\end{aligned}$$

es decir la suma de dos números complejos es otro número complejo y el producto de dos números complejos también es otro número complejo. Con estas dos operaciones $\mathbb{C}$ es un cuerpo. El elemento neutro para la suma sería $0+0i = 0$ y para el producto $1 + 0i = 1$.

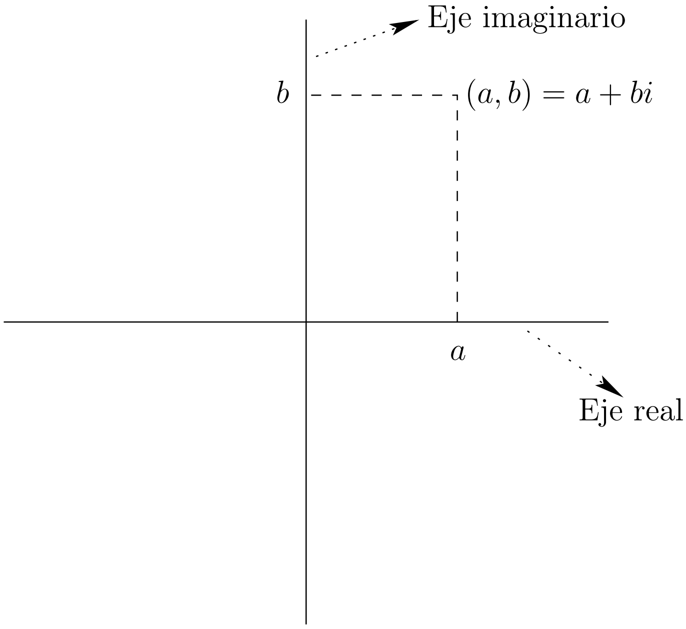
Los números reales son también números complejos, pues todo número real a es también un binomio $a + 0i \in \mathbb{C}$. De esta forma tenemos que $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$.
Los números complejos de la forma $ib = 0 + ib$ se llaman *imaginarios puros.*

Definición 0.5.1 Dado $z = a+bi \in \mathbb{C}$, diremos que a es la *parte real* de z y que b es la *parte imaginaria* de z. Denotaremos esto por $a = \Re z$ y $b = \Im z$ respectivamente. $\triangleleft$

Un número complejo z es un número real si y sólo si $\Im z = 0$ y es imaginario puro si y sólo si $\Re z = 0$.

0.5.1 Representación cartesiana

Dado un número complejo $z = a + bi$, podemos representarlo en un plano tomando el punto de coordenadas cartesianas (a, b). Dicho plano se llama el plano complejo. A su eje de abscisas se le llama el eje real y al de ordenadas el eje imaginario.



0.5.2 Módulo

Definición 0.5.2 El *módulo* de un número complejo $z = a + bi$ es el número real

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

◁

Propiedades 0.5.3 Sean $z, w \in \mathbb{C}$

1) $|z| \geq 0$.

2) $|z| = 0 \iff z = 0$.

3) $|z| = |-z|$.

4) $|zw| = |z|\,|w|$.

5) $|z + w| \leq |z| + |w|$.

6) $|z - w| \geq ||z| - |w||$.

◁

0.5.3 Conjugación

Definición 0.5.4 El *conjugado* de un número complejo $z = a + bi$ es el número complejo

$$\bar{z} = a - bi.$$

◁

Propiedades 0.5.5 Sean $z, w \in \mathbb{C}$

1) $\bar{\bar{z}} = z$.

2) $\overline{z + w} = \bar{z} + \overline{w}$.

3) $\overline{zw} = \bar{z}\overline{w}$.

4) $\bar{z} = z \iff z \in \mathbb{R}$.

5) $z\bar{z} = |z|^2$.

6) $\Re z = \dfrac{z + \bar{z}}{2}$.

7) $\Im z = \dfrac{z - \bar{z}}{2i}$.

◁

0.5.4 Argumento. Forma polar

Definición 0.5.6 Sea $z \in \mathbb{C} - \{0\}$. Llamaremos *argumento* de z a cualquier valor $\theta \in \mathbb{R}$ que verifique

$$\cos\theta = \frac{\Re z}{|z|},\ \operatorname{sen}\theta = \frac{\Im z}{|z|},$$

y lo denotaremos por $\arg z$. ◁

Nota 0.5.7 Un argumento de $z = a + bi \in \mathbb{C} - \{0\}$ es el ángulo que forma el vector (a, b) con el eje OX. ◁

Proposición 0.5.8 Sea $z \in \mathbb{C} - \{0\}$ y $\theta = \arg z$. Se tiene que

$$z = |z| (\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta),$$

expresión que recibe el nombre de *forma polar* de z. ◁

Propiedades 0.5.9 Sean $z, w \in \mathbb{C} - \{0\}$

1) $\arg \bar{z} = -\arg z$.

2) $\arg(-z) = \arg z + \pi$.

3) $\arg(zw) = \arg z + \arg w$.

4) $zw = |z|\,|w|\,(\cos(\arg z + \arg w) + i \operatorname{sen}(\arg z + \arg w))$.

5) $\arg(z/w) = \arg z - \arg w$.

6) $z/w = |z|\,/\,|w|\,(\cos(\arg z - \arg w) + i \operatorname{sen}(\arg z - \arg w))$.

$\triangleleft$

0.5.5 Exponencial compleja

Definición 0.5.10 La *exponencial* de un número complejo $z = a + bi$ es el número complejo

$$e^z = e^a(\cos b + i \operatorname{sen} b).$$

$\triangleleft$

Definición 0.5.11 Sea $z \in \mathbb{C} - \{0\}$ y $\theta = \arg z$. Se tiene que

$$z = |z|\, e^{i\theta},$$

expresión que recibe el nombre de *forma exponencial* de z. $\triangleleft$

0.6 Polinomios

Denotaremos por $\mathbb{R}[x]$ al anillo de polinomios con coeficientes reales en la variable x. Llamaremos a sus elementos *polinomios reales*.
Denotaremos por $\mathbb{C}[x]$ al anillo de polinomios con coeficientes complejos en la variable x. Llamaremos a sus elementos *polinomios complejos*.

Ejemplo 0.6.1 Los siguientes son polinomios reales en x

- $3x - 4$.
- $4x^3 - 7x + 1$.
- $x^5 - x^4 + 2x^3 - x^2 - 5x$.

Los siguientes son polinomios complejos en x

- $ix - 3 + 2i$.

- $x^2 - 2x + 3$.
- $(1-i)x^3 + 2ix^2 - 3x + 2$.

$\triangleleft$

Sea $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Si $p(x) \in \mathbb{K}[x]$ y $a \in \mathbb{K}$, podemos *evaluar* $p(x)$ en a sustituyendo x por a en $p(x)$ y aplicando la aritmética de $\mathbb{K}$, con lo que obtendremos un valor $p(a) \in \mathbb{K}$.

Ejemplo 0.6.2 Sea $p(x) = x^2 - 4x + 3$. Entonces $p(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = -1$. $\triangleleft$

Se tiene que $\mathbb{R}[x] \subset \mathbb{C}[x]$, por lo que todo polinomio real puede ser considerado como un polinomio complejo. Podremos utilizar este hecho cuando sea necesario, sin necesidad de mencionarlo explícitamente.
Esto hace que, por ejemplo, tenga sentido evaluar un polinomio real en un número complejo.

Ejemplo 0.6.3 Consideramos el polinomio real $p(x) = 2x + 1$. Podemos realizar la evaluación $p(1 + i) = 2(1 + i) + 1 = 2 + i$, para lo cual hemos considerado implícitamente $p(x)$ como un polinomio complejo. $\triangleleft$

Recordemos por último que el *grado* de un polinomio es el mayor exponente de la variable que figura de manera explícita en la expresión del polinomio. El grado siempre es un número de $\mathbb{N} \cup \{0\}$
Denotaremos por $\operatorname{grad} p(x)$ al grado de $p(x)$.

0.6.1 Raíces de los polinomios reales y complejos

Definición 0.6.4 Sean $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ y $p(x) \in \mathbb{K}[x]$. Diremos que $a \in \mathbb{K}$ es una *raíz* o un *cero* de $p(x)$ si $p(a) = 0$. $\triangleleft$

Nota 0.6.5 Debido al hecho antes mencionado de que todo polinomio real puede ser evaluado también en cualquier valor complejo, podemos extender la noción de raíz para polinomios reales. Así si $p(x) \in \mathbb{R}[x]$, podemos llamar también raíz de $p(x)$ a todo número complejo z tal que $p(z) = 0$.

Para distinguir esta extensión de la definición original, llamaremos *raíz real* de $p(x)$ los números reales que sean raíces de $p(x)$ y *raíces complejas* de $p(x)$ a los números de $\mathbb{C} - \mathbb{R}$ que sean raíces de $p(x)$. $\triangleleft$

Propiedades 0.6.6

1) Todo polinomio complejo tiene todas sus raíces en $\mathbb{C}$.

2) En particular, todo polinomio real tiene todas sus raíces en $\mathbb{C}$.

3) Sean $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ y $p(x) \in \mathbb{K}[x]$. Si $a \in \mathbb{K}$ es una raíz de $p(x)$, entonces existen $m \in \mathbb{N}$ y $q(x) \in \mathbb{K}[x]$ con $q(a) \neq 0$ tal que

$$p(x) = (x-a)^m q(x).$$

Al número m le llamaremos la multiplicidad de a en $p(x)$.

4) Si $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ y $z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ una raíz compleja de $p(x)$. Entonces $\bar{z}$ también es raíz de $p(x)$.

Podemos llamar multiplicidad de z en $p(x)$ como polinomio real a la multiplicidad de z en $p(x)$ como polinomio complejo. Se verifica que la multiplicidad de z en $p(x)$ coincide con la multiplicidad de $\bar{z}$ en $p(x)$.
Si m es la multiplicidad de $z = a + bi$ en $p(x)$, entonces existe un polinomio $q(x) \in \mathbb{R}[x]$ con $q(z) \neq 0$ tal que

$$p(x) = ((x-a)^2 + b^2)^m q(x).$$

5) Sea $p(x) \in \mathbb{R}[x]$. Existen $b \in \mathbb{R}$, $r, s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $a_1, \ldots, a_r \in \mathbb{R}$, $c_1 + d_1 i, \ldots, c_s + d_s i \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$, $m_1, \ldots, m_r \in \mathbb{N}$, $n_1, \ldots, n_s \in \mathbb{N}$ tales que

$$p(x) = b(x-a_1)^{m_1} \cdots (x-a_r)^{m_r} ((x-c_1)^2 + d_1^2)^{n_1} \cdots ((x-c_s)^2 + d_s^2)^{n_s}.$$

◁

Parte I

Cálculo infinitesimal

Capítulo 1

Funciones

1.1 Funciones y su representación gráfica

Definición 1.1.1 Una *función real de variable real* o simplemente una *función* definida sobre un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$, es una aplicación

$$\begin{aligned} f : A \subseteq \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned} .$$

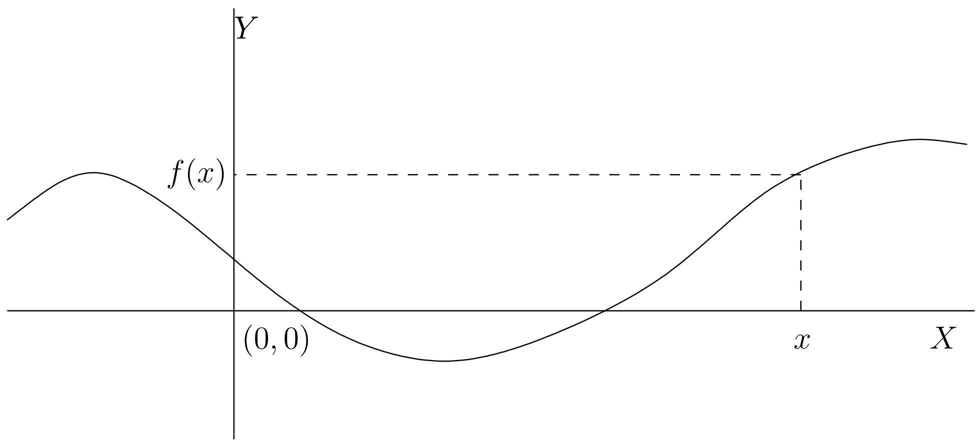
$\triangleleft$

Definición 1.1.2 Sea f una función definida sobre $A \subseteq \mathbb{R}$. Llamaremos *grafo* de f, y lo denotaremos por $\operatorname{graf} f$, al conjunto de $\mathbb{R}^2$

$$\operatorname{graf} f = \left\{ (x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x \in A \right\}.$$

$\triangleleft$

Cuando representamos gráficamente el conjunto $\operatorname{graf} f$ en $\mathbb{R}^2$, solemos obtener una línea similar a



llamada gráfica de la función f. La variable de la función varía en el eje de abscisas mientras que los valores de la función se mueven en el eje de ordenadas. La proyección de esta gráfica sobre el eje de abscisas es el dominio de definición de la función (el conjunto A de la Definición 1.1.2) y la proyección sobre el eje de ordenadas es exactamente el conjunto $\operatorname{Img} f$.

1.2 Funciones elementales

Daremos por supuesto que se conocen las funciones elementales que vamos a enumerar

- Funciones constantes
- Valor absoluto.
- Potencias.
- Exponenciales
- Logaritmos.
- Funciones trigonométricas.
- Funciones trigonométricas inversas.

Además consideraremos las siguientes funciones elementales

Definición 1.2.1 Reciben el nombre de *funciones hiperbólicas* las funciones siguientes

1) Seno hiperbólico

$$\begin{aligned} \operatorname{sh}: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \ . \end{aligned}$$

2) Coseno hiperbólico

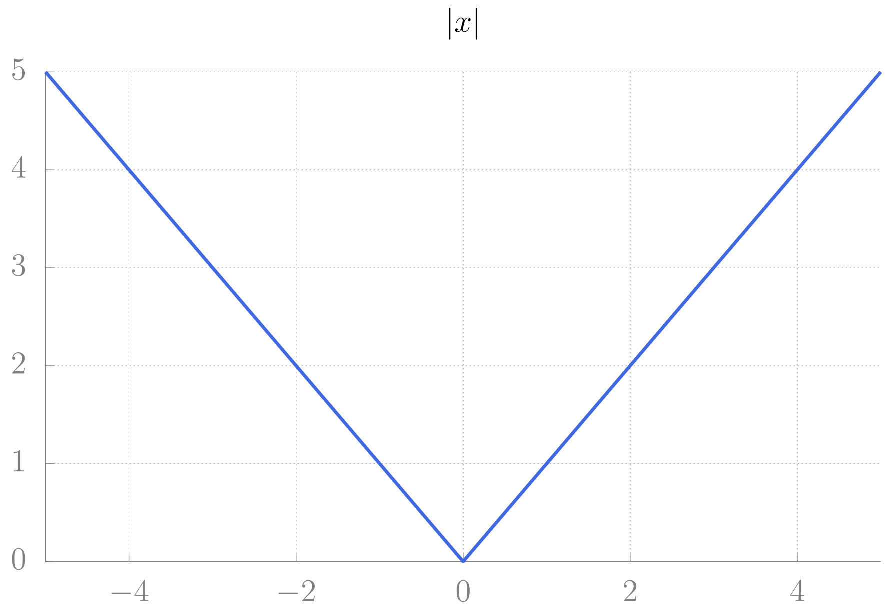
$$\begin{aligned} \operatorname{ch}: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \ . \end{aligned}$$

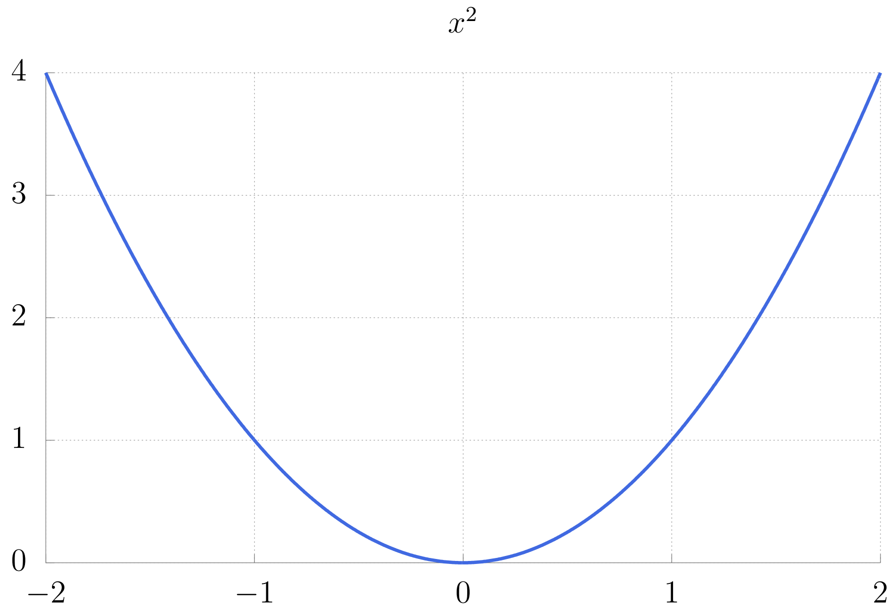
3) Tangente hiperbólica

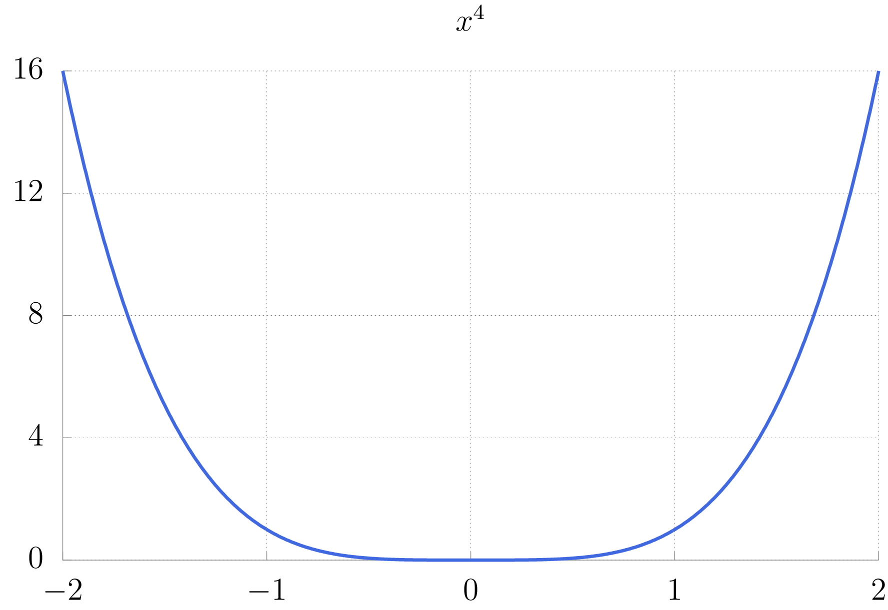
$$\begin{aligned} \operatorname{th}: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} \ . \end{aligned}$$

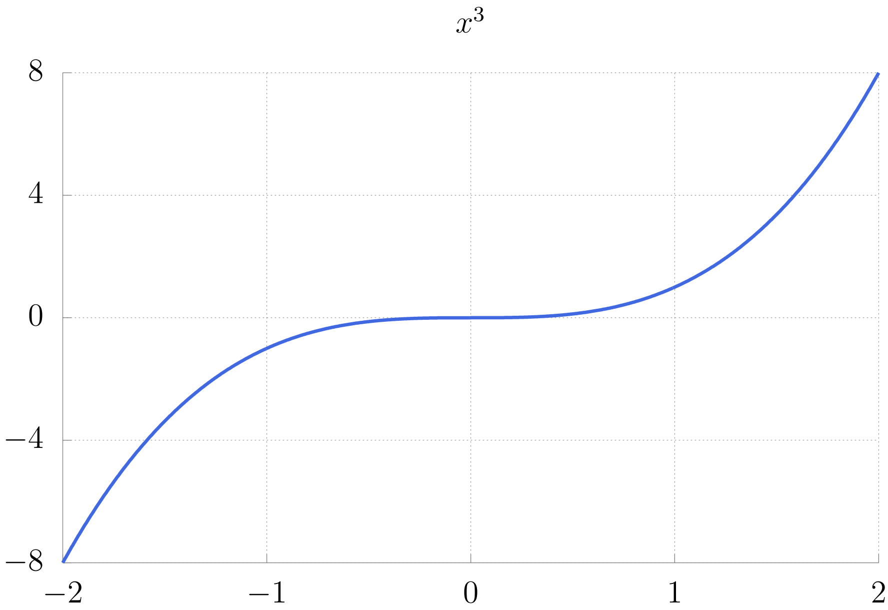
◁

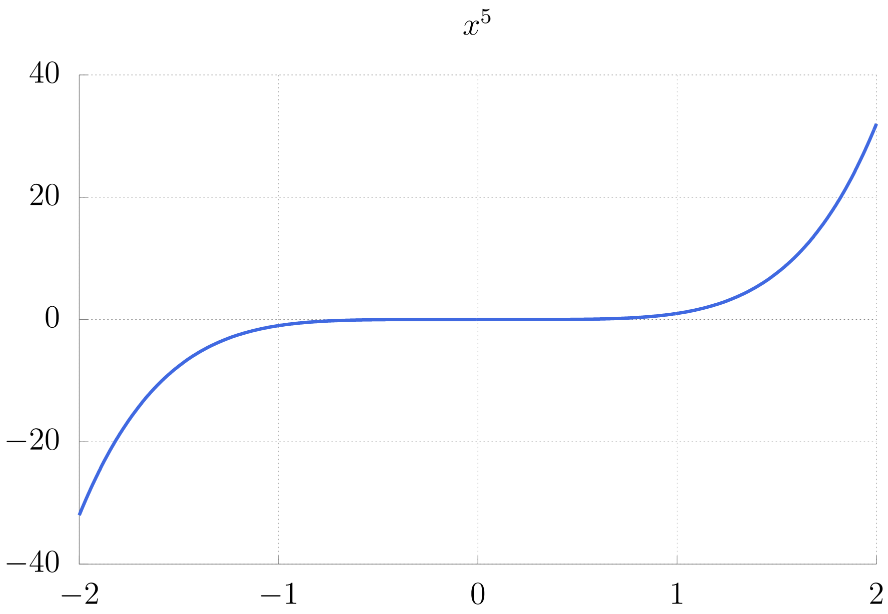
A continuación se muestran las gráficas de algunas funciones elementales de las categorías anteriores.

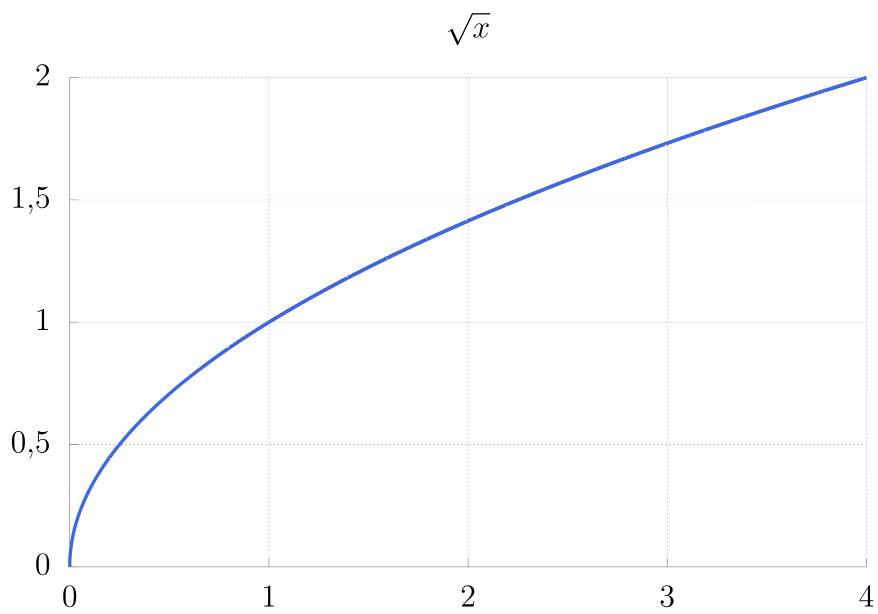


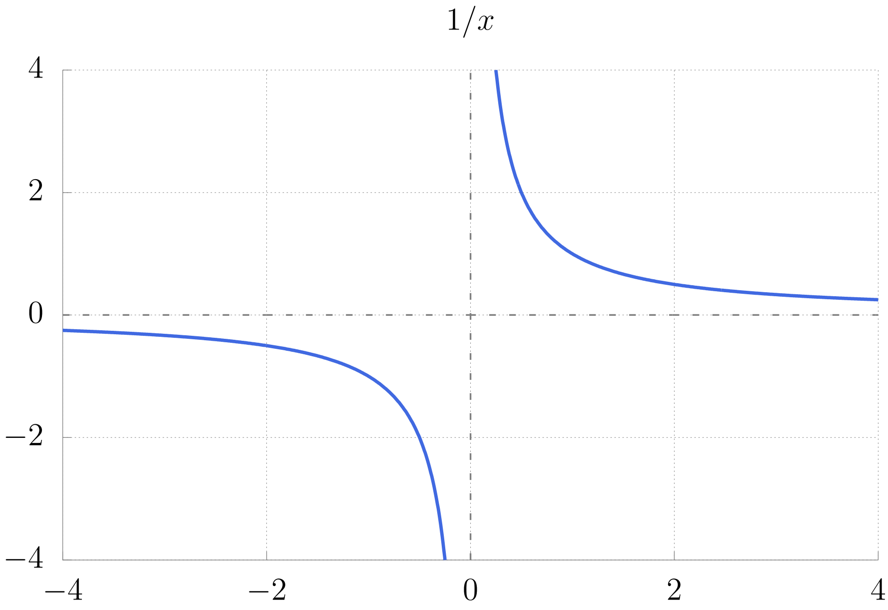


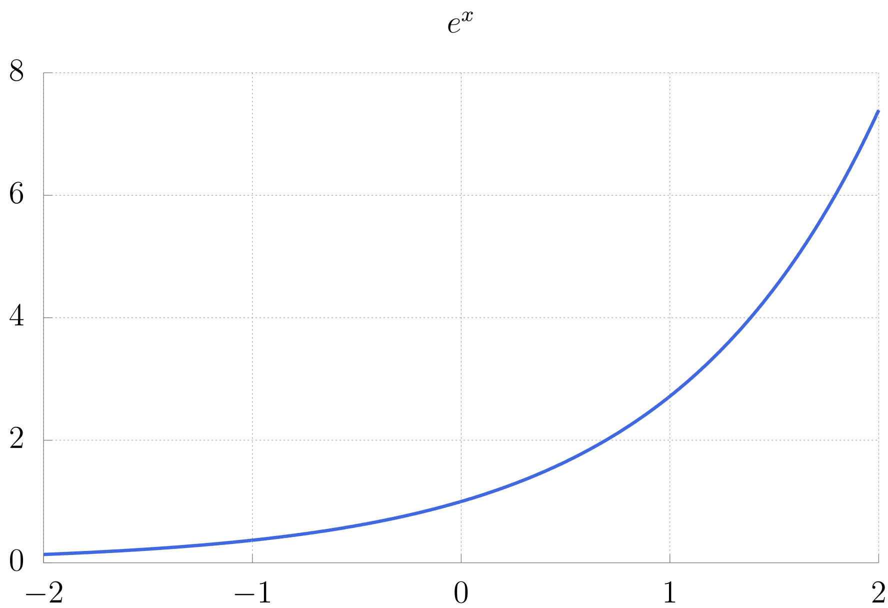

x^4
16
12
8
4
0
−2
−1
0
1
2

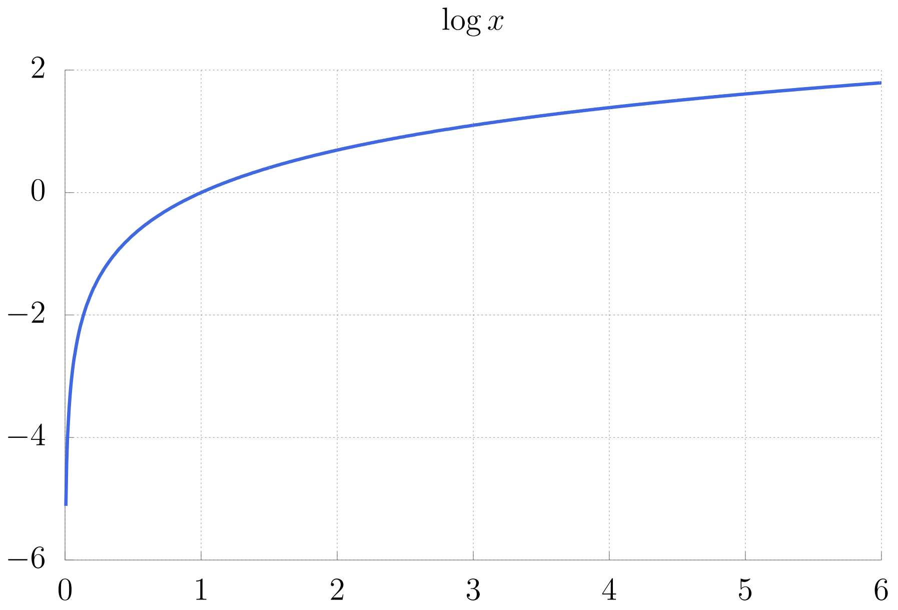

x^3
8
4
0
−4
−8
−2
−1
0
1
2

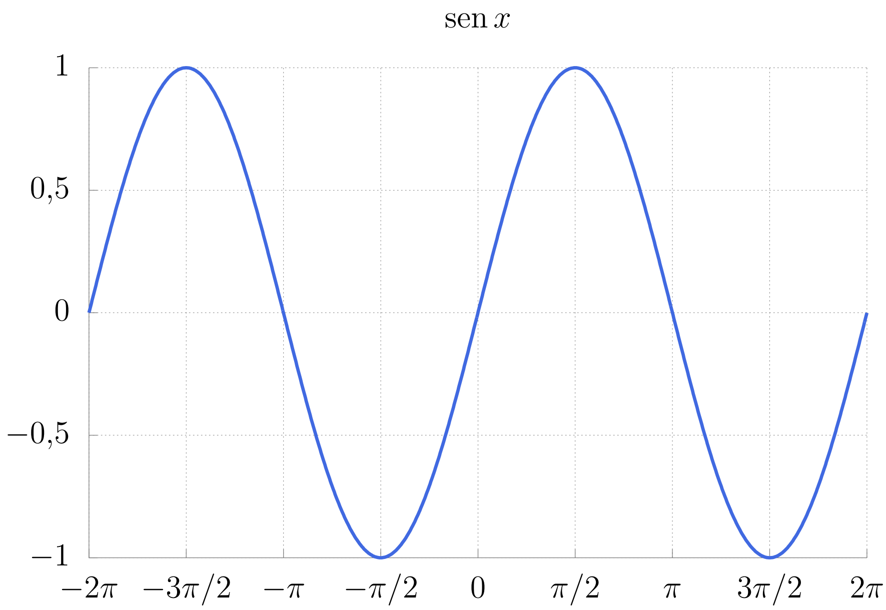

x^5
40
20
0
−20
−40
−2
−1
0
1
2

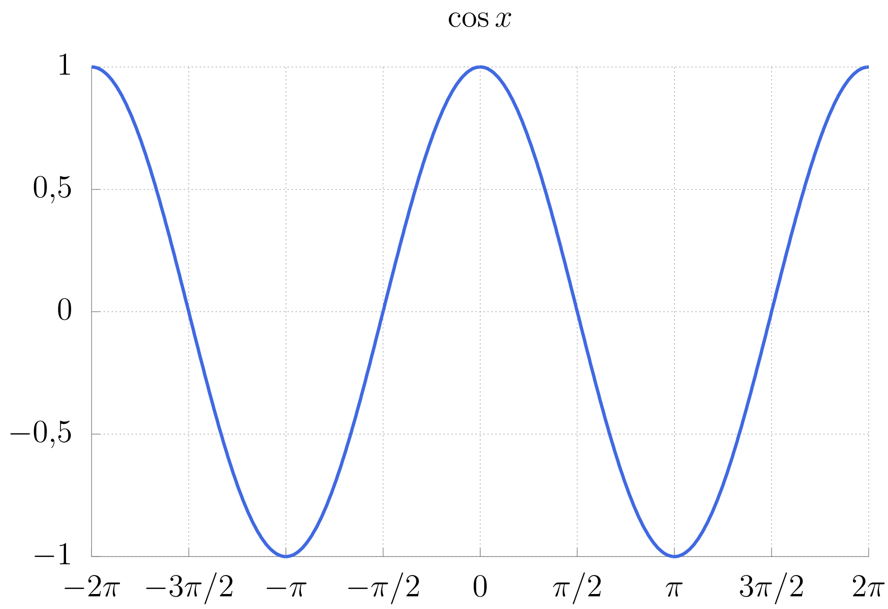

$\sqrt{x}$
2
1,5
1
0,5
0
0
1
2
3
4

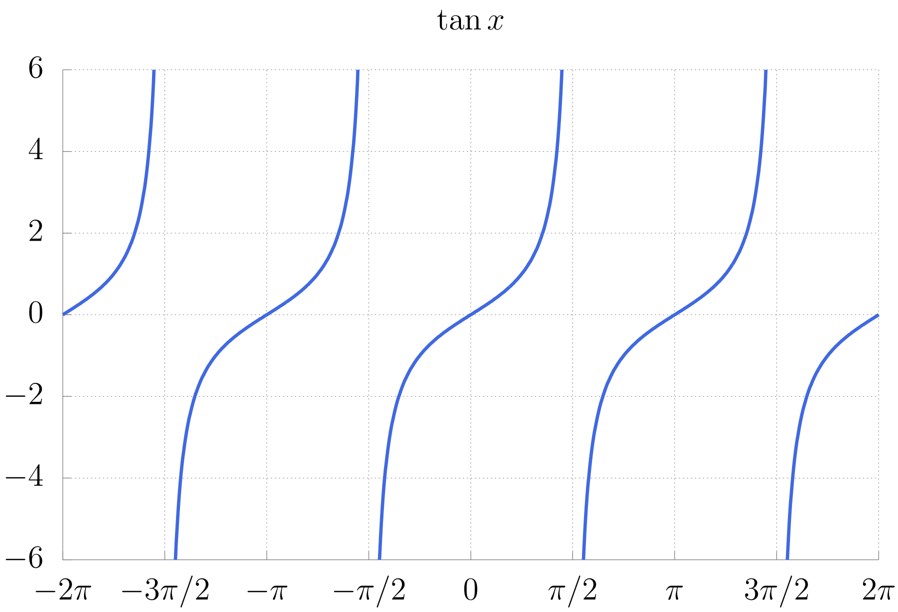

$1/x$
4
2
0
−2
−4
−4
−2
0
2
4

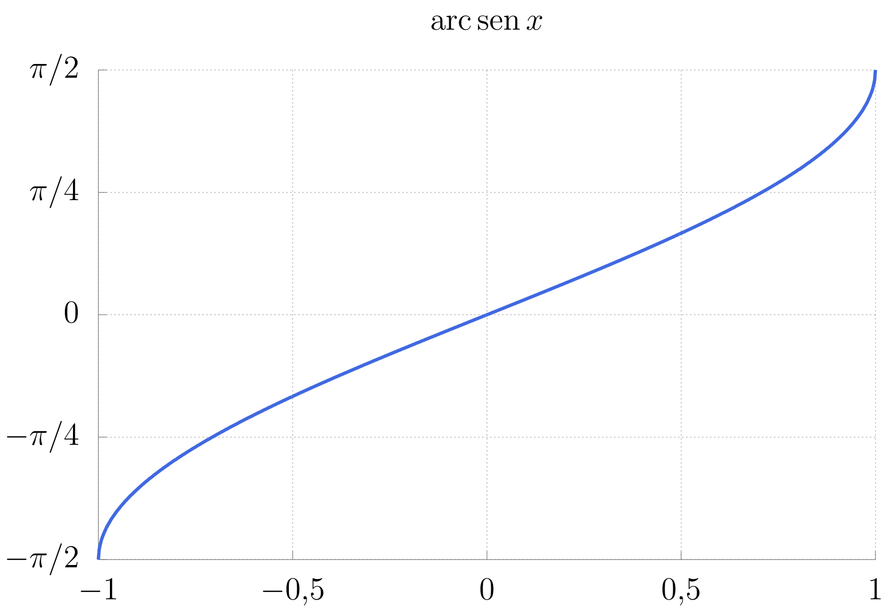

e^x
8
6
4
2
0
−2
−1
0
1
2

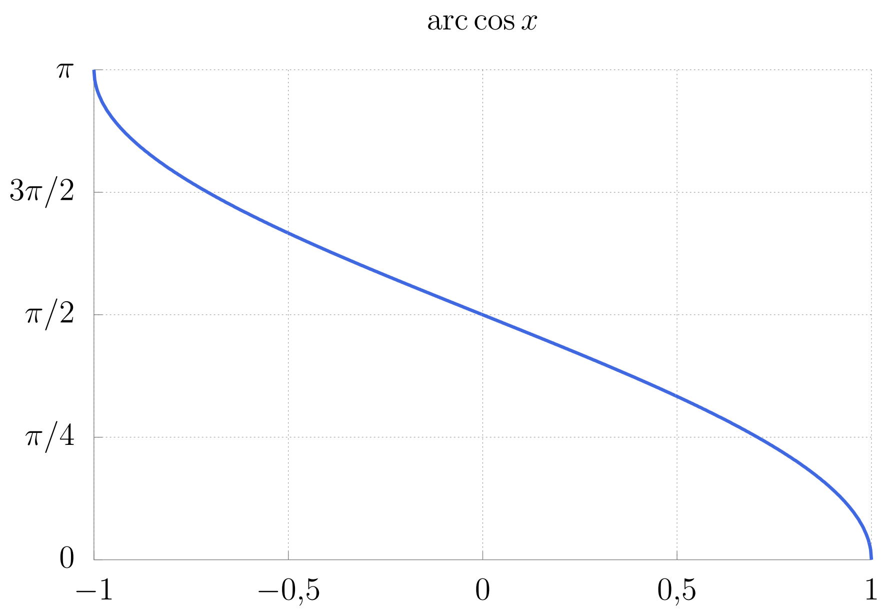

log x
2
0
−2
−4
−6
0
1
2
3
4
5
6

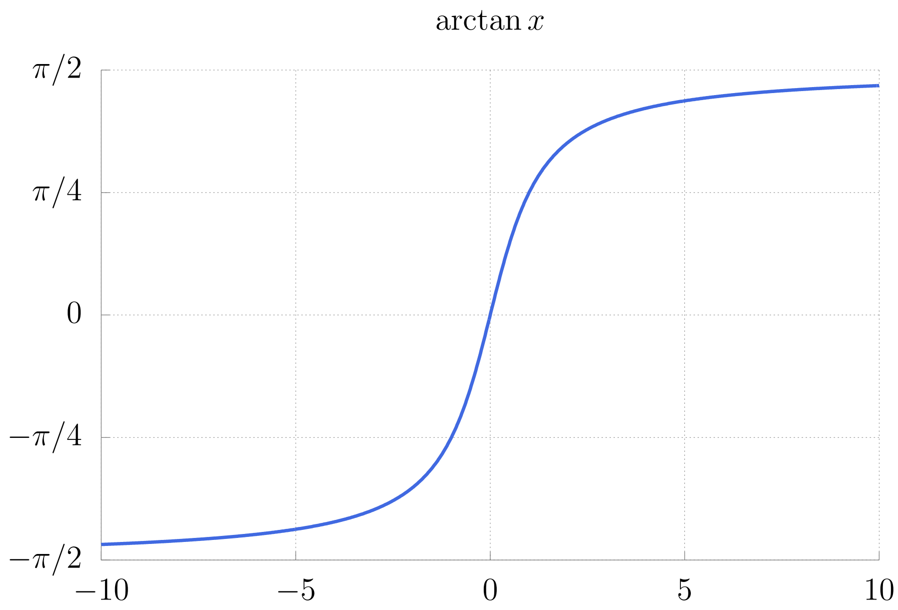

sen x
1
0,5
0
−0,5
−1
-2π
$-3\pi/2$
$-\pi$
$-\pi/2$
0
$\pi/2$
π
$3\pi/2$
2π

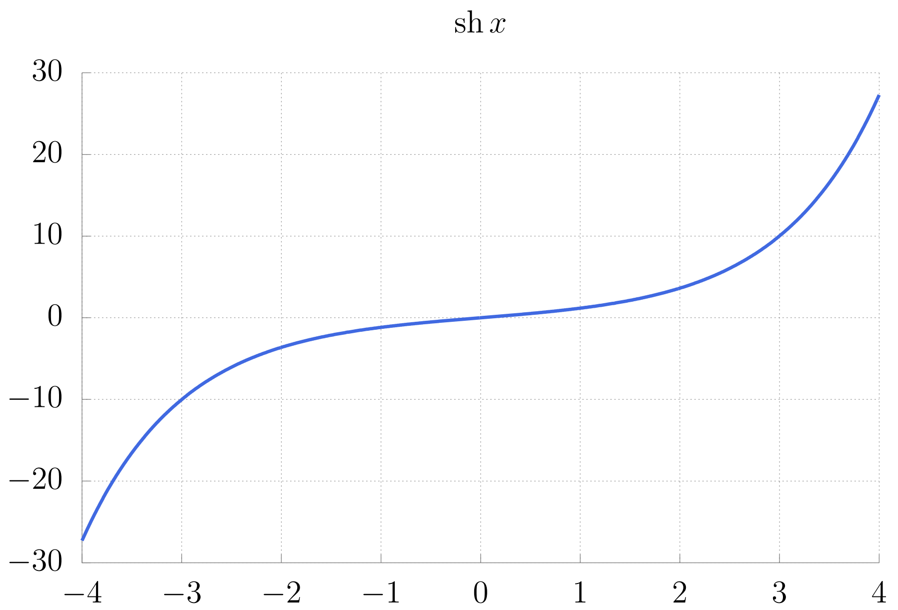

cos x
1
0,5
0
−0,5
−1
−2π −3π/2 −π −π/2 0 π/2 π 3π/2 2π

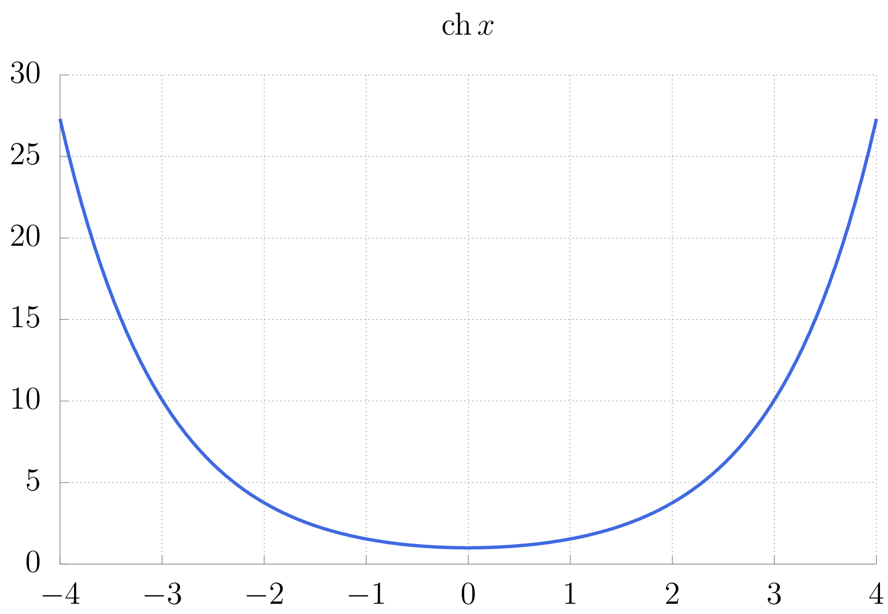

tan x
6
4
2
0
−2
−4
−6
−2π −3π/2 −π −π/2 0 π/2 π 3π/2 2π

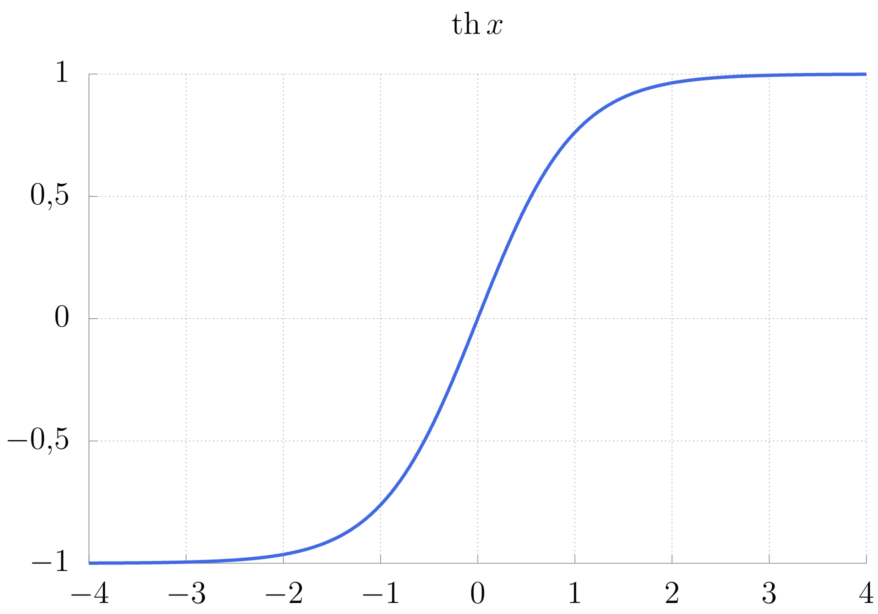

arc sen x
$\pi/2$
$\pi/4$
0
$-\pi/4$
$-\pi/2$
-1
$-0{,}5$
0
$0{,}5$
1


arc cos x
π
$3\pi/2$
$\pi/2$
$\pi/4$
0
-1
$-0{,}5$
0
$0{,}5$
1


arctan x
$\pi/2$
$\pi/4$
0
$-\pi/4$
$-\pi/2$
-10
-5
0
5
10


sh x
30
20
10
0
-10
-20
-30
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4





1.3 Propiedades de las funciones elementales

Algunas propiedades de las funciones elementales son las siguientes

1) $a^x a^y = a^{x+y},\ \forall\, a, x, y \in \mathbb{R}$ con $a > 0$

2) $(a^x)^b = a^{bx},\ \forall\, a, b, x \in \mathbb{R}$ con $a > 0$

3) $\log x + \log y = \log(xy),\ \forall\, x, y \in \mathbb{R}$ con $x > 0, y > 0$

4) $a \log x = \log(x^a),\ \forall\, a, x \in \mathbb{R}$ con $x > 0$

5) $\cos^2 a + \operatorname{sen}^2 a = 1,\ \forall\, a \in \mathbb{R}$

6) $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b,\ \forall\, a, b \in \mathbb{R}$

7) $\operatorname{sen}(a + b) = \operatorname{sen} a \cos b + \cos a \operatorname{sen} b,\ \forall\, a, b \in \mathbb{R}$

8) $\operatorname{sen}(-a) = -\operatorname{sen} a,\ \forall\, a \in \mathbb{R}$

9) $\cos(-a) = \cos(a),\ \forall\, a \in \mathbb{R}$

10) $\operatorname{ch}^2 a - \operatorname{sh}^2 a = 1,\ \forall\, a \in \mathbb{R}$

1.4 Aritmética de funciones

Definición 1.4.1 Sean $\lambda \in \mathbb{R}$ y

$$f, g : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

dos funciones. Se definen las siguientes *operaciones aritméticas de funciones*

1. Suma
$$(f + g)(x) = f(x) + g(x),\ \forall\, x \in A.$$

2. Producto
$$(fg)(x) = f(x)g(x),\ \forall\, x \in A.$$

3. Producto por un escalar.
$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x),\ \forall\, x \in A.$$

$\triangleleft$

Definición 1.4.2 Dadas

$$f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\quad g : B \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$

donde $\operatorname{Img} f \subseteq B$, se define la *composición* de f con g como

$$\begin{aligned} g \circ f : A \subseteq \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto g \circ f(x) = g(f(x)) \end{aligned}.$$

Esquemáticamente

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "g \circ f"] & \mathbb{R} \arrow[r, "g"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

◁

Definición 1.4.3 Sea

$$f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

inyectiva, y sea $B = \operatorname{Img} f$. Llamaremos *función inversa* de f a

$$\begin{array}{rl} f^{-1} : B & \longrightarrow \mathbb{R} \\ y & \longmapsto f^{-1}(y) \end{array},$$

donde $f^{-1}(y)$ es el valor de la inversa de f como aplicación para cada $y \in B$. ◁

A partir de las funciones elementales y de la aritmética, se pueden definir muchas de las funciones que manejaremos normalmente, como por ejemplo las funciones polinómicas y racionales.

1.5 Acotación

Definición 1.5.1 Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Diremos que

1) La función f es *acotada* si $\operatorname{Img} f$ es un conjunto acotado.

2) La función f es *acotada inferiormente* si $\operatorname{Img} f$ es un conjunto acotado inferiormente.

3) La función f es *acotada superiormente* si $\operatorname{Img} f$ es un conjunto acotado superiormente.

◁

1.6 Ejercicios

Ejercicio 1.1 Escribir como combinaciones lineales de funciones del conjunto

$$\{\operatorname{sen} nx \,/\, n \in \mathbb{N}\} \cup \{\cos nx \,/\, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\},$$

las expresiones siguientes

a) $3 \operatorname{sen}^3 x + 5 \cos^2 x$.

b) $7 \cos^2 x \operatorname{sen}^4 x - 2 \cos^5 x \operatorname{sen} x$.

Capítulo 2

Continuidad y límites

2.1 Funciones continuas

2.1.1 Continuidad en un punto

Definición 2.1.1 Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ una unión de intervalos, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función y $a \in A$. Diremos que f es *continua en el punto* a si para cada entorno V de $f(a)$ existe un entorno U de a tal que $f(x) \in V$, $\forall\, x \in U \cap A$. $\triangleleft$

Obsérvese que nuestra definición de continuidad de una función depende explícitamente del dominio de definición de f. Es posible encontrar funciones que no sean continuas en un determinado punto, pero que admitan restricciones continuas en dicho punto.
Por el contrario, se tiene que

Proposición 2.1.2 Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ una unión de intervalos, f una función definida en A y $a \in A$. Si B es otra unión de intervalos verificando $a \in B \subseteq A$, entonces la restricción $f|_B$ es continua en a. $\triangleleft$

2.1.2 Continuidad en una unión de intervalos

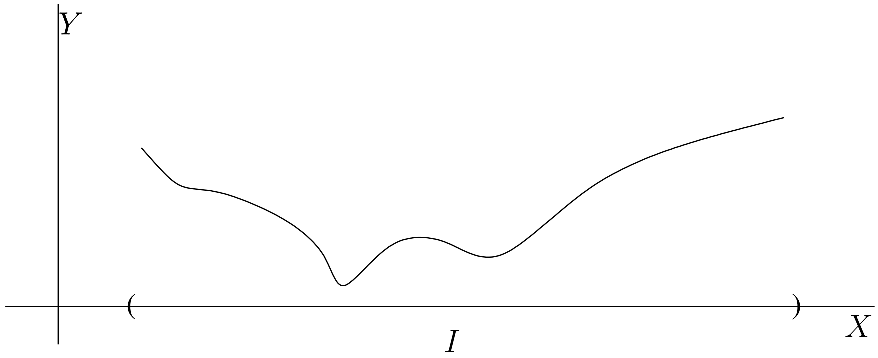
Definición 2.1.3 Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ una unión de intervalos, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Diremos que f es *continua en la unión de intervalos* A si es continua en a, $\forall\, a \in A$
$\triangleleft$

Proposición 2.1.4 Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ una unión de intervalos y f una función definida en A. Si B es otro intervalo verificando $B \subseteq A$, entonces la restricción $f|_B$ es continua en B. $\triangleleft$

Nota 2.1.5 Todo lo visto hasta ahora en este capítulo es válido para el caso en que el dominio de la función es un intervalo, pues un sólo intervalo puede ser visto también como una unión de intervalos.

De hecho casi todas las cuestiones importantes que atañen a la continuidad se enuncian para funciones definidas en intervalos. Aquí hemos preferido tratar lo anterior en términos de uniones de intervalos, pues con ello se evitan ciertos problemas técnicos que surgen al intentar extender la noción de continuidad en un intervalo a conjuntos más generales como las uniones de intervalos. ◁

Intuitivamente podríamos considerar que una función continua en un intervalo es una función cuya gráfica se puede trazar a lo largo del intervalo sin interrupciones, como la de la siguiente figura



Si bien la afirmación anterior es esencialmente falsa, a nivel intuitivo sirve para la mayoría de las funciones normalmente utilizadas.

2.2 Aritmética de funciones continuas

Veremos aquí que la composición, suma, producto y en algunos casos el cociente, de funciones continuas es una función continua.

Proposición 2.2.1 Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ una unión de intervalos, f, g funciones definida en A continuas en un punto $a \in A$. Se tiene

1) $f + g$ es continua en a.

2) $f \cdot g$ es continua en a.

3) Sea $B = \{x \in A \,/\, g(x) \neq 0\}$. Si B es una unión de intervalos y $a \in B$, la función f/g definida en B, es continua en a.

◁

A partir de estas propiedades se deduce que las funciones polinómicas son continuas en $\mathbb{R}$ y que las funciones racionales son continuas en todo $\mathbb{R}$ salvo en los puntos donde se anula el denominador

Proposición 2.2.2 Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}$ uniones de intervalos, f una función definida en A, g otra función con dominio de definición B tal que $\operatorname{Img} f \subseteq B$ y $a \in A$. Si f es continua en a y g es continua en $f(a)$, entonces $g \circ f$ es continua en a. $\triangleleft$

Con todas estas propiedades es sencillo estudiar la continuidad de las funciones que se construyen mediante operaciones aritméticas, composición e inversión a partir de las funciones elementales. Estas son esencialmente el tipo de funciones con las que trabajaremos.

2.3 Teorema de Weierstraß

Teorema 2.3.1 Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$. Entonces existen $x_1, x_2 \in [a,b]$ tales que

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2),\ \forall\, x \in [a,b].$$

$\triangleleft$

A un x_1 como el del enunciado anterior se le llama *mínimo absoluto* de f en $[a,b]$ y a x_2 *máximo absoluto* de f en $[a,b]$. Se llama a ambos conjuntamente *extremos absolutos* de f en $[a,b]$

Expresado con un lenguaje no formal, el teorema de Weierstraß nos dice que una función continua en un intervalo cerrado posee extremos absolutos en dicho intervalo.

2.4 Teorema de Bolzano

Teorema 2.4.1 Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$ tal que $f(a)f(b) < 0$. Entonces existe $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = 0$. $\triangleleft$

El teorema de Bolzano tiene una relevancia computacional de primer orden, pues permite describir algoritmos para aislar raíces de funciones continuas dentro de una determinada tolerancia

También permite describir un método conceptualmente simple, aunque no el más eficiente, para, una vez localizada, obtener computacionalmente una raíz de una función continua con la precisión que sea necesaria.

2.5 Discontinuidades I

La continuidad es una propiedad deseable en una función, y la mayor parte de las funciones que se manejan en las aplicaciones son continuas. Sin embargo, hay funciones que presentan puntos en los que no son continuas. Estos puntos se llaman discontinuidades

Definición 2.5.1 Sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, donde A es una unión de intervalos. Diremos que $a \in A$ es una *discontinuidad* de f, si f no es continua en a. $\triangleleft$

Las discontinuidades suelen representar en los problemas de la vida real, lugares donde existe alguna dificultad importante. Por eso es necesario conocerlas. Afortunadamente existe una herramienta para estudiarlas: los límites de funciones en un punto. No debemos sin embargo pensar que la noción de límite que veremos a continuación sirve solo para estudiar discontinuidades.

2.6 Límites

Definición 2.6.1 Sean $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ verificando que existe al menos W entorno reducido de a con $W \subseteq A$. Si existe $L \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ tal que para cada V entorno de L, existe un U entorno reducido de a tal que

$$f(x) \in V, \ \forall\, x \in U \cap A,$$

entonces diremos que existe el *límite* de $f(x)$ cuando x tiende hacia a y que su valor es L. Denotaremos este hecho por

$$\lim_{x \to a} f(x) = L.$$

$\triangleleft$

Abreviadamente, cuando no haya ambigüedad en vez de decir límite de $f(x)$ cuando x tiende hacia a, podremos decir límite de f en a.

Nota 2.6.2 Sean $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ verificando que existe al menos W entorno reducido de a con $W \subseteq A$. Se tiene:

1) El límite de $f(x)$ cuando x tiende hacia a puede existir o no.

2) Si $\exists \lim_{x \to a} f(x)$ entonces es único.

3) El límite de f cuando x tiende hacia a, aun cuando $a \in \mathbb{R}$, no depende del valor de la f en a. De hecho f ni siquiera tiene por qué estar definida en a.

$\triangleleft$

Proposición 2.6.3 Sean $A \subseteq \mathbb{R}$, $\ f : A \longrightarrow \mathbb{R}\ $ y $a \in A$ verificando que existe al menos un W entorno de a con $W \subseteq A$. Entonces f es continua en a si y sólo si existe el límite de f cuando x tiende hacia a y además

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

$\triangleleft$

La proposición 2.6.3 relaciona el límite con la continuidad y tiene una primera consecuencia de gran utilidad: Si una función f es continua en un entorno de un punto $a \in \mathbb{R}$, entonces para calcular $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, basta con evaluar f en a. Esto nos permitiría calcular fácilmente los siguientes límites

Ejemplo 2.6.4

- $\lim\limits_{x \to 2} x^2 + 2x - 1 = 7.$
- $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} = 3.$
- $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1.$
- $\lim\limits_{x \to \pi} e^x \cos x - \operatorname{sen}(x/2) = -e^{\pi} - 1.$

$\triangleleft$

2.7 Límites laterales

Definición 2.7.1 Sean $A \subset \mathbb{R}$, $\ f : A \longrightarrow \mathbb{R}\ $ y $a \in \mathbb{R}$ verificando que existe al menos W entorno por la derecha de a con $W \subseteq A$. Si existe $L \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ tal que para cada V entorno de L, existe un U entorno por la derecha de a tal que

$$f(x) \in V,\ \forall\, x \in U \cap A,$$

entonces diremos que existe el *límite por la derecha* de $f(x)$ cuando x tiende hacia a y que su valor es L. Denotaremos este hecho por

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L.$$

$\triangleleft$

Definición 2.7.2 Sean $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{R}$ verificando que existe al menos W entorno por la izquierda de a con $W \subseteq A$. Si existe $L \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ tal que para cada V entorno de L, existe un U entorno por la izquierda de a tal que

$$f(x) \in V,\ \forall\, x \in U \cap A,$$

entonces diremos que existe el *límite por la izquierda* de $f(x)$ cuando x tiende hacia a y que su valor es L. Denotaremos este hecho por

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L.$$

◁

A los límites por la derecha e izquierda de f en a se les llama límites laterales de f en a, y al igual que con el límite, puede suceder que existan o que no existan, pero si existen, son únicos.

Proposición 2.7.3 Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ Se verifican las siguientes propiedades

1) f es continua en a si y solo si $\exists \lim\limits_{x \to a^+} f$ y su valor es $f(a)$.

2) f es continua en b si y solo si $\exists \lim\limits_{x \to b^-} f$ y su valor es $f(b)$.

◁

Proposición 2.7.4 Sean $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{R}$ verificando que existe al menos W entorno reducido de a con $W \subseteq A$. Se tiene que

$$\exists \lim_{x \to a} f(x) \Longleftrightarrow \exists \lim_{x \to a^+} f(x),\ \exists \lim_{x \to a^-} f(x) \text{ y además } \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x).$$

Adicionalmente, en caso de existencia del límite, se tiene que

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x).$$

◁

El resultado 2.7.4 sirve, entre otras cosas, para estudiar la continuidad de funciones definidas a trozos en los puntos donde cambia la definición de la función.

Ejemplo 2.7.5 Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & \text{si } x \leq 1 \\ x^2, & \text{si } x > 1 \end{cases}.$$

Estudiar su continuidad en $x = 1$. ◁

Ejemplo 2.7.6 Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x, & \text{si } x \leq \pi/2 \\ 1 - \cos x, & \text{si } x > \pi/2 \end{cases}.$$

Estudiar su continuidad en $x = \pi/2$. ◁

2.8 Discontinuidades II

Podemos clasificar las discontinuidades de una función según el estudio de ciertos límites.

Definición 2.8.1 Sean $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ y $a \in A$ verificando que existe al menos W entorno de a con $W \subseteq A$. Supongamos que a es una discontinuidad de f. Diremos que a es

1) Una *discontinuidad de primera especie*, si se verifica una de las dos condiciones siguientes

 1.1) Existe $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ y es finito. En este caso diremos que a es una *discontinuidad evitable* de f.

 1.2) Existen $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ y ambos son finitos pero distintos. En este caso diremos que a es una *discontinuidad de salto finito* de f.

2) Una *discontinuidad de segunda especie*, si no pertenece a ninguno de los casos anteriores.

◁

Ejemplo 2.8.2

- Un ejemplo de discontinuidad evitable lo presenta por ejemplo en 0 la función

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x, & \text{si } x \neq 0 \\ 2, & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

- La discontinuidad de la función del Ejemplo 2.7.5 en el punto 1 es de salto finito.

- Ejemplos de discontinuidades de segunda especie son los que presentan la función

$$f(x) = \begin{cases} 1/x, & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

 en el punto 0 o la función

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(1/x), & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

 también en el punto cero

◁

2.9 Cálculo de límites

2.9.1 Algunos casos particulares

El siguiente resultado nos muestra como son los límites en 0 y en $\pm\infty$ de las potencias enteras no triviales de la variable.

Proposición 2.9.1 Sea $n \in \mathbb{N}$. Tenemos que

1) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x^n} = \infty$

2) $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x^n} = \begin{cases} \infty, & \text{si } n \text{ par} \\ -\infty, & \text{si } n \text{ impar} \end{cases}$

3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^n} = \begin{cases} \infty, & \text{si } n \text{ par} \\ \text{No existe}, & \text{si } n \text{ impar} \end{cases}$

4) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x^n} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$

5) $\lim\limits_{x \to \infty} x^n = \infty$

6) $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = \begin{cases} \infty, & \text{si } n \text{ par} \\ -\infty, & \text{si } n \text{ impar} \end{cases}$

$\triangleleft$

Veremos que muchos límites se reducen a estos.

2.9.2 Acotación. Regla del sandwich

Proposición 2.9.2 Sean $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ y f, g dos funciones definidas al menos en W entorno reducido de a. Si f es acotada en W y $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$, entonces

$$\lim_{x \to a} f(x)g(x) = 0.$$

$\triangleleft$

Proposición 2.9.3 Sea $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$, f y g definidas al menos en un W entorno reducido de a verificando $f(x) \leq g(x)$, $\forall\, x \in W$. Si existen los límites de f y g en a, entonces

$$\lim_{x \to a} f(x) \leq \lim_{x \to a} g(x).$$

$\triangleleft$

Nota 2.9.4 Aunque en el enunciado de la proposición anterior impongamos $f(x) < g(x)$, no se puede garantizar que la desigualdad de los límites sea estricta. $\lhd$

Proposición 2.9.5 [Regla del sandwich]
Sea $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ y f, g y h funciones definidas al menos en un W entorno reducido de a verificando $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, $\forall\, x \in W$. Si existen los límites de f y h en a y

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x),$$

entonces también existe $\lim\limits_{x \to a} g(x)$ y además

$$\lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x).$$

$\lhd$

2.9.3 Cambio de variable

Consideraremos tres cambios de variable.

Proposición 2.9.6

1) Cambio $\boxed{x = y + a}$

Sea $a \in \mathbb{R}$ y f definida al menos en un entorno reducido de a. Se tiene que

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{y \to 0} f(y + a)$$

2) Cambio $\boxed{x = \dfrac{1}{y}}$

2.1) Si f está definida en un entorno reducido de ∞,

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{y \to 0^+} f\left(\frac{1}{y}\right)$$

2.2) Si f está definida en un entorno reducido de $-\infty$,

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{y \to 0^-} f\left(\frac{1}{y}\right)$$

2.3) Si f está definida en un entorno por la derecha de 0,

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{y \to \infty} f\left(\frac{1}{y}\right)$$

2.4) Si f está definida en un entorno por la izquierda de 0,

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{y\to -\infty} f\left(\frac{1}{y}\right)$$

3) Cambio $\boxed{x = by}$

Sean $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} - \{0\}$ y f definida al menos en un entorno reducido de a. Se verifica

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{y\to a/b} f(by)$$

◁

2.9.4 Aritmética

2.9.4.1 Suma

Sea $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ y f, g definidas al menos en un entorno reducido de a, tales que existen los límites de f y g en a y con

$$\lim_{x\to a} f(x) = c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\},\ \lim_{x\to a} g(x) = d \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}.$$

Entonces

1) Si $c, d \in \mathbb{R}$, entonces existe el límite de $f + g$ en a y

$$\lim_{x\to a}(f+g)(x) = c + d.$$

2) Si se verifica al menos una de las dos condiciones siguientes

- $c \neq -\infty$ y $d = \infty$, ó
- $c = \infty$ y $d \neq -\infty$,

entonces existe el límite de $f + g$ en a y

$$\lim_{x\to a}(f+g)(x) = \infty.$$

3) Si se verifica alguna de las dos condiciones siguientes

- $c \neq \infty$ y $d = -\infty$, ó
- $c = -\infty$ y $d \neq \infty$,

entonces existe el límite de $f+g$ en a y

$$\lim_{x\to a}(f+g)(x) = -\infty.$$

4) Si se verifica alguna de las dos condiciones siguientes

- $c=-\infty$ y $d=\infty$, ó
- $c=\infty$ y $d=-\infty$,

entonces no se sabe nada sobre $\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x)$. En este caso diremos que se tiene una *indeterminación* de tipo $\infty-\infty$

2.9.4.2 Producto

Sea $a\in\mathbb{R}\cup\{-\infty,\infty\}$ y f,g definidas al menos en un entorno reducido de a, tales que existen los límites de f y g en a y con

$$\lim_{x\to a} f(x) = c\in\mathbb{R}\cup\{-\infty,\infty\},\ \lim_{x\to a} g(x) = d\in\mathbb{R}\cup\{-\infty,\infty\}.$$

Entonces

1) Si $c,d\in\mathbb{R}$, entonces existe el límite de fg en a y

$$\lim_{x\to a}(fg)(x) = cd.$$

2) Si se verifica alguna de las cuatro condiciones siguientes

- $c>0$ y $d=\infty$, ó
- $c<0$ y $d=-\infty$, ó
- $c=\infty$ y $d>0$, ó
- $c=-\infty$ y $d<0$,

entonces existe el límite de fg en a y

$$\lim_{x\to a}(fg)(x) = \infty.$$

3) Si se verifica alguna de las cuatro condiciones siguientes

- $c<0$ y $d=\infty$, ó
- $c>0$ y $d=-\infty$, ó
- $c=\infty$ y $d<0$, ó

- $c = -\infty$ y $d > 0$,

entonces existe el límite de fg en a y

$$\lim_{x\to a}(fg)(x) = -\infty.$$

4) Si se verifica alguna de las dos condiciones siguientes

- $c = 0$ y $d \in \{\infty, -\infty\}$, ó
- $c \in \{\infty, -\infty\}$ y $d = 0$,

entonces no se sabe nada sobre $\lim\limits_{x\to a}(fg)(x)$. En este caso diremos que se tiene una *indeterminación* de tipo 0∞

2.9.4.3 Cociente

Sea $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ y f, g definidas al menos en un entorno reducido U de a con $g(x) \neq 0,\ \forall\, x \in U$, tales que existen los límites de f y g en a y con

$$\lim_{x\to a} f(x) = c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\},\ \lim_{x\to a} g(x) = d \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}.$$

Entonces

1) Si $c \in \mathbb{R}$ y $d \in \mathbb{R} - \{0\}$, entonces existe el límite de f/g en a y

$$\lim_{x\to a} \frac{f}{g}(x) = \frac{c}{d}.$$

2) Si $c \in \mathbb{R}$ y $d \in \{\infty, -\infty\}$, entonces existe el límite de f/g en a y

$$\lim_{x\to a} \frac{f}{g}(x) = 0.$$

3) Si se verifica alguna de las dos condiciones siguientes

- $c = \infty$ y $d > 0$ y $d \neq \infty$, ó
- $c = -\infty$ y $d < 0$ y $d \neq -\infty$,

entonces existe el límite de f/g en a y

$$\lim_{x\to a} \frac{f}{g}(x) = \infty.$$

4) Si se verifica alguna de las dos condiciones siguientes

- $c = \infty$ y $d < 0$ y $d \neq -\infty$, ó
- $c = -\infty$ y $d > 0$ y $d \neq \infty$

entonces existe el límite de f/g en a y

$$\lim_{x \to a} \frac{f}{g}(x) = -\infty.$$

5) Si se verifica alguna de las dos condiciones siguientes

- $c > 0$ y $d = 0$ y existe W un entorno reducido de d contenido en el dominio de g con $g(x) > 0$, $\forall\, x \in W$, ó
- $c < 0$ y $d = 0$ y existe W un entorno reducido de d contenido en el dominio de g con $g(x) < 0$, $\forall\, x \in W$,

entonces existe el límite de f/g en a y

$$\lim_{x \to a} \frac{f}{g}(x) = \infty.$$

6) Si se verifica alguna de las dos condiciones siguientes

- $c > 0$ y $d = 0$ y existe W un entorno reducido de d contenido en el dominio de g con $g(x) < 0$, $\forall\, x \in W$, ó
- $c < 0$ y $d = 0$ y existe W un entorno reducido de d contenido en el dominio de g con $g(x) > 0$, $\forall\, x \in W$,

entonces existe el límite de f/g en a y

$$\lim_{x \to a} \frac{f}{g}(x) = -\infty.$$

7) Si se verifica $c \neq 0$ y $d = 0$ y para cada W entorno reducido de d contenido en el dominio de g, existen $x_1, x_2 \in W$ con $g(x_1)g(x_2) < 0$, entonces no existe el límite de f/g en a.

8) Si se verifica que $c = d = 0$ entonces no se sabe nada sobre $\lim\limits_{x \to a} \frac{f}{g}(x)$. En este caso diremos que se tiene una *indeterminación* de tipo $\frac{0}{0}$

9) Si se verifica que $c, d \in \{\infty, -\infty\}$ entonces no se sabe nada sobre $\lim\limits_{x \to a} \frac{f}{g}(x)$. En este caso diremos que se tiene una *indeterminación* de tipo $\frac{\infty}{\infty}$

2.9.4.4 Exponenciales

Sea $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ y f, g definidas al menos en un entorno reducido U de a. Para cada $x \in U$, supondremos que $f(x) \geq 0$, y que si además $g(x) \leq 0$ entonces $f(x) \neq 0$. Se supone que existen los límites de f y g en a, con

$$\lim_{x \to a} f(x) = c \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}, \ \lim_{x \to a} g(x) = d \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}.$$

Nótese que siempre $c \geq 0$.
Entonces

1) Si se verifica alguna de las dos condiciones siguientes

- $c \in \mathbb{R} - \{0\}$ y $d \in \mathbb{R}$, ó
- $c = 0$ y $d \in \mathbb{R}$, con $d > 0$

entonces existe el límite de $f^{g(x)}$ en a y

$$\lim_{x \to a} f(x)^{g(x)} = c^d.$$

2) Si se verifica alguna de las tres condiciones siguientes

- $0 \leq c < 1$ y $d = \infty$, ó
- $c > 1$ y $d = -\infty$, ó
- $c = \infty$ y $d < 0$,

entonces existe el límite de $f(x)^{g(x)}$ en a y

$$\lim_{x \to a} f(x)^{g(x)} = 0.$$

3) Si se verifica alguna de las cuatro condiciones siguientes

- $c = 0$ y $d < 0$, ó
- $0 < c < 1$ y $d = -\infty$, ó
- $c > 1$ y $d = \infty$, ó
- $c = \infty$ y $d > 0$,

entonces existe el límite de $f(x)^{g(x)}$ en a y

$$\lim_{x \to a} f(x)^{g(x)} = \infty.$$

4) Si $c = 1$ y $d \in \{\infty, -\infty\}$, entonces no se sabe nada sobre $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)}$. En este caso diremos que se tiene una *indeterminación* de tipo 1^{∞}.

5) Si $c = \infty$ y $d = 0$, entonces no se sabe nada sobre $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)}$. En este caso diremos que se tiene una *indeterminación* de tipo ∞^0.

6) Si $c = d = 0$, entonces no se sabe nada sobre $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)}$. En este caso diremos que se tiene una *indeterminación* de tipo 0^0.

Podemos resumir todo lo anterior en la Tabla 2.1. En cada fila aparece descrita una operación de las anteriores. Cada símbolo que aparezca se considerará en las condiciones que acabamos de establecer para cada operación. En la primera columna aparece la aritmética usual cuando los límites son reales y tiene sentido la operación. En la segunda columna aparecen extensiones de la aritmética a casos donde aparecen infinitos y algunos casos con ceros. En estas columnas c y/o d podrán ser o bien números reales o bien infinitos, salvo que se exprese lo contrario. Estas extensiones no son más que representaciones simbólicas, fáciles de recordar, de las propiedades de los límites que acabamos de enunciar y sólo tendrán sentido en este contexto. Finalmente en la tercera columna aparecen las indeterminaciones para cada operación.

Nuestro principal objetivo ahora es resolver límites en los casos en los que hay indeterminaciones. Veremos varias técnicas a lo largo del curso. La primera será el uso de equivalencias.

2.9.5 Equivalencias. Principio de sustitución

Definición 2.9.7 Sea $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ y f, g dos funciones definidas al menos en W, entorno reducido de a, verificando que $g(x) \neq 0$, $\forall\, x \in W$. Diremos que f y g son *equivalentes* cuando x tiende hacia a, o simplemente que son equivalentes en a, si

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Denotaremos este hecho por

$$f(x) \sim g(x) \text{ si } x \to a$$

Además si

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0,$$

diremos que f y g son *infinitésimos* equivalentes, y si

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty,$$

diremos que f y g son *infinitos* equivalentes. $\triangleleft$

Aritmética usual	Extensiones	Indeterm.
$\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x) = c+d$	$c+\infty = \infty$, si $c \neq -\infty$ $c-\infty = -\infty$, si $c \neq \infty$	$\infty - \infty$
$\lim\limits_{x\to a}(fg)(x) = cd$	$\pm\infty d = \begin{cases} \pm\infty, & \text{si } d > 0 \\ \mp\infty, & \text{si } d < 0 \end{cases}$	0∞
$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f}{g}(x) = \dfrac{c}{d}$	$\dfrac{c}{\pm\infty} = 0, \ \forall\, c \in \mathbb{R}$ $\dfrac{\pm\infty}{d} = \begin{cases} \pm\infty, & \text{si } d \in \mathbb{R} \text{ y } d > 0 \\ \mp\infty, & \text{si } d \in \mathbb{R} \text{ y } d < 0 \end{cases}$ $\dfrac{c\neq 0}{0} = \begin{cases} \infty c, \ \text{si } g>0 \text{ en un ent. red. de } a \\ -\infty c, \ \text{si } g<0 \text{ en un ent. red. de } a \\ \text{No existe en cualquier otro caso} \end{cases}$	$\dfrac{0}{0}, \dfrac{\infty}{\infty}$
$\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)} = c^d$	$\infty^d = \begin{cases} \infty, & \text{si } d > 0 \\ 0, & \text{si } d < 0 \end{cases}$ $c^{\infty} = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \leq c < 1 \\ \infty, & \text{si } c > 1 \end{cases}$ $c^{-\infty} = \begin{cases} \infty, & \text{si } 0 \leq c < 1 \\ 0, & \text{si } c > 1 \end{cases}$ $0^d = \infty$ si $d < 0$.	1^{∞}, ∞^0, 0^0

Tabla 2.1 – Resumen de la aritmética de límites.

$a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\},\ \lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$		
$\operatorname{sen} f(x) \sim f(x)$	$\tan f(x) \sim f(x)$	$\operatorname{arc\,sen} f(x) \sim f(x)$
$1 - \cos f(x) \sim (f(x))^2/2$	$\arctan f(x) \sim f(x)$	$\log(1 + f(x)) \sim f(x)$
$(1 + f(x))^p - 1 \sim pf(x)$	$e^{f(x)} - 1 \sim f(x)$	$b^{f(x)} - 1 \sim f(x) \log b$
$b_k x^k + b_{k+1} x^{k+1} + \cdots + b_{k+j} x^{k+j} \sim b_k x^k$ si $x \to 0,\ (k > 0, b_k \neq 0)$		

Tabla 2.2 – Infinitésimos equivalentes. Todas las equivalencias son en a, salvo que se exprese lo contrario.

$b_k x^k + b_{k-1} x^{k-1} + \cdots + b_1 x + b_0 \sim b_k x^k$ si $x \to \pm\infty,\ (b_k \neq 0)$
$\log(b_k x^k + b_{k-1} x^{k-1} + \cdots + b_1 x + b_0) \sim k \log x$ si $x \to \infty,\ (b_k > 0)$

Tabla 2.3 – Infinitos equivalentes.

En la Tabla 2.2 presentamos algunos infinitésimos equivalentes y en la Tabla 2.3, algunos infinitos equivalentes.

Proposición 2.9.8 Sean $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ y $f(x) \sim g(x)$ si $x \to a$. Sea $p \in \mathbb{R}$ de manera que tenga sentido considerar las potencias $f^p(x)$ y $g^p(x)$ en un entorno reducido de a. Entonces

$$f^p(x) \sim g^p(x) \text{ si } x \to a.$$

$\triangleleft$

Proposición 2.9.9 Sean $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ y f una función con

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

Entonces se tiene que

$$f(x) \sim L \text{ si } x \to a,$$

Donde en la anterior expresión interpretamos L como la función constantemente igual a L. $\triangleleft$

Teorema 2.9.10 [Principio de sustitución]
Sea $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ y $f(x) \sim g(x)$ si $x \to a$. Sea $h(x)$ otra función definida al menos en un entorno de a. Se verifican las siguientes propiedades

1) $\lim\limits_{x\to a} h(x)f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x)g(x)$.

2) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{h(x)}{f(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{h(x)}{g(x)}$.

◁

Este resultado, junto con las tablas de infinitos e infinitésimos equivalentes, conducen a la resolución directa de numerosas indeterminaciones.

2.9.6 Órdenes de infinitud

Proposición 2.9.11 Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a > 0$ y $b > 1$. Se tiene

1) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^{ax}}{b^x} = \infty$,

2) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{b^x}{x^a} = \infty$,

3) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^a}{\log x} = \infty$.

◁

Nota 2.9.12 Todas las propiedades anteriores son válidas, cuando tengan sentido, para límites laterales, cambiando, allá donde aparezcan, las palabras *entorno reducido* por *entorno por la izquierda* o *entorno por la derecha* para los límites por la izquierda y por la derecha respectivamente ◁

2.10 Ejercicios

Ejercicio 2.1 Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

a) ¿Puede ser f discontinua en cada punto de $\mathbb{R}$?

b) ¿Puede ser f discontinua en cada punto de $\mathbb{R}$ excepto en un único punto?

c) ¿Puede ser f discontinua en cada punto de $\mathbb{R}$ excepto en un único punto e inyectiva?

d) ¿Puede ser f discontinua en cada punto de $\mathbb{R}$ excepto en un único punto y no inyectiva?

e) Suponiendo que f tenga al menos una discontinuidad en $\mathbb{R}$, ¿puede f^2 ser continua en $\mathbb{R}$?

f) ¿Puede ser f discontinua en cada punto de $\mathbb{R}$ y f^2 continua en $\mathbb{R}$?

Ejercicio 2.2 Estudiar si el polinomio

$$p(x) = x^4 + 2{,}6x^3 - 3x^2 + \pi x - 0{,}065,$$

tiene alguna raíz real.

Ejercicio 2.3 Sea $f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua y con $f(-1) = f(1)$. Probar que existe $c \in [0, 1]$ tal que $f(c) = f(c - 1)$.

Ejercicio 2.4 Estudiar la continuidad en 0 de

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{\operatorname{sen} x}, & \text{si } x \neq 0 \\ \\ 1, & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

Ejercicio 2.5 Sea $n \in N$ impar y $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua con

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x^n} = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x^n} = 0.$$

a) Calcular

$$\lim_{x \to \infty} (x^n + f(x)),$$

y

$$\lim_{x \to -\infty} (x^n + f(x)).$$

b) Probar que existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) = -x_0^n$.

Ejercicio 2.6 Calcular

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(1 + 3x^2) \cos x}{x \operatorname{sen} x}$$

Ejercicio 2.7 Sea $r > 0$. Calcular

$$\lim_{x \to 0^+} x^r \log x$$

Ejercicio 2.8 Calcular

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}}{x}$$

Ejercicio 2.9 Calcular

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(\tan x)}{\operatorname{sen} x}$$

Ejercicio 2.10 Calcular

$$\lim_{x\to 0} \operatorname{cotg} x \log(1+x)$$

Ejercicio 2.11 Calcular

$$\lim_{x\to 0} \left(\sqrt{1+x^2}\right)^{\dfrac{3}{\operatorname{arc\,sen} x^2}}$$

Ejercicio 2.12 Sea $a > 0$, $n \in \mathbb{N}$. Calcular

$$\lim_{x\to a} \frac{x^n - a^n}{\log x^n - \log a^n}$$

Ejercicio 2.13 Calcular

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \log(1+x) - 3\cos x}{e^{x+3}}$$

Ejercicio 2.14 Calcular

$$\lim_{x\to 0} \frac{6}{4 + e^{-1/x}}$$

Ejercicio 2.15 Calcular

$$\lim_{x\to \pi/2} \frac{\cos^2 x - \operatorname{cotg}^2 x}{(1-\operatorname{sen} x)\cos 3x}$$

Capítulo 3

Derivadas

3.1 Derivada en un punto

Definición 3.1.1 Sean $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo abierto, $a \in I$ y $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Diremos que f es *derivable* en el punto a si el límite

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existe y es finito, en cuyo caso llamaremos al valor de dicho límite la *derivada* de f en a, y la denotaremos por

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

$\triangleleft$

Existe una notación para la derivada en la que aparece explícitamente la variable de la función x. Así, si una función $f(x)$ es derivable en el punto a, podremos utilizar la notación alternativa

$$f'(a) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a).$$

No es necesario que la función f de la definición 3.1.1 tenga por dominio un intervalo abierto. Para que tenga sentido plantearse la existencia de derivada en un cierto punto a es suficiente que exista un entorno de a contenido en el dominio de f.

Debido a su definición por medio de un límite, es claro que la derivabilidad de una función f en un punto a no depende de la elección del dominio de f, en el sentido de que si f es derivable en a, cualquier restricción de f a un subdominio que contenga a un entorno de a sigue siendo derivable en a y con el mismo valor de la derivada.

Lema 3.1.2 Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo abierto, $a \in I$ y $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. La función f es derivable en a si y sólo si el límite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

existe y es finito, en cuyo caso su valor coincide con $f'(a)$. $\triangleleft$

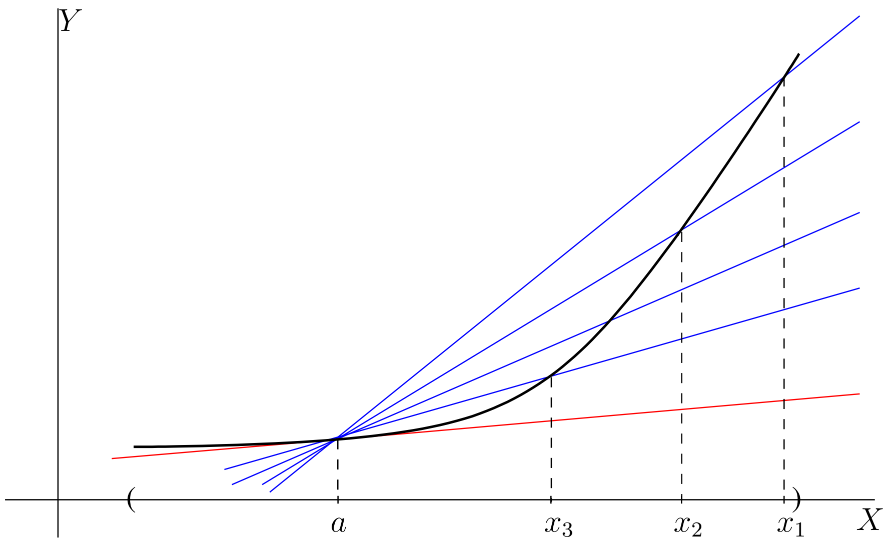
3.1.1 Interpretación física y geométrica

La interpretación física mas simple de la derivada es la velocidad instantánea. Si $r(t)$ es una función cuyos valores representan la posición de un objeto que se mueve sobre una recta en cada instante de tiempo t, entonces $r'(t_0)$ es la velocidad instantánea del móvil en el instante de tiempo t_0. En general la derivada indica el ratio de variación de una magnitud respecto de otra.

Geométricamente la derivada está relacionada con la tangencia. Imaginemos que tenemos una función $f(x)$ definida en un intervalo abierto I y un punto a de dicho intervalo donde f es derivable. Dado $x \in I - \{a\}$, podemos trazar la recta secante a la gráfica de f en a y x, es decir, la recta que pasa por $(a, f(a))$ y por $(x, f(x))$, cuya ecuación es

$$Y - f(a) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}(X - a).$$

Si acercamos x hacia a, sucede que, geométricamente, dicha recta secante va aproximándose a la recta tangente a la gráfica de f en el punto a, situación que tratamos de ilustrar en la siguiente figura



donde x_1, x_2 y x_3 van siendo aproximaciones sucesivas de x a a. Si acercásemos tanto el punto x hasta una *situación límite* en que quedase confundido con a, es claro a nivel intuitivo que la secante correspondiente se confundiría con la recta tangente a f en a. Pero, ¿qué significaría analíticamente este acercamiento de x a a? No sería otra cosa que tomar límite cuando x tiende hacia a en ambos términos de la ecuación de la recta secante, es decir

$$\lim_{x\to a}(Y - f(a)) = \lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}(X-a)\right),$$

lo que conduce a

$$\lim_{x\to a}(Y - f(a)) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\lim_{x\to a}(X-a),$$

y finalmente a

$$Y - f(a) = f'(a)(X-a),$$

y si nuestra intuición geométrica es correcta, ésta debe ser la ecuación de la recta tangente a f en a. Entonces podemos afirmar que $f'(a)$ es la pendiente de la recta tangente a f en a.

3.2 Derivada en un intervalo

Definición 3.2.1 Sean $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo abierto y $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Diremos que f es *derivable* en el intervalo I si f es derivable en cada punto de I. En este caso, podemos definir una nueva función sobre I, a la que denotaremos por f' y a la que llamaremos *función derivada* (o simplemente derivada), dada por

$$\begin{aligned} f' : I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f'(x) \end{aligned}.$$

$\triangleleft$

Lema 3.2.2 Sean $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo abierto, $J \subseteq I$ intervalo abierto y $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable en I. Entonces la restricción $f|_J$ es derivable en J. $\triangleleft$

3.2.1 Derivadas sucesivas

Supongamos que f es una función derivable en un intervalo abierto I. Acabamos de ver que podemos definir entonces la función derivada, f', en I.

Podemos plantearnos si esta nueva función es derivable en I. Si lo fuese podríamos definir igualmente una nueva función en I que sería la función derivada de f'.

Caso de existir, dicha función se denotará por f'' y la llamaremos *función derivada segunda* (o simplemente *derivada segunda*) de f en I.

Ahora, si f'' es derivable en I podríamos hacer algo similar y definir su derivada, que sería una función sobre I a la que llamaríamos *derivada tercera* de f y a la que denotaríamos por f'''.

En caso de que podamos iterar este proceso n veces (donde $n \in \mathbb{N}$), tendríamos n funciones f', f'', f''', $f^{(4)}$, $\ldots$, $f^{(n)}$ definidas sobre I a las que llamaremos *derivadas sucesivas* de f.

Nota 3.2.3 Llamaremos $f^{(0)}$ a la propia función f. $\triangleleft$

Definición 3.2.4 Sean I un intervalo abierto y $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$.

1) Si f es continua en I, diremos que f es *de clase C cero* en I, y lo denotaremos por
$$f \in \mathcal{C}^0(I).$$

2) Sea $n \in \mathbb{N}$. Si existen f', f'', f''', $\ldots$, $f^{(n)}$ en I y todas son continuas en I, diremos que f es *de clase C n* en I, y lo denotaremos por
$$f \in \mathcal{C}^n(I).$$

3) Si existen todas las derivadas sucesivas de f en I de cualquier orden diremos que f es *de clase C infinito* en I, y lo denotaremos por
$$f \in \mathcal{C}^\infty(I).$$

$\triangleleft$

3.3 Cálculo de derivadas

3.3.1 Derivadas de las funciones elementales

En la Tabla 3.1 podemos ver un resumen de las derivadas de las funciones elementales, junto con el dominio donde es válida la fórmula de derivación.

3.3.2 Reglas aritméticas

Proposición 3.3.1 Sean $a \in \mathbb{R}$ f, g definidas al menos en un entorno de a con f y g derivables en a. Se tiene

$f(x)$	$f'(x)$	Dominio	$f(x)$	$f'(x)$	Dominio
α	0	$\alpha, x \in \mathbb{R}$	x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\alpha > 1,\ x \in \mathbb{R}$, ó
x	1	$x \in \mathbb{R}$			$\alpha < 1,\ x > 0$
e^x	e^x	$x \in \mathbb{R}$	$\log x$	$\frac{1}{x}$	$x > 0$
a^x	$a^x \log a$	$a > 0,\ x \in \mathbb{R}$	$\log_a x$	$\frac{1}{x \log a}$	$a > 0,\ a \neq 1,\ x \neq 0$
$\operatorname{sen} x$	$\cos x$	$x \in \mathbb{R}$	$\operatorname{arc\,sen} x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in (-1, 1)$
$\cos x$	$-\operatorname{sen} x$	$x \in \mathbb{R}$	$\arccos x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in (-1, 1)$
$\operatorname{tg} x$	$1 + \operatorname{tg}^2 x$	$x \neq k\pi + \frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$	$\operatorname{arc\,tg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$x \in \mathbb{R}$
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	$x \in \mathbb{R}$	$\operatorname{argsh} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$x \in \mathbb{R}$
$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$	$x \in \mathbb{R}$	$\operatorname{argch} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$x \in (1, \infty)$
$\operatorname{th} x$	$1 - \operatorname{th}^2 x$	$x \in \mathbb{R}$	$\operatorname{argth} x$	$\frac{1}{1-x^2}$	$x \in (-1, 1)$

Tabla 3.1 – Derivadas (respecto de x) de las funciones elementales.

1) $f + g$ es derivable en a y además
$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a).$$

2) αf es derivable en a, $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$ y además
$$(\alpha f)'(a) = \alpha f'(a).$$

3) fg es derivable en a y además
$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$

4) Si $g(a) \neq 0$, f/g es derivable en a y además
$$(f/g)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}.$$

◁

Corolario 3.3.2 Sean $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo abierto $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ derivables en I. Se tiene

1) $f + g$ es derivable en I y además

$$(f + g)' = f' + g'.$$

2) αf es derivable en I, $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$ y además

$$(\alpha f)' = \alpha f'.$$

3) fg es derivable en I y además

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

4) Si $g(x) \neq 0$, $\forall\, x \in I$, f/g es derivable en I y además

$$(f/g)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

◁

Proposición 3.3.3 [Fórmula de Leibniz]
Sean $n \in \mathbb{N}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo abierto y $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ con $f, g \in \mathcal{C}^n(I)$. Se tiene

$$(fg)^{(n)} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} f^{(j)} g^{(n-j)}.$$

◁

3.3.3 Regla de la cadena

Proposición 3.3.4 Sean $I, J \subseteq \mathbb{R}$ intervalos abiertos, $a \in I$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ con $f(I) \subseteq J$, f derivable en a y g derivable en $f(a)$. Entonces $g \circ f$ es derivable en a y además

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a).$$

◁

Corolario 3.3.5 Sean $I, J \subseteq \mathbb{R}$ intervalos abiertos, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ con $f(I) \subseteq J$, f derivable en I y g derivable en J. Entonces $g \circ f$ es derivable en I y además

$$(g \circ f)' = (g' \circ f)f'.$$

◁

Ejemplo 3.3.6 Aplicando directamente la regla de la cadena, se tiene

- $(\operatorname{sen}(\cos x))' = -\operatorname{sen} x \cos(\cos x)$.
- $(\log(x^3 + x^2 - 3x))' = \dfrac{3x^2 + 2x - 3}{x^3 + x^2 - 3x}$.
- $(e^{\operatorname{sen} x})' = \cos x \, e^{\operatorname{sen} x}$.
- $(\operatorname{sen}^2 x)' = 2 \cos x \operatorname{sen} x$.

◁

3.3.4 Derivada de la función inversa

Proposición 3.3.7 Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo abierto y $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ inyectiva y derivable en I. Entonces f^{-1} es derivable en $f(I)$ y además

$$\left(f^{-1}\right)'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}, \ \forall\, a \in I.$$

◁

Ejemplo 3.3.8 La función

$$\begin{aligned} g : (-1,1) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \operatorname{arc\,sen} x \end{aligned}.$$

es la inversa de

$$\begin{aligned} f : (-\pi/2, \pi/2) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ y &\longmapsto \operatorname{sen} y \end{aligned}.$$

Sea $x \in (0,1)$. Si

$$y = g(x) = \operatorname{arc\,sen} x,$$

entonces

$$x = g^{-1}(y) = f(y) = \operatorname{sen} y.$$

Por lo tanto

$$\operatorname{arc\,sen}' x = g'(x) = (f^{-1})'(f(y)) = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{\operatorname{sen}' y} = \frac{1}{\cos y} =$$
$$\frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

◁

3.4 Propiedades de la derivada

3.4.1 Derivada y continuidad

Proposición 3.4.1 Sean $a \in \mathbb{R}$ y f definida al menos en un entorno de a. Si f es derivable en a, entonces f es continua en a. $\triangleleft$

Nota 3.4.2 El recíproco de la Proposición 3.4.1 en general no es cierto. Así, por ejemplo consideremos la función valor absoluto

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto |x| \end{aligned}.$$

Sabemos que es continua en 0. Veremos ahora que no es derivable. Para ello, conviene expresar esta función como

$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x, & \text{si } x < 0 \\ x, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}.$$

Para estudiar su derivabilidad en 0, debemos de estudiar el límite

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x},$$

pero puesto que la definición de f cambia a ambos lados de 0, debemos estudiar los límites laterales

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = \lim_{x \to 0^-} -1 = -1.$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x \to 0^+} 1 = 1.$$

Como los dos límites laterales existen pero son distintos, se concluye que

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x},$$

no existe y por tanto f no es derivable en 0.

Las funciones que contienen valor absoluto en su definición, suelen presentar problemas de derivabilidad en los puntos donde se anulan las expresiones que van dento del valor absoluto.

Si observamos la gráfica de $|x|$, vemos que presenta un *pico* en $x = 0$ y que por lo tanto es imposible definir una recta tangente a la gráfica de la función de forma única en dicho punto. Esto nos da una idea intuitiva de por qué la función no es derivable en cero. En general las gráficas de las funciones continuas, presentan *quiebros* o *esquinas* en los puntos donde no son derivables. $\triangleleft$

3.4.2 Teorema de Rolle

Teorema 3.4.3 Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ y $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) con $f(a) = f(b)$. Entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$. $\triangleleft$

Corolario 3.4.4 Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ y $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) con $f'(x) \neq 0$, $\forall\, x \in (a, b)$. Entonces f es inyectiva en $[a, b]$. $\triangleleft$

3.4.3 Teorema del valor medio de Lagrange

Teorema 3.4.5 Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ y $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Entonces existe $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

o equivalentemente

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a) \text{ (fórmula de los incrementos finitos).}$$

$\triangleleft$

3.5 Aplicaciones de la derivada

3.5.1 Regla de l'Hôpital

Proposición 3.5.1 Sean $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$, W un entono reducido de a y f, g dos funciones definidas en W y derivables en W verificando una de las dos condiciones siguientes

- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$, ó
- $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \pm\infty$.

Entonces, si existe

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\},$$

se tiene que también existe

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ y vale } L.$$

$\triangleleft$

Este resultado, conocido como la regla de l'Hôpital, permite resolver algunas indeterminaciones de tipo $\frac{0}{0}$ y $\frac{\infty}{\infty}$.
La regla de l'Hôpital también es válida para límites laterales.

Ejemplo 3.5.2

- $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{e^x - \cos^2 x}{x}$ es una indeterminación $\frac{0}{0}$. Derivamos numerador y denominador y calculamos
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x + 2\operatorname{sen} x\cos x}{1} = e^0 = 1,$$
por tanto
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x - \cos^2 x}{x} = 1.$$

- $\lim\limits_{x\to 0^+} x\log(\operatorname{sen} x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\log(\operatorname{sen} x)}{1/x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\cos x/\operatorname{sen} x}{-1/x^2} =$
$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{-x^2\cos x}{\operatorname{sen} x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{-x^2\cos x}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} -x\cos x = 0$

- $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{\cos x}{x} + \log x\right) = \lim\limits_{x\to 0^+} \log\left(e^{\frac{\cos x}{x} + \log x}\right) =$
$\lim\limits_{x\to 0^+} \log\left(e^{\frac{\cos x}{x}} e^{\log x}\right) = \lim\limits_{x\to 0^+} \log\left(x e^{\frac{\cos x}{x}}\right).$

  Calculando el límite de la función que hay dentro del logaritmo:
$$\lim_{x\to 0^+} x e^{\frac{\cos x}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{\cos x}{x}}}{1/x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\dfrac{-x\operatorname{sen} x - \cos x}{x^2} e^{\frac{\cos x}{x}}}{-1/x^2} =$$
$$\lim_{x\to 0^+} (x\operatorname{sen} x + \cos x) e^{\frac{\cos x}{x}} = \infty,$$
  luego el límite que debíamos calcular también vale ∞.

- $\lim\limits_{x\to 0^+} (\cos x)^{\frac{1}{\operatorname{sen} x}} = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{\log\left((\cos x)^{\frac{1}{\operatorname{sen} x}}\right)}.$

  Calculamos por separado el límite del exponente de e:
$$\lim_{x\to 0^+} \log\left((\cos x)^{\frac{1}{\operatorname{sen} x}}\right) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log(\cos x)}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}{\cos x} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = 0,$$
  por lo que el límite buscado es $e^0 = 1$.

◁

3.5.2 Monotonía

Definición 3.5.3 Sean $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo y $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Diremos que f es

1) Creciente en I si $f(x) \leq f(y)$, $\forall\, x, y \in I$ con $x < y$.

2) Decreciente en I si $f(x) \geq f(y)$, $\forall\, x, y \in I$ con $x < y$.

3) Monótona en I si es creciente en I o decreciente en I.

4) Estrictamente creciente en I si $f(x) < f(y)$, $\forall\, x, y \in I$ con $x < y$.

5) Estrictamente decreciente en I si $f(x) > f(y)$, $\forall\, x, y \in I$ con $x < y$.

6) Estrictamente monótona en I si es estrictamente creciente en I o estrictamente decreciente en I.

$\triangleleft$

Lema 3.5.4 Sean $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo y $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Se tiene

1) f estrictamente creciente en $I \Longrightarrow f$ creciente en I.

2) f estrictamente decreciente en $I \Longrightarrow f$ decreciente en I.

Los recíprocos de las implicaciones anteriores no son ciertos en general. $\triangleleft$

Proposición 3.5.5 Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ y $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Se tiene

1) $f'(x) \geq 0,\ \forall\, x \in (a, b) \Longrightarrow f$ es creciente en $[a, b]$.

2) $f'(x) \leq 0,\ \forall\, x \in (a, b) \Longrightarrow f$ es decreciente en $[a, b]$.

3) $f'(x) > 0,\ \forall\, x \in (a, b) \Longrightarrow f$ es estrictamente creciente en $[a, b]$.

4) $f'(x) < 0,\ \forall\, x \in (a, b) \Longrightarrow f$ es estrictamente decreciente en $[a, b]$.

$\triangleleft$

3.5.3 Concavidad y convexidad

Definición 3.5.6 Sean $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo y $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Diremos que f es

1) convexa en I si $\forall\, a, b \in I$ con $a < b$, se tiene

$$f(x) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a),\ \forall\, x \in (a, b).$$

2) cóncava en I si $\forall\, a, b \in I$ con $a < b$, se tiene

$$f(x) \geq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a),\ \forall\, x \in (a, b).$$

$\triangleleft$

Definición 3.5.7 Sean $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo y $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Diremos que $a \in I$ es un *punto de inflexión* de f si existe un entorno lateral por la derecha de a en el que f es cóncava y un entorno lateral por la izquierda de a en el que f es convexa, o bien si existe un entorno lateral por la derecha de a en el que f es convexa y un entorno lateral por la izquierda de a en el que f es cóncava. $\triangleleft$

Proposición 3.5.8 Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ y $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y derivable dos veces en (a, b). Se tiene

1) $f''(x) \geq 0,\ \forall\, x \in I \Longrightarrow f$ es convexa en $[a, b]$.

2) $f''(x) \leq 0,\ \forall\, x \in I \Longrightarrow f$ es cóncava en $[a, b]$.

$\triangleleft$

Corolario 3.5.9 Sea f una función definida al menos en un entorno de un cierto $a \in \mathbb{R}$, derivable dos veces en dicho entorno. Si a es punto de inflexión de f, entonces $f''(a) = 0$. $\triangleleft$

3.5.4 Extremos

3.5.4.1 Extremos relativos

Definición 3.5.10 Sean $A \subseteq \mathbb{R}$, $a \in A$ y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$. Diremos que a es

1) Un *máximo relativo* de f si existe un entorno U de a tal que $f(a) \geq f(x),\ \forall\, x \in U \cap A$.

2) Un *mínimo relativo* de f si existe un entorno U de a tal que $f(a) \leq f(x)$, $\forall\, x \in U \cap A$.

Diremos que a es un *extremo relativo* de f si es un mínimo o un máximo relativo de f. ◁

La noción de extremo relativo sólo tendrá interés para nosotros cuando A sea una unión de intervalos abiertos y f sea derivable en A. En otros casos el estudio de extremos relativos puede resultar bastante complicado.

Proposición 3.5.11 Sean A una unión de intervalos abiertos y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable en A. Si $a \in A$ es un extremo relativo de f entonces, entonces $f'(a) = 0$. ◁

El recíproco de la Proposición 3.5.11 en general no es cierto.

Definición 3.5.12 Sean A una unión de intervalos abiertos y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable en A. Diremos que $a \in A$ es un *punto crítico* de f si $f'(a) = 0$. ◁

Proposición 3.5.13 Sean $c, d \in \mathbb{R}$ con $c < d$, $n \in \mathbb{N}$, $a \in (c, d)$ y $f : (c, d) \longrightarrow \mathbb{R}$ n veces derivable en a con

$$f'(a) = f''(a) = \cdots f^{(n-1)}(a) = 0 \text{ y con } f^{(n)}(a) \neq 0.$$

Entonces

1) Si n es impar, a no es extremo relativo de f.

2) Si n es par:

2.1) Si $f^{(n)}(a) < 0$ entonces a es máximo relativo de f.

2.2) Si $f^{(n)}(a) > 0$ entonces a es mínimo relativo de f.

◁

Algoritmo 3.5.14 Sean A una unión finita de intervalos abiertos y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable en A. El procedimiento siguiente permite calcular los extremos relativos de f.

1) Calcular el conjunto de puntos críticos de f en A,

$$P = \{x \in A \,/\, f'(x) = 0\}\,.$$

2) Para cada $a \in P$, hacer

2.1) O bien aplicar la proposición 3.5.13 supuesto que sea posible.

2.2) O bien estudiar el signo de f' en los entornos laterales de a, de manera que

2.2.1) Si existe U entorno reducido de a tal que $f'(x) > 0, \ \forall\, x \in U$ o bien $f'(x) < 0, \ \forall\, x \in U$, entonces a no es extremo relativo de f.

2.2.2) Si existen U^+ entorno lateral por la derecha de a y U^- entorno lateral por la izquierda de a con $f'(x) \geq 0, \ \forall\, x \in U^-$ y $f'(x) \leq 0, \ \forall\, x \in U^+$, entonces a es un máximo relativo de f.

2.2.3) Si existen U^+ entorno lateral por la derecha de a y U^- entorno lateral por la izquierda de a con $f'(x) \leq 0, \ \forall\, x \in U^-$ y $f'(x) \geq 0, \ \forall\, x \in U^+$, entonces a es un mínimo relativo de f.

Nótese que las las dos últimas condiciones no son excluyentes.

$\triangleleft$

3.5.4.2 Extremos absolutos

Definición 3.5.15 Sean $A \subseteq \mathbb{R}$ y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$. Diremos que un punto $a \in A$ es

1) Un *máximo absoluto* de f en A si $f(x) \leq f(a), \ \forall\, x \in A$.

2) Un *mínimo absoluto* de f en A si $f(x) \geq f(a), \ \forall\, x \in A$.

Diremos que a es un *extremo absoluto* de f en A si es mínimo o máximo absoluto de f en A. $\triangleleft$

Existen algunas relaciones entre los extremos relativos y absolutos que no vamos a especificar, pero en general un extremo absoluto no tiene por qué ser un extremo relativo ni viceversa.

El siguiente algoritmo nos permite calcular los extremos absolutos cuando A y f verifican ciertas condiciones.

Algoritmo 3.5.16 Sean A una unión finita de intervalos y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$. Realizaremos el siguiente proceso

1) Sea $P \subseteq \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ el conjunto formado por

1.1) Los extremos de los intervalos cuya unión forma A.

1.2) Los puntos críticos de f.

1.3) Los puntos de A° donde f' no exista o no sea continua.

(Nótese que todos los puntos críticos de f están en A°).

2) Sea $V \subseteq \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ el conjunto formado por los valores de todos los límites laterales o límites o evaluaciones de f que tengan sentido en todos los puntos de P.

3) Sean $M = \max V$ y $m = \min V$.

4) Sea $E_M = \{x \in P \cap A \,/\, f(x) = M\}$.

4.1) Si $E_M = \emptyset$, entonces f no tiene máximos absolutos en A.

4.2) Si $E_M \neq \emptyset$ entonces E_M es el conjunto de máximos absolutos de f en A.

5) Sea $E_m = \{x \in P \cap A \,/\, f(x) = m\}$.

5.1) Si $E_m = \emptyset$, entonces f no tiene mínimos absolutos en A.

5.2) Si $E_m \neq \emptyset$ entonces E_m es el conjunto de mínimos absolutos de f en A.

$\triangleleft$

El algoritmo anterior sólo lo es cuando E_M y E_m son conjuntos computables. No vamos a proporcionar aquí condiciones generales para la computabilidad de dichos conjuntos. Un caso sencillo en el que son computables es cuando P es un conjunto finito.

Nota 3.5.17 Si al conjunto P se añaden puntos arbitrarios de A, el algoritmo sigue siendo válido. Se puede sacar partido de esta propiedad para evitar realizar ciertos cálculos. Por ejemplo, si se sospecha que un punto de A debería estar en P, pero es costoso determinarlo, podemos añadirlo directamente a P sin más comprobaciones. $\triangleleft$

3.6 El polinomio de Taylor

Definición 3.6.1 Sean $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo abierto, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in I$ y $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ con $f \in \mathcal{C}^n(I)$. Llamaremos *polinomio de Taylor* de orden n de f en a, y lo denotaremos por $P_{n,a}(x)$, a

$$\begin{aligned} P_{n,a}(x) &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \\ &= \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(a)}{j!}(x-a)^j. \end{aligned}$$

$\triangleleft$

Ejemplo 3.6.2 Calculemos el polinomio de Taylor de orden 5 en $a = 0$ para la función $f(x) = \operatorname{sen} x$.
Escribiremos esquemáticamente

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} x \quad \stackrel{5,0}{\longrightarrow} \quad & \operatorname{sen} 0 + \frac{\operatorname{sen}' x|_{x=0}}{1!} x + \frac{\operatorname{sen}'' x|_{x=0}}{2!} x^2 + \frac{\operatorname{sen}''' x|_{x=0}}{3!} x^3 + \\ & + \frac{\operatorname{sen}^{(4)} x|_{x=0}}{4!} x^4 + \frac{\operatorname{sen}^{(5)} x|_{x=0}}{5!} x^5 \end{aligned}$$

Ahora sólo tenemos que calcular cada una de las derivadas anteriores, evaluarlas en 0 y sustituir

$$\begin{aligned} & \operatorname{sen} 0 = 0 \\ & \operatorname{sen}' x|_{x=0} = \cos x|_{x=0} = \cos 0 = 1 \\ & \operatorname{sen}'' x|_{x=0} = -\operatorname{sen} x|_{x=0} = -\operatorname{sen} 0 = 0 \\ & \operatorname{sen}''' x|_{x=0} = -\cos x|_{x=0} = -\cos 0 = -1 \\ & \operatorname{sen}^{(4)} x|_{x=0} = \operatorname{sen} x|_{x=0} = \operatorname{sen} 0 = 0 \\ & \operatorname{sen}^{(5)} x|_{x=0} = \cos x|_{x=0} = \cos 0 = 1 \end{aligned}$$

Por lo que

$$\operatorname{sen} x \stackrel{5,0}{\longrightarrow} x - \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{120} x^5$$

$\triangleleft$

Teorema 3.6.3 [Teorema de Taylor]
Sean $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo abierto, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in I$ y $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ con $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I)$ y sea $P_{n,a}(x)$ el polinomio de Taylor de orden n de f en a. Entonces, para cada $x \in I$, existe θ (que depende de x) con $\theta \in [a, x]$ si $a < x$ o $\theta \in [x, a]$ si $a > x$ tal que

$$f(x) = P_{n,a}(x) + \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!} (x - a)^{n+1}.$$

Al término

$$R_{n,a}(x, \theta) = \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!} (x - a)^{n+1}$$

se le llama *resto de Taylor* de orden n de f en a. $\triangleleft$

3.6.1 Propiedades del polinomio de Taylor

Sean $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo abierto, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in I$ y $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ con $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I)$.
Se verifican las siguientes propiedades

1) $P_{n,a}(x)$ es un polinomios de grado menor o igual que n en la variable x.

2) $P_{n,a}(x)$ siempre hay que expresarlo en potencias de $x - a$.

3) Si f es un polinomio de grado k, entonces si $n \geq k$, se tiene que $f(x) = P_{n,a}(x)$, solo que el polinomio de Taylor está agrupado en potencias de $x - a$.

4) $P_{n,a}(x)$ es una aproximación a $f(x)$, siempre que x esté en un cierto entorno de a.

5) Puesto que $f(x) - P_{n,a}(x) = R_{n,a}(x, \theta)$, se tiene que

$$|f(x) - P_{n,a}(x)| = |R_{n,a}(x, \theta)|,$$

por lo que el resto de Taylor *mide* cómo es de buena la aproximación del polinomio de Taylor a la función.

3.6.2 Cálculo de polinomios de Taylor

Dada una función suficientemente derivable, podemos calcular su polinomio de Taylor hasta un orden dado utilizando la definición. Si la función es sencilla y el orden es bajo, este puede ser un método efectivo, pero si la expresión de la función es muy complicada, este método es muy costoso.

Ciertos polinomios de Taylor en 0 de algunas son sencillos de memorizar o de calcular si en un momento dado uno no los recuerda. Nos referimos a los casos que figuran en la Tabla 3.2.

Para funciones más complicadas, aprovecharemos el hecho de que los polinomios de Taylor verifican ciertas propiedades que permiten obtenerlos a partir de los de las subexpresiones que las conforman.

Reducción a 0 por cambio de variable

Sean $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo abierto $a \in I$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $f \in \mathcal{C}^n(I)$. Si $P(h)$ es el polinomio de Taylor de orden n en 0 de la función $f(a + h)$, entonces $P(x - a)$ es el polinomio de Taylor de orden n de f en a. Esquemáticamente:

$$\begin{tikzcd}
f(x) \arrow[r, "n{,}a", "\text{Variable } x"'] \arrow[d, "x = a + h"'] & P(x - a) \\
f(a + h) \arrow[r, "n{,}0", "\text{Variable } h"'] & P(h) \arrow[u, "h = x - a"']
\end{tikzcd}$$

Función	Polinomio
e^x	$P_{n,0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$
$\operatorname{sen} x$	$P_{2n+1,0}(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$
$\cos x$	$P_{2n,0}(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$
$\log(1+x)$	$P_{n,0}(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}$
$(1+x)^\alpha$	${}^*P_{n,0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k$
$\frac{1}{1-x}$	$P_{n,0}(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k$

* Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ se define $\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$, y $\binom{\alpha}{0} = 1$.

Tabla 3.2 – Polinomios de Taylor de algunas funciones elementales en 0

Ejemplo 3.6.4 Calcular el polinomio de Taylor de orden 3 de $\log x$ en $a = 1$. Para ello, hacemos el cambio de variable $x = 1 + h$, obteniendo $\log(1+h)$ cuyo polinomio de Taylor de orden 3 en 0 es, según la Tabla 3.2,

$$P(h) = h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3}.$$

Por tanto el polinomio buscado, se obtiene deshaciendo el cambio de variable (o sea, tomando $h = x - 1$) en $P(h)$,

$$P(x-1) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3}.$$

Esquemáticamente, lo que hacemos es

$$\begin{tikzcd}
\log x \arrow[r, "3{,}1", "\text{Variable } x"'] \arrow[d, "x = 1+h"'] & (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} \\
\log(1+h) \arrow[r, "3{,}0", "\text{Variable } h"'] & h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} \arrow[u, "h = x-1"']
\end{tikzcd}$$

◁

Nota 3.6.5 A partir de ahora, el resto de las propiedades las enunciaremos para polinomios de Taylor calculados en el punto $a = 0$, pues por la propiedad anterior el cálculo de cualquier polinomio de Taylor puede llevarse a 0 por un cambio de variable. ◁

Combinaciones lineales

Sean $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo abierto con $0 \in I$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $f, g \in \mathcal{C}^n(I)$. Si $P(x)$ es el polinomio de Taylor de orden n en 0 de la función $f(x)$ y $Q(x)$ es el polinomio de Taylor de orden n en 0 de la función $g(x)$, entonces $\lambda P(x) + \mu Q(x)$ es el polinomio de Taylor de orden n de $\lambda f + \mu g$ en 0. Esquemáticamente:

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \xrightarrow{n,0} P(x) \\ g(x) \xrightarrow{n,0} Q(x) \end{array}\right\} \Longrightarrow \lambda f(x) + \mu g(x) \xrightarrow{n,0} \lambda P(x) + \mu Q(x).$$

Ejemplo 3.6.6 Calcular el polinomio de Taylor de orden 4 en 0 de

$$h(x) = 2 \operatorname{sen} x - \frac{3}{1-x}.$$

Presentamos la solución esquemáticamente

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{sen} x \xrightarrow{4,0} x - \dfrac{x^3}{6} \\ \dfrac{1}{1-x} \xrightarrow{4,0} 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$\begin{aligned} h(x) \xrightarrow{4,0} & \ 2(x - \frac{x^3}{6}) - 3(1 + x + x^2 + x^3 + x^4) = \\ & = -3 - x - 3x^2 - \frac{10}{3}x^3 - 3x^4. \end{aligned}$$

◁

Producto

Sean $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo abierto con $0 \in I$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $f, g \in \mathcal{C}^n(I)$. Si $P(x)$ es el polinomio de Taylor de orden n en 0 de la función $f(x)$ y $Q(x)$ es el polinomio de Taylor de orden n en 0 de la función $g(x)$, entonces $P(x)Q(x)$ truncado a grado n es el polinomio de Taylor de orden n de fg en 0. Esquemáticamente:

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \xrightarrow{n,0} P(x) \\ g(x) \xrightarrow{n,0} Q(x) \end{array}\right\} \Longrightarrow f(x)g(x) \xrightarrow{n,0} P(x)Q(x), \text{ truncado a grado } n.$$

Ejemplo 3.6.7 Calcular el polinomio de Taylor de orden 3 en 0 de

$$h(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{1-x}.$$

Presentamos la solución esquemáticamente

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{sen} x \xrightarrow{3,0} x - \dfrac{x^3}{6} \\ \dfrac{1}{1-x} \xrightarrow{3,0} 1 + x + x^2 + x^3 \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$P(x)Q(x) = \left(x - \frac{x^3}{6}\right)(1 + x + x^2 + x^3) = x + x^2 + \frac{5}{6}x^3 + \frac{5}{6}x^4 - \frac{1}{6}x^5 - \frac{1}{6}x^6$$

y tomando su truncación a grado 3, concluimos

$$h(x) \xrightarrow{3,0} x + x^2 + \frac{5}{6}x^3.$$

$\triangleleft$

Producto. Caso especial

Sean $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo abierto con $0 \in I$, $k \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $f \in \mathcal{C}^n(I)$. Si $P(x)$ es el polinomio de Taylor de orden n en 0 de la función $f(x)$, entonces $x^k P(x)$ es el polinomio de Taylor de orden $k+n$ de $x^k f$ en 0. Esquemáticamente:

$$f(x) \xrightarrow{n,0} P(x) \Longrightarrow x^k f(x) \xrightarrow{k+n,0} x^k P(x).$$

Ejemplo 3.6.8 Calcular el polinomio de Taylor de orden 5 en 0 de

$$h(x) = x^2 \operatorname{sen} x.$$

Presentamos la solución esquemáticamente

$$\operatorname{sen} x \xrightarrow{3,0} x - \frac{x^3}{6} \Longrightarrow h(x) \xrightarrow{5,0} x^2(x - \frac{x^3}{6}) = x^3 - \frac{x^5}{6}.$$

$\triangleleft$

Cociente

Sean $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo abierto con $0 \in I$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $f, g \in \mathcal{C}^n(I)$ de forma que $g(x) \neq 0$, $\forall\, x \in I - \{0\}$.
Sean

- $P_f(x) \neq 0$ el polinomio de Taylor de orden n en 0 de f.
- $P_g(x) \neq 0$ el polinomio de Taylor de orden n en 0 de g.
- m_f el grado del término de menor grado de $P_f(x)$.
- m_g el grado del término de menor grado de $P_g(x)$.

Se supone que $m_g \leq m_f$. Entonces se tiene que

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)},$$

existe y es finito y que la función

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{g(x)}, & \text{si } x \neq 0 \\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)}, & \text{si } x = 0 \end{cases},$$

verifica que $h \in \mathcal{C}^{n-m_g}(I)$.

Entonces si dividimos el polinomio $P_f(x)$ entre $P_g(x)$, pero ordenándolos de menor a mayor grado, al contrario que en la división polinómica habitual, y detenemos la división cuando en el siguiente paso el cociente vaya a superar el grado $n - m_g$, entonces dicho cociente es el polinomio de Taylor de orden $n - m_g$ en 0 de h. Llamaremos a este proceso *división de series.*

Nótese que si $g(0) \neq 0$ entonces $h(x) = f(x)/g(x)$, $\forall\, x \in I$. Cuando $g(0) = 0$, el cociente $f(x)/g(x)$, solo está definido en $I - \{0\}$, pero a veces, bajo las condiciones arriba establecidas y abusando de la notación, utilizaremos el símbolo $f(x)/g(x)$ para referirnos a la función $h(x)$ definida sobre todo I.
Esquemáticamente:

$$\left.\begin{array}{r} f(x) \xrightarrow{n,0} P_f(x) \\ g(x) \xrightarrow{n,0} P_g(x) \end{array}\right\} \Longrightarrow f(x)/g(x) \xrightarrow{n-m_g,0} C(x),$$

donde $C(x)$ es el cociente de la división de series

$$\begin{array}{r|l} P_f(x) & P_g(x) \\ \cline{2-2} R(x) & C(x) \end{array},$$

truncado a grado $n - m_g$.

Ejemplo 3.6.9 Retomamos las funciones del Ejemplo 3.6.7, pero ahora interpretadas como un cociente. Calculemos el polinomio de Taylor de orden 3 en 0 de

$$h(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{1-x}.$$

Tenemos que

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen} x &\xrightarrow{3,0} x - \frac{x^3}{6} \\ 1-x &\xrightarrow{3,0} 1-x \end{aligned}\right\} \Longrightarrow$$
$$h(x) \xrightarrow{3,0} x + x^2 + \frac{5}{6}x^3,$$

ya que haciendo la división de series con el criterio de parada descrito:

Paso 1:

$$\begin{array}{rrr|l} x & & -x^3/6 & 1-x \\ \cline{4-4} -x & +x^2 & & x \\ \cline{1-3} & x^2 & -x^3/6 & \end{array}$$

Paso 2:

$$\begin{array}{rrr|l} x & & -x^3/6 & 1-x \\ \cline{4-4} -x & +x^2 & & x+x^2 \\ \cline{1-3} & x^2 & -x^3/6 & \\ & -x^2 & +x^3 & \\ \cline{2-3} & & 5x^3/6 & \end{array}$$

Paso 3:

$$\begin{array}{rrrr|l} x & & -x^3/6 & & 1-x \\ \cline{5-5} -x & +x^2 & & & x+x^2+5x^3/6 \\ \cline{1-3} & x^2 & -x^3/6 & & \\ & -x^2 & +x^3 & & \\ \cline{2-3} & & 5x^3/6 & & \\ & & -5x^3/6 & +5x^4/6 & \\ \cline{3-4} & & & 5x^4/6 & \end{array}$$

Nótese como en realidad no es necesario calcular el último resto. Se ha incluido aquí por claridad, para que el algoritmo de división quede completo y se vea que el siguiente término del cociente ya sería de grado 4. ◁

Composición con una potencia

Sean $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo abierto con $0 \in I$, $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$, $k \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $f \in \mathcal{C}^n(I)$. Si $P(x)$ es el polinomio de Taylor de orden n en 0 de la función $f(x)$, entonces $P(\lambda x^k)$ es el polinomio de Taylor de $f(\lambda x^k)$ de orden kn en 0. Esquemáticamente:

$$f(x) \xrightarrow{n,0} P(x) \Longrightarrow f(\lambda x^k) \xrightarrow{kn,0} P(\lambda x^k).$$

Ejemplo 3.6.10 Calcular el polinomio de Taylor de orden 6 en 0 de

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Presentamos la solución esquemáticamente

$$\begin{aligned} (1+x)^{-1/2} &\xrightarrow{3,0} 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 \Longrightarrow \\ h(x) = (1+(-x^2))^{-1/2} &\xrightarrow{6,0} 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \frac{5}{16}x^6. \end{aligned}$$

◁

Derivadas

Sean $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo abierto con $0 \in I$, $n \in \mathbb{N}$ y $f \in \mathcal{C}^n(I)$. Si $P(x)$ es el polinomio de Taylor de orden n en 0 de la función $f(x)$, entonces $P'(x)$ es el polinomio de Taylor de $f'(x)$ de orden $n-1$ en 0. Esquemáticamente:

$$f(x) \xrightarrow{n,0} P(x) \Longrightarrow f'(x) \xrightarrow{n-1,0} P'(x).$$

Ejemplo 3.6.11 Calcular el polinomio de Taylor de orden 2 en 0 de

$$h(x) = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Presentamos la solución esquemáticamente

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x} &\xrightarrow{3,0} 1 + x + x^2 + x^3 \Longrightarrow \\ h(x) = \left(\frac{1}{1-x}\right)' &\xrightarrow{2,0} (1 + x + x^2 + x^3)' = 1 + 2x + 3x^2. \end{aligned}$$

◁

Integrales

Sean $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo abierto con $0 \in I$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $f \in \mathcal{C}^n(I)$. Si $P(x)$ es el polinomio de Taylor de orden n en 0 de la función $f(x)$, entonces $\displaystyle\int_0^x P(t)\,\mathrm{d}t$ es el polinomio de Taylor de $\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ de orden $n+1$ en 0. Esquemáticamente:

$$f(x) \xrightarrow{n,0} P(x) \Longrightarrow \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow{n+1,0} \int_0^x P(t)\,\mathrm{d}t.$$

Ejemplo 3.6.12 Calcular el polinomio de Taylor de orden 7 en 0 de

$$h(x) = \operatorname{arc\,sen} x.$$

Teniendo en cuenta lo calculado en el Ejemplo 3.6.10, presentamos la solución esquemáticamente

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} &\xrightarrow{6,0} 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \frac{5}{16}x^6 \Longrightarrow \\ h(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} &\xrightarrow{7,0} \int_0^x (1 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{3}{8}t^4 + \frac{5}{16}t^6)\,\mathrm{d}t = \\ &= x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7. \end{aligned}$$

◁

3.6.3 Cálculo de límites III

Proposición 3.6.13 Sean $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo abierto, $a \in I$, $n \in \mathbb{N}$ y $f \in \mathcal{C}^n(I)$, verificando

$$f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0,$$

y

$$f^{(n)}(a) \neq 0.$$

Entonces, se tiene que

$$f(x) \sim \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \text{ si } x \to a.$$

◁

Por lo tanto, si el polinomio de Taylor de cierto orden de una función en a es no nulo, dicha función es equivalente en a al término de menor grado de ese polinomio. Esto nos permite construir infinitésimos equivalentes distintos de los que tenemos tabulados para resolver indeterminaciones.

Ejemplo 3.6.14 Calcular

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x + x^3/6}{x^2(2 - 2\cos x - x^2 e^x)}.$$

Calculemos polinomios de Taylor para el numerador y el denominador

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} x - x + x^3/6 &\xrightarrow{5,0} \frac{x^5}{120} \\ x^2(2 - 2\cos x - x^2 e^x) &\xrightarrow{5,0} -x^5 \end{aligned}$$

Así, por la Proposición 3.6.13, tendremos que

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} x - x + x^3/6 &\sim \frac{x^5}{120} \text{ si } x \to 0 \\ x^2(2 - 2\cos x - x^2 e^x) &\sim -x^5 \text{ si } x \to 0 \end{aligned}$$

y por el principio de sustitución, nuestro límite tomará el mismo valor que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^5}{120}}{-x^5} = \lim_{x\to 0} -\frac{1}{120} = -\frac{1}{120}$$

◁

3.7 Ejercicios

Ejercicio 3.1 Calcular la derivada de $h(x) = f(x)^{g(x)}$

Ejercicio 3.2 Estudiar la continuidad y derivabilidad de

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

¿Hasta que orden admite f derivadas en $\mathbb{R}$?

Ejercicio 3.3 Estudiar la continuidad y derivabilidad de

$$f(x) = \begin{cases} e^{-2x-1}, & \text{si } x \leq -1 \\ x^2, & \text{si } -1 < x < 0 \\ \operatorname{sen} x, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}.$$

Ejercicio 3.4 Calcular la derivada n-ésima de

$$f(x) = \frac{1+x}{1-x}.$$

Ejercicio 3.5 Probar que existe una única solución real de

$$x^2 = x\cos x - \operatorname{sen} x.$$

Ejercicio 3.6 Calcular una solución de

$$2x - \log x - 2 = 0.$$

¿Cuántas soluciones tiene la ecuación anterior?

Ejercicio 3.7 Probar que entre dos soluciones de $e^x \operatorname{sen} x = 1$, existe al menos una solución de $e^x \cos x = -1$.

Ejercicio 3.8 Probar que

$$|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y| \leq |x-y|, \ \forall\, x, y \in \mathbb{R}.$$

Ejercicio 3.9 Probar que

$$1 - \frac{a}{b} \leq \log\left(\frac{b}{a}\right) \leq \frac{b}{a} - 1, \ \forall\, a, b > 0.$$

Ejercicio 3.10 Hállese una cota del error cometido al considerar la aproximación

$$34^{1/5} \approx 2.$$

Ejercicio 3.11 Calcular

$$\lim_{x\to\pi/4} \frac{e^{\operatorname{sen} x} - e^{\cos x}}{\operatorname{sen} x - \cos x}.$$

Ejercicio 3.12 Hallar $p \in \mathbb{N}$ para que el límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(\cos x) + 1 - \cos x}{x^p},$$

sea finito y distinto de cero.

Ejercicio 3.13 Calcular

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x(e^x - \cos x)(3 + \cos x)}{(x^2 + 2x - 1)(2 - 3\operatorname{sen} 2x)\log(1+3x)}.$$

Ejercicio 3.14 Probar que

$$f(x) = x^5 + x^4 + 2x^3 + x^2 - 13x + 7,$$

tiene un único extremo relativo en $(0, 1)$ y determinar si es un máximo o un mínimo.

Ejercicio 3.15 Hallar los extremos absolutos en $[0, 2]$ de

$$f(x) = |x^2 - 3x + 2|$$

Ejercicio 3.16 Fecha estelar 3141.5. El capitán James Tiberius Kirk se encuentra al mando de la nave interestelar *Enterprise* en el punto del espacio $(0, -1, 0)$, dentro de territorio Klingon. Debido a una avería en el timón, la *Enterprise* sólo puede moverse en el plano $z = 0$ a lo largo de las rectas de la forma $c(y + 1) = x$ con $c \geq 3/4$. Los sensores detectan una anomalía subespacial en la región

$$\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 0 \leq x \leq 1,\ -1 \leq y \leq 0\right\},$$

de modo que en esta zona la *Enterprise* sólo puede viajar a $1/9$ de su velocidad máxima. En esos momentos, Kirk recibe la orden de regresar a espacio de la Federación, cuya frontera con el territorio Klingon es el plano $y = 0$, en el menor tiempo posible. Calcular la trayectoria que debe seguir la *Enterprise*.

Ejercicio 3.17 El beneficio anual de una empresa es

$$B(x, y) = 6 - 6x - y^2,$$

con $x, y \in \mathbb{R}$ parámetros económicos que verifican $x^2 + y^2 = 1$. Determinar los valores de x, y para que el beneficio sea máximo.

Ejercicio 3.18 Un alambre de longitud L se corta en dos trozos de longitudes a y b. Con un trozo se hace una cuadrado y con el otro una circunferencia. ¿Cómo ha de cortarse el alambre para que la suma de las áreas de las dos figuras sea máxima? ¿Y para que sea mínima?

Ejercicio 3.19 La cilindrada de un motor de explosión es $n\pi x^2 y/4$, siendo n el número de cilindros, x el diámetro e y la carrera. Se quiere desarrollar una nueva familia de motores de 6 cilindros y 2430 cm^3, cuyo par motor máximo viene dado por

$$23 + \cos\left(\frac{\pi y x^2 (x - 1)}{1620}\right).$$

Por razones constructivas, los cilindros deberán tener un diámetro mayor o igual que 2π y una carrera mayor o igual que $180\pi^{-3}$. Determinar el valor del diámetro para que el motor proporcione un par máximo lo más elevado posible.

Ejercicio 3.20 Hallar la longitud de los lados del triángulo isósceles de perímetro 1 que tiene área máxima.

Ejercicio 3.21 Calcular el polinomio de Taylor de grado 3 en $a = 1$ de

$$f(x) = x^2 \operatorname{sen} x.$$

Ejercicio 3.22 Calcular una cota del error que se comete al aproximar

$$e \approx 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}.$$

Ejercicio 3.23 Aproximando e^x por polinomios, calcular e con un error menor que 10^{-5}.

Ejercicio 3.24 Aclarar la procedencia de

$$\sqrt{a^2 + x} \approx a + \frac{x}{2a},$$

donde $a > 0$. Obtener un valor aproximado de $\sqrt{27}$ tomando $a = 5$ y acotar el error cometido.

Ejercicio 3.25 Calcular el polinomio de Taylor de orden 3 de $\operatorname{tg} x$ en 0.

Ejercicio 3.26 ¿Cuántos términos hay que tomar en $1 - x^2/2 + x^4/24 - \cdots$ para obtener $\cos(\pi/10)$ con una precisión de una milésima?

Ejercicio 3.27 Probar que

$$|\operatorname{sen}(a + h) - (\operatorname{sen} a + h \cos a)| \leq \frac{h^2}{2}.$$

Ejercicio 3.28 Calcular el polinomio de Taylor de grado $2n$ en 0 de

$$f(x) = x^2 \cos x + \frac{1}{x^2 - \alpha^2} + x^2,$$

donde $\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Ejercicio 3.29 Calcular

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 - \operatorname{sen}^2 x}{x^4}.$$

Ejercicio 3.30 Estudiar la continuidad en 0 de

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^4 \operatorname{sen}(1/x^2)}{e^x - x - \cos x}, & \text{si } x \neq 0 \\ -10, & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

Ejercicio 3.31 Sabiendo que el polinomio de Taylor de orden n de $(1+x)^{-1/2}$ en 0 es

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{(2k)!}{4^k (k!)^2} x^k,$$

calcular

a) El polinomio de Taylor de orden $2n$ en 0 de

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

b) El polinomio de Taylor de orden $2n+1$ en 0 de $\operatorname{arc\,sen} x$

c) Calcular

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{arc\,sen} x - x - x^3/6}{(1 - \cos 2x) \operatorname{sen}^3 x}.$$

Ejercicio 3.32 Calcular

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{\operatorname{arc\,sen} x}{x} \right)^{1/x^2}.$$

Ejercicio 3.33 Calcular

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x \operatorname{sen} x - x - x^2}{x^2 + x \log(1-x)}.$$

Capítulo 4

Integración

4.1 Primitivas

Definición 4.1.1 Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo abierto y $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Diremos que f admite primitiva en I si existe una función $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable en I tal que

$$F'(x) = f(x),\ \forall\, x \in I.$$

En este caso diremos que F es una *primitiva* de f en I. ◃

Lema 4.1.2 Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo abierto y $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Supongamos que f admite primitiva en I y que F es una primitiva de f en I. Entonces, para cada $C \in \mathbb{R}$, $F(x) + C$ también es una primitiva de f en I.
Por tanto, si una función admite primitiva, admite infinitas primitivas. ◃

Definición 4.1.3 Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo abierto y $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función que admite primitiva en I. Llamaremos *integral indefinida* de f al conjunto de primitivas de f en I y la denotaremos por

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

◃

Nota 4.1.4 Si $f(x)$ es un función, utilizaremos la siguiente notación

$$\mathrm{d}f := f'(x)\,\mathrm{d}x,$$

que nos permitirá recordar más fácilmente algunas fórmulas. ◃

4.2 Cálculo de primitivas

El cálculo de primitivas (o equivalentemente, de integrales indefinidas) en general es muy costoso. Incluso existen funciones con expresiones sencillas, para las cuales se sabe que existe primitiva, pero ésta no se puede expresar mediante combinaciones de funciones elementales. Son las primitivas de las que en la enseñanza elemental nos decían que *no se pueden resolver*, aunque esta expresión es confusa, pues en realidad se suelen poder resolver, aunque no por métodos convencionales.

La estrategia para calcular integrales indefinidas es partir de algunas funciones para las cuales obtener una primitiva es trivial (las llamadas *integrales inmediatas*) y cuando se tenga una función cuya integral no sea inmediata, realizar ciertas manipulaciones que permitan reducirla a integrales inmediatas.

4.2.1 Integrales inmediatas

Presentamos en la Tabla 4.1 las integrales inmediatas más comunes.

Primitiva	Primitiva
$\displaystyle\int x^k \, \mathrm{d}x = \frac{x^{k+1}}{k+1} + C,\ k \neq -1$	$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \log\lvert x\rvert + C$
$\displaystyle\int e^x \, \mathrm{d}x = e^x + C$	$\displaystyle\int a^x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\log a} a^x + C,\ a > 0,\ a \neq 1$
$\displaystyle\int \operatorname{sen} x \, \mathrm{d}x = -\cos x + C$	$\displaystyle\int \cos x \, \mathrm{d}x = \operatorname{sen} x + C$
$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{sen}^2 x} = -\operatorname{cotg} x + C$	$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} x + C$	$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc\,sen} x + C$

Tabla 4.1 – Integrales inmediatas.

4.2.2 Integración por descomposición

Proposición 4.2.1 Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo abierto, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ y $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que admiten primitiva en I. Entonces $\lambda f + \mu g$ admite primitiva en I y además

$$\int (\lambda f(x) + \mu g(x)) \, \mathrm{d}x = \lambda \int f(x) \, \mathrm{d}x + \mu \int g(x) \, \mathrm{d}x.$$

◁

Podemos emplear esta propiedad en muchas ocasiones. El ejemplo más claro es la integración de polinomios, para los que basta conocer esta fórmula y la integral inmediata de las potencias.

Ejemplo 4.2.2 Calculemos una primitiva de $5x^3 - 3x^2 + x - 2$.

$$\begin{aligned}
&\int (5x^3 - 3x^2 + x - 2)\,\mathrm{d}x = 5\int x^3\,\mathrm{d}x - 3\int x^2\,\mathrm{d}x + \int x\,\mathrm{d}x - 2\int \mathrm{d}x = \\
&= \frac{5}{4}x^4 - x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + C
\end{aligned}$$

◁

También se suele utilizar esta propiedad combinada con ciertas fórmulas trigonométricas.

Ejemplo 4.2.3

$$\begin{aligned}
&\int (\operatorname{sen}(x/2)\cos(x/2) + \cos^2(x/2) - \operatorname{sen}^2(x/2))\,\mathrm{d}x = \\
&= \int \left(\frac{1}{2}\operatorname{sen} x + \cos x\right)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x + \int \cos x\,\mathrm{d}x = \\
&= \frac{-\cos x}{2} + \operatorname{sen} x + C
\end{aligned}$$

◁

Otro tipo de integrales que se resuelven por descomposición son la de las funciones racionales, cuyo tratamiento detallaremos a continuación.

4.2.2.1 Funciones racionales

Trataremos aquí el cálculo de primitivas de funciones racionales, es decir

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x,$$

donde P, Q son polinomios de una variable.

El método general consiste en la descomposición de la función racional en fracciones simples, seguida de una integración por descomposición.

4.2.2.1.1 Caso 1 Si el grado de P es menor que el grado de Q, entonces realizaremos el siguiente proceso:

1) Calcular las raíces reales y complejas de Q. Pongamos que son

1.1) Raíces reales $r_1, \ldots, r_p$ con multiplicidades respectivas $m_1, \ldots, m_p$.

1.2) Raíces complejas $\alpha_1 \pm \beta_1 i, \ldots, \alpha_s \pm \beta_s i$ con multiplicidades respectivas $k_1, \ldots, k_s$, y con $\beta_i \neq 0,\ i = 1, \ldots, s$.

Si llamamos λ al coeficiente del término de mayor grado de Q, sabemos que se puede escribir

$$\begin{aligned} Q(x) =&\lambda(x-r_1)^{m_1} \cdots (x-r_p)^{m_p} \\ &((x-\alpha_1)^2+\beta_1^2)^{k_1} \cdots ((x-\alpha_s)^2+\beta_s^2)^{k_s} \end{aligned} \tag{4.1}$$

2) Plantear la ecuación

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} =&\frac{A_{11}}{x-r_1} + \frac{A_{12}}{(x-r_1)^2} + \cdots + \frac{A_{1m_1}}{(x-r_1)^{m_1}} \\ &+ \frac{A_{21}}{x-r_2} + \frac{A_{22}}{(x-r_2)^2} + \cdots + \frac{A_{2m_2}}{(x-r_2)^{m_2}} \\ &+ \cdots + \\ &+ \frac{A_{p1}}{x-r_p} + \frac{A_{p2}}{(x-r_p)^2} + \cdots + \frac{A_{pm_p}}{(x-r_p)^{m_p}} \\ &+\left(\frac{a_{1,0}+a_{1,1}x+\cdots+a_{1,2k_1-3}x^{2k_1-3}}{((x-\alpha_1)^2+\beta_1^2)^{k_1-1}}\right)' + \frac{M_1x+N_1}{(x-\alpha_1)^2+\beta_1^2} \\ &+\left(\frac{a_{2,0}+a_{2,1}x+\cdots+a_{2,2k_2-3}x^{2k_2-3}}{((x-\alpha_2)^2+\beta_2^2)^{k_2-1}}\right)' + \frac{M_2x+N_2}{(x-\alpha_2)^2+\beta_2^2} \\ &+ \cdots + \\ &+\left(\frac{a_{s,0}+a_{s,1}x+\cdots+a_{s,2k_s-3}x^{2k_s-3}}{((x-\alpha_s)^2+\beta_s^2)^{k_s-1}}\right)' + \frac{M_sx+N_s}{(x-\alpha_s)^2+\beta_s^2} \end{aligned} \tag{4.2}$$

Donde todos los Aij, $a_{i,j}$, M_i y N_i son coeficientes indeterminados que habrá que determinar en las etapas sucesivas. Para simplificar las notaciones, llamaremos

$$p_i(x) = a_{i,0} + a_{i,1}x + \cdots + a_{i,2k_i-3}x^{2k_i-3},\ i = 1, \ldots, s,$$

e introduciremos notación de sumatorios, quedando la ecuación (4.2) escrita como

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)} =& \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{m_i}\frac{A_{ij}}{(x-r_i)^j} + \sum_{i=1}^{s}\frac{M_i x + N_i}{(x-\alpha_i)^2+\beta_i^2} \\ &+ \sum_{i=1}^{s}\left(\frac{p_i(x)}{((x-\alpha_i)^2+\beta_i^2)^{k_i-1}}\right)'\end{aligned} \tag{4.3}$$

Debemos entender que los términos del último sumatorio para los cuales $k_i = 1$, son 0.

3) Reducir el segundo miembro de la ecuación (4.3) a común denominador $Q(x)$, cosa que siempre es posible por la ecuación (4.1) e igualando numeradores, la ecuación (4.3) nos conduce a

$$\begin{aligned}&P(x) = \\ &\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{m_i} A_{ij}\frac{Q(x)}{(x-r_i)^j} + \sum_{i=1}^{s}(M_i x + N_i)\frac{Q(x)}{(x-\alpha_i)^2+\beta_i^2} \\ &+ \sum_{i=1}^{s} q_i(x)\frac{Q(x)}{((x-\alpha_i^2)+\beta_i^2)^{k_i}}\end{aligned} \tag{4.4}$$

Donde $q_i(x) = (p_i'(x)((x-\alpha_i)^2+\beta_i^2) - 2(k_i-1)(x-\alpha_i)p_i(x))$.

El segundo miembro de la ecuación (4.4) es un polinomio porque los términos

$$\frac{Q(x)}{(x-r_i)^j},\ \frac{Q(x)}{(x-\alpha_i)^2+\beta_i^2} \text{ y } \frac{Q(x)}{((x-\alpha_i)^2+\beta_i^2)^{k_i}}$$

son polinomios por la fórmula (4.1)

4) A partir de la igualdad entre polinomios (4.4) podemos igualar coeficientes o realizar otra serie de operaciones para obtener un sistema de ecuaciones lineales compatible y determinado cuyas incógnitas son los coeficientes indeterminados introducidos en (4.2). Se resuelve este sistema lineal y se reescribe (4.2) con los coeficientes indeterminados sustituidos por las soluciones

Después del proceso anterior se tendría, por la regla de integración por descomposición,

$$\begin{aligned}\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x =& \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{m_i}\int\frac{A_{ij}}{(x-r_i)^j}\,\mathrm{d}x + \sum_{i=1}^{s}\int\frac{M_i x + N_i}{(x-\alpha_i)^2+\beta_i^2}\,\mathrm{d}x \\ &+ \sum_{i=1}^{s}\int\left(\frac{p_i(x)}{((x-\alpha_i)^2+\beta_i^2)^{k_i-1}}\right)'\mathrm{d}x,\end{aligned} \tag{4.5}$$

donde ahora los coeficientes Aij, $a_{i,j}$, M_i y N_i ya serían valores concretos calculados antes. Cada una de las integrales que aparecen en (4.5) son fácilmente resolubles:

$$\int \frac{A_{ij}}{(x-r_i)^j}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} A_{ij}\log|x-r_i|, & \text{si } j=1 \\[2ex] \dfrac{A_{ij}}{(1-j)(x-r_i)^{j-1}}, & \text{si } j>1 \end{cases}$$

$$\int \frac{M_i x + N_i}{(x-\alpha_i)^2+\beta_i^2}\,\mathrm{d}x = \frac{M_i}{2}\log|(x-\alpha_i)^2+\beta_i^2| + \frac{M_i\alpha_i+N_i}{\beta_i}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x-\alpha_i}{\beta_i}\right)$$

$$\int \left(\frac{p_i(x)}{((x-\alpha_i)^2+\beta_i^2)^{k_i-1}}\right)'\,\mathrm{d}x = \frac{p_i(x)}{((x-\alpha_i)^2+\beta_i^2)^{k_i-1}}.$$

Para justificar las dos primeras integrales, se utilizan los contenidos de la sección 4.2.4 dedicada al cambio de variable.

4.2.2.1.2 Caso 2 Si el grado de P es mayor o igual que el grado de Q, entonces realizamos la *división de polinomios* expresada esquemáticamente:

$$\begin{array}{l|l} P(x) & Q(x) \\ \cline{2-2} R(x) & C(x) \end{array},$$

con grado de $R(x)$ menor que el grado de $Q(x)$. En estas condiciones, se tiene

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

por lo que aplicando la regla de integración por descomposición

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x = \int C(x)\,\mathrm{d}x + \int \frac{R(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x,$$

donde el primer sumando es la sencilla integral de un polinomio y el segundo es una integral de una función racional en las condiciones del Caso 1.

Nota 4.2.4 Todo el proceso anterior sólo se puede llevar a cabo en el caso en que se puedan obtener con facilidad las raíces del denominador de la función racional, lo cual sabemos que no siempre es posible. ◁

Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 4.2.5 Calcular

$$\int \frac{11x^3 - 20x^2 + 72x - 32}{x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 8x^2 + 16}\,\mathrm{d}x$$

Aplicando el algoritmo de Ruffini al denominador, tenemos que

$$x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 8x^2 + 16 = (x-2)^2(x+1)(x^2+4),$$

Es decir, tendríamos como raíces reales 2 con multiplicidad 2 y -1 con multiplicidad 1 y las raíces complejas conjugadas $2i$ y $-2i$ ambas con multiplicidad 1.
La descomposición de la ecuación (4.2) sería

$$\frac{11x^3 - 20x^2 + 72x - 32}{(x-2)^2(x+1)(x^2+4)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{D}{x+1} + \frac{Mx+N}{x^2+4}.$$

Reduciendo el segundo miembro a común denominador $(x-2)^2(x+1)(x^2+4)$ e igualando numeradores, se tiene que

$$\begin{aligned} 11x^3 - 20x^2 + 72x - 32 =& A(x-2)(x+1)(x^2+4) + B(x+1)(x^2+4) \\ &+ D(x-2)^2(x^2+4) + (Mx+N)(x-2)^2(x+1). \end{aligned} \tag{4.6}$$

Para obtener los coeficientes A, B, C, M, N, necesitamos obtener un sistema lineal de 5 ecuaciones con cinco incógnitas determinado por la ecuación polinómica (4.6). Para ello, tenemos dos alternativas. La primera consistiría en agrupar el segundo miembro de la ecuación (4.6) en potencias de x

$$\begin{aligned} 11x^3 - 20x^2 + 72x - 32 =& (A+D+M)x^4 + (-A+B-4D-3M+N)x^3 \\ &+ (2A+B+8D-3N)x^2 \\ &+ (-4A+4B-16D+4M)x \\ &- 8A + 4B + 16D + 4N. \end{aligned}$$

e igualar coeficientes de las distintas potencias de x para obtener el sistema lineal

$$\left\{ \begin{array}{rrrrrcr} A & & +D & +M & & = & 0 \\ -A & +B & -4D & -3M & +N & = & 11 \\ 2A & +B & +8D & & -3N & = & -20 \\ -4A & +4B & -16D & +4M & & = & 72 \\ -8A & +4B & +16D & & +4N & = & -32 \end{array} \right. \tag{4.7}$$

Y resolviendo el sistema, se tienen los coeficientes. Este método es costoso y propenso a errores, por la agrupación en potencias de x y porque el sistema lineal resultante no es rápido de resolver.

Por ello es mejor considerar una segunda alternativa, que consiste en evaluar la ecuación (4.6) en cinco valores de x *sencillos* que incluyan las raíces reales del denominador de la función racional. Estos valores podrían ser por ejemplo 2, -1, 0, 1 y -2. De esta manera obtendríamos fácilmente el sistema

$$\left\{\begin{array}{rrrrrcr} & +24B & & & & = & 120 \\ & & +45D & & & = & -135 \\ -8A & +4B & +16D & & +4N & = & -32 \\ -10A & +10B & +5D & +2M & +2N & = & 31 \\ 32A & -8B & +128D & +32M & -16N & = & -344 \end{array}\right. \tag{4.8}$$

que es equivalente al anterior (4.7), pero más sencillo de resolver, pues al menos hay dos incógnitas casi despejadas.
Resolviendo, obtenemos

$$A = 1, B = 5, D = -3, M = 2, N = 1,$$

de donde

$$\begin{aligned} &\int \frac{11x^3 - 20x^2 + 72x - 32}{x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 8x^2 + 16}\,\mathrm{d}x = \\ &= \int \left(\frac{1}{x-2} + \frac{5}{(x-2)^2} - \frac{3}{x+1} + \frac{2x+1}{x^2+4} \right) \mathrm{d}x \\ &= \int \frac{1}{x-2}\,\mathrm{d}x + \int \frac{5}{(x-2)^2}\,\mathrm{d}x - \int \frac{3}{x+1}\,\mathrm{d}x + \int \frac{2x+1}{x^2+4}\,\mathrm{d}x \\ &= \log|x-2| - \frac{5}{x-2} - 3\log|x+1] + \log(x^2+4) + \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{2} + C. \end{aligned}$$

◁

Ejemplo 4.2.6 Calcular

$$\int \frac{2x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 2x - 3}{(x+2)(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Como el grado del numerador es menor que el grado del denominador y el denominador ya está factorizado, la descomposición en fracciones simples es

$$\frac{2x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 2x - 3}{(x+2)(x^2+1)^2} = \frac{A}{x+2} + \left(\frac{ax+b}{x^2+1}\right)' + \frac{Mx+N}{x^2+1} =$$

$$= \frac{A(x^2+1)^2 - (ax^2 + 2xb - a)(x+2) + (Mx+N)(x+2)(x^2+1)}{(x+2)(x^2+1)^2},$$

e igualando numeradores tenemos

$$\begin{aligned} &2x^4+2x^3+4x^2+2x-3= \\ &=A(x^2+1)^2-(ax^2+2xb-a)(x+2)+(Mx+N)(x+2)(x^2+1). \end{aligned} \tag{4.9}$$

Como hay 5 coeficientes indeterminados, elegimos para evaluar la ecuación (4.9) cinco valores distintos que incluyan las raíces reales, como por ejemplo $-2,-1,0,1,2$, obteniendo así el sistema lineal

$$\left\{\begin{array}{rrrrrcr} 25A & & & & & = & 25 \\ 4A & & +2b & -2M & +2N & = & -1 \\ A & +2a & & & +2N & = & -3 \\ 4A & & -6b & +6M & +6N & = & 7 \\ 25A & -12a & -16b & +40M & +20N & = & 65 \end{array}\right. , \tag{4.10}$$

cuyas soluciones son $A=1, a=-1, b=-1/2, M=1, N=-1$. Por lo que

$$\begin{aligned} &\int \frac{2x^4+2x^3+4x^2+2x-3}{(x+2)(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x=\int\left(\frac{1}{x+2}-\left(\frac{x+1/2}{x^2+1}\right)'+\frac{x-1}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x= \\ &=\int\frac{1}{x+2}\,\mathrm{d}x-\int\left(\frac{x+1/2}{x^2+1}\right)'\mathrm{d}x+\int\frac{x-1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x= \\ &=\log|x+2|-\frac{2x+1}{2(x^2+1)}+\frac{1}{2}\log(x^2+1)-\operatorname{arc\,tg}x+C \end{aligned}$$

◁

Ejemplo 4.2.7 Calcular

$$\int\frac{4x+1}{2x^2-5x+2}\,\mathrm{d}x.$$

El denominador factoriza como

$$2x^2-5x+2=2(x-1/2)(x-2)$$

de donde la descomposición en fracciones simples es

$$\frac{4x+1}{2x^2-5x+2}=\frac{A}{x-1/2}+\frac{B}{x-2}=\frac{2A(x-2)+2B(x-1/2)}{2(x-1/2)(x-2)}.$$

Igualando numeradores

$$4x+1=2A(x-2)+2B(x-1/2)$$

y evaluando en $1/2$ y en 2, se obtiene el sistema lineal

$$\left\{\begin{array}{rrcr} -3A & & = & 3 \\ & 3B & = & 9 \end{array}\right.$$

cuyas soluciones son

$$A = -1, B = 3.$$

Por lo tanto

$$\int \frac{4x+1}{2x^2-5x+2}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{-1}{x-1/2} + \frac{3}{x-2} \right) \mathrm{d}x =$$

$$= -\int \frac{\mathrm{d}x}{x-1/2} + 3\int \frac{\mathrm{d}x}{x-2} = 3\log|x-2| - \log|x-1/2| + C.$$

◁

Ejemplo 4.2.8 Calcular

$$\int \frac{x^8}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Como el grado del numerador es mayor o igual que el del denominador hay que dividir los polinomios

$$\begin{array}{rrrrr|l}
x^8 & & & & & x^2-1 \\ \cline{6-6}
-x^8 & -x^6 & & & & x^6-x^4+x^2-1 \\ \cline{1-4}
 & -x^6 & & & & \\
 & x^6 & +x^4 & & & \\ \cline{2-4}
 & & x^4 & & & \\
 & & -x^4 & -x^2 & & \\ \cline{3-4}
 & & & -x^2 & & \\
 & & & x^2 & +1 & \\ \cline{4-5}
 & & & & 1 &
\end{array}$$

por lo que

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^8}{1+x^2}\,\mathrm{d}x &= \int x^6 - x^4 + x^2 - 1 + \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \\
&= \int x^5\,\mathrm{d}x - \int x^4\,\mathrm{d}x + \int x^2\,\mathrm{d}x - \int \mathrm{d}x + \int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \\
&= \frac{x^7}{7} - \frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3} - x + \operatorname{arc\,tg} x + C.
\end{aligned}$$

◁

Ejemplo 4.2.9 Calcular

$$\int \frac{1-x^2}{x^3+8}\,\mathrm{d}x.$$

El denominador factoriza como

$$x^3 + 8 = (x + 2)(x^2 - 2x + 4).$$

El término $x^2 - 2x + 4$, contiene dos raíces complejas conjugadas de multiplicidad 1. En el desarrollo teórico lo expresaríamos como $(x - 1)^2 + (\sqrt{3})^2$, forma que es adecuada para resolver la integral final, pero que es engorrosa de escribir (y desde luego no necesaria) durante el proceso de descomposición en fracciones simples. La descomposición en fracciones simples es

$$\frac{1 - x^2}{x^3 + 8} = \frac{A}{x + 2} + \frac{Mx + N}{x^2 - 2x + 4} = \frac{A(x^2 - 2x + 4) + (Mx + N)(x + 2)}{x^3 + 8}$$

Igualando numeradores

$$1 - x^2 = A(x^2 - 2x + 4) + (Mx + N)(x + 2)$$

y evaluando en -2,en 0 y en 1, se obtiene el sistema lineal

$$\left\{ \begin{array}{rrrrr} 12A & & & = & -3 \\ 4A & & +2N & = & 1 \\ 3A & +3M & +3N & = & 0 \end{array} \right.$$

cuyas soluciones son

$$A = -1/4, M = -3/4, N = 1$$

Por lo tanto

$$\int \frac{1 - x^2}{x^3 + 8}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{-1/4}{x + 2} - \frac{3/4x - 1}{x^2 - 2x + 4} \right) \mathrm{d}x =$$

$$= \int \frac{-1/4}{x + 2}\,\mathrm{d}x - \int \frac{3/4x - 1}{x^2 - 2x + 4}\,\mathrm{d}x =$$
$$= -\frac{1}{4} \log|x + 2| - \frac{3}{8} \log(x^2 - 2x + 4) + \frac{\sqrt{3}}{12} \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{\sqrt{3}}{3}(x - 1) \right) + C.$$

◁

Ejemplo 4.2.10 Calcular

$$\int \frac{x}{4x + 5}\,\mathrm{d}x.$$

Como el grado del numerador es mayor o igual que el del denominador, hay que dividir

$$\begin{array}{rr|l} x & & 4x + 5 \\ \cline{3-3} -x & -5/4 & 1/4 \\ \hline & -5/4 & \end{array}$$

Entonces

$$\int \frac{x}{4x+5}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{4} - \frac{5/4}{4x+5}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int \mathrm{d}x - \frac{5}{16}\int \frac{\mathrm{d}x}{x+5/4}$$
$$= \frac{x}{4} - \frac{5}{16}\log|x+5/4| + C.$$

◁

Ejemplo 4.2.11 Calcular

$$\int \frac{(1+x)(1+x^2)}{x^2+2}\,\mathrm{d}x.$$

El denominador ya está factorizado y el numerador es

$$(1+x)(1+x^2) = x^3 + x^2 + x + 1.$$

Hay que dividir, por ser el grado del numerador superior al del denominador

$$\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & +x^2 & +x & +1 & x^2+2 \\ \cline{5-5}
-x^3 & & -2x & & x+1 \\ \cline{1-3}
 & x^2 & -x & +1 & \\
 & -x^2 & & -2 & \\ \cline{2-4}
 & & -x & -1 &
\end{array}$$

por lo que

$$\int \frac{(1+x)(1+x^2)}{x^2+2}\,\mathrm{d}x = \int \left(x+1-\frac{x+1}{x^2+2}\right)\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + x - \int \frac{x+1}{x^2+2}\,\mathrm{d}x.$$

La función racional que queda ya está descompuesta en fracciones simples, y por ello, se deja como ejercicio ver que

$$\int \frac{(1+x)(1+x^2)}{x^2+2}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + x - \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{x^2}{2}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right) + C.$$

◁

Ejemplo 4.2.12 Calcular

$$\int \frac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

El denominador factoriza como

$$(1-x^2) = (1+x)(1-x)$$

de donde la descomposición en fracciones simples es

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{A}{1+x} + \frac{B}{1-x} = \frac{A(1-x)+B(1+x)}{1-x^2}.$$

Igualando numeradores

$$1 = A(1-x) + B(1+x)$$

y evaluando en $-1, 1$, se obtiene el sistema lineal

$$\left\{ \begin{array}{ccc} 2A & = & 1 \\ 2B & = & 1 \end{array} \right.$$

cuyas soluciones son

$$A = 1/2, B = 1/2$$

Por lo tanto

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2} = \int \left(\frac{1/2}{1+x} + \frac{1/2}{1-x} \right) \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int \frac{\mathrm{d}x}{1+x} + \frac{1}{2} \int \frac{\mathrm{d}x}{1-x} =$$

$$= \frac{1}{2} \log|1+x| - \frac{1}{2} \log|1-x| + C = \frac{1}{2} \log \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C$$

◁

Ejemplo 4.2.13 Calcular

$$\int \frac{x^2-1}{x^2+1} \mathrm{d}x.$$

Debemos dividir

$$\begin{array}{rr|l} x^2 & -1 & x^2+1 \\ \cline{3-3} -x^2 & -1 & 1 \\ \hline & -2 & \end{array}$$

y así

$$\int \frac{x^2-1}{x^2+1} \mathrm{d}x = \int \left(1 - \frac{2}{x^2+1} \right) \mathrm{d}x = \int \mathrm{d}x - 2 \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} =$$

$$= x - 2 \operatorname{arc\,tg} x + C.$$

◁

Ejemplo 4.2.14 Calcular

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 - 2\sqrt{3}x - 1}.$$

El denominador factoriza como

$$x^2 - 2\sqrt{3}x - 1 = (x - \sqrt{3} + 2)(x - \sqrt{3} - 2)$$

de donde la descomposición en fracciones simples es

$$\frac{1}{(x - \sqrt{3} + 2)(x - \sqrt{3} - 2)} = \frac{A}{x - \sqrt{3} + 2} + \frac{B}{x - \sqrt{3} - 2} =$$
$$= \frac{A(x - \sqrt{3} - 2) + B(x - \sqrt{3} + 2)}{(x - \sqrt{3} + 2)(x - \sqrt{3} - 2)}$$

Igualando numeradores

$$1 = A(x - \sqrt{3} - 2) + B(x - \sqrt{3} + 2)$$

y evaluando en $\sqrt{3} + 2, \sqrt{3} - 2$, se obtiene el sistema lineal

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 4B & = & 1 \\ -4A \qquad & = & 1 \end{array} \right.$$

cuyas soluciones son

$$A = -1/4, B = 1/4$$

Por lo tanto

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 - 2\sqrt{3}x - 1} = \int \left(\frac{-1/4}{x - \sqrt{3} + 2} + \frac{1/4}{x - \sqrt{3} - 2} \right) \mathrm{d}x =$$

$$= -\frac{1}{4} \int \frac{\mathrm{d}x}{x - \sqrt{3} + 2} + \frac{1}{4} \int \frac{\mathrm{d}x}{x - \sqrt{3} - 2} =$$
$$-\frac{1}{4} \log |x - \sqrt{3} + 2| + \frac{1}{4} \log |x - \sqrt{3} - 2| + C = \frac{1}{4} \log \left| \frac{x - \sqrt{3} - 2}{x - \sqrt{3} + 2} \right| + C.$$

◁

4.2.3 Integración por partes

Proposición 4.2.15 Sean $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo abierto y $u, v \in \mathcal{C}^1(I)$. Se tiene que

$$\int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\,\mathrm{d}x,$$

expresión a la que llamaremos *fórmula de integración por partes.* ◁

La fórmula de la integración por partes es más sencilla de recordar si utilizamos la notación introducida en la Nota 4.1.4, pues se escribe como

$$\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u.$$

Ejemplo 4.2.16 Calculemos

$$\int xe^x\,\mathrm{d}x.$$

Aplicamos la fórmula de la integración por partes tomando

$$\begin{matrix} u = x \\ \mathrm{d}v = e^x\,\mathrm{d}x \end{matrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{matrix} \mathrm{d}u = 1\,\mathrm{d}x \\ v = \displaystyle\int e^x\,\mathrm{d}x = e^x \end{matrix}$$

se tiene que

$$\int xe^x\,\mathrm{d}x = xe^x - \int e^x\,\mathrm{d}x = xe^x - e^x + C = e^x(x-1) + C.$$

◁

Nota 4.2.17 Muchas integrales de la forma

$$\int x^n f(x)\,\mathrm{d}x,\ n \in \mathbb{N},$$

se resuelven aplicando la fórmula de integración por partes una o varias veces. ◁

4.2.4 Cambio de variable

Proposición 4.2.18 Sean $I, J, A \subseteq \mathbb{R}$ tres intervalos abiertos, $u : I \longrightarrow A$ biyectiva con $u \in \mathcal{C}^1(I)$, $v : J \longrightarrow A$ biyectiva con $v \in \mathcal{C}^1(J)$ y $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ admitiendo primitiva en I. Se tiene que

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{f(u^{-1}(v(t)))v'(t)}{u'(u^{-1}(v(t)))}\,\mathrm{d}t\Bigg|_{t=v^{-1}(u(x))}.$$

◁

La proposición anterior nos muestra como afectan los cambios de variable al cálculo de primitivas. El cambio sería

$$u(x) = v(t),$$

por lo que

$$\mathrm{d}u = \mathrm{d}v \Longrightarrow u'(x)\,\mathrm{d}x = v'(t)\,\mathrm{d}t \Longrightarrow \mathrm{d}x = \frac{v'(t)}{u'(x)}\,\mathrm{d}t,$$

y

$$\begin{aligned} x &= u^{-1}(v(t)) \\ t &= v^{-1}(u(x)), \end{aligned}$$

de donde queda clara la fórmula de cambio de variable bajo la integral mostrada en la proposición 4.2.18. No obstante, esta fórmula suele usarse en dos casos particulares que describiremos a continuación.

Corolario 4.2.19 Asumimos las mismas condiciones que en la Proposición 4.2.18. Tenemos

1) Si $u(x)$ es la función identidad, y por tanto $I = A$, se tiene

$$\begin{aligned} x &= v(t) \\ \mathrm{d}x &= v'(t)\,\mathrm{d}t, \end{aligned}$$

y la fórmula integral de cambio de variable queda

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f(v(t))v'(t)\,\mathrm{d}t\bigg|_{t=v^{-1}(x)}.$$

2) Si $v(t)$ es la función identidad, y por tanto $J = A$, se tiene

$$\begin{aligned} t &= u(x) \\ u'(x)\,\mathrm{d}x &= \mathrm{d}t, \end{aligned}$$

y la fórmula integral de cambio de variable suele usarse de la siguiente forma

$$\int f(u(x))u'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(t)\,\mathrm{d}t\bigg|_{t=u(x)}.$$

◁

La dificultad técnica del cambio de variable, radica en encontrar el cambio de variable específico que resuelve una determinada integral. Esto suele requerir mucha experiencia en el cálculo de primitivas. No obstante hay algunos casos en los que existe un cambio normalizado de variable que permite reducir la integral dada a otra de resolución conocida. Esto es lo que vamos a ver a continuación.

4.2.4.1 Cambio lineal de variable

Si tenemos una integral de la forma

$$\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x,\ \ a,b\in\mathbb{R},\ \ a\neq 0$$

Podemos realizar el cambio

$$t=ax+b \Longrightarrow \mathrm{d}t=a\,\mathrm{d}x \Longrightarrow \mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}t}{a},$$

por lo que

$$\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\int f(t)\,\mathrm{d}t\Big|_{t=ax+b}.$$

Ejemplo 4.2.20 Calcular

$$\int \cos(3x+2)\,\mathrm{d}x.$$

Hagamos el cambio

$$t=3x+2 \Longrightarrow \mathrm{d}t=3\,\mathrm{d}x \Longrightarrow \mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}t}{3},$$

de donde

$$\int \cos(3x+2)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int \cos(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{3}\operatorname{sen}(t)+C=\frac{1}{3}\operatorname{sen}(3x+2)+C.$$

◁

4.2.4.2 Irracionales bilineales

Son integrales de la forma

$$\int R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p_1/q_1},\dots,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p_k/q_k}\right)\mathrm{d}x,$$

donde $k\in\mathbb{N}$, $p_1,\dots,p_k\in\mathbb{Z}$, $q_1,\dots,q_k\in\mathbb{N}$, $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ con $a\neq 0$ ó $c\neq 0$ y $R(X_0,X_1,\dots,X_k)$ es una función racional en $k+1$ variables.
El cambio que hay que efectuar es

$$t=\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{1/m},$$

donde m es el mínimo común múltiplo de $q_1,\dots,q_k$.

Ejemplo 4.2.21 Calcular

$$\int \frac{\sqrt{x-1}}{1+\sqrt[3]{x-1}}\,\mathrm{d}x.$$

Si la escribimos de la forma

$$\int \frac{(x-1)^{1/2}}{1+(x-1)^{1/3}}\,\mathrm{d}x,$$

vemos que es irracional bilineal. El cambio de variable que debemos hacer es

$$t=(x-1)^{1/6} \Longrightarrow x=t^6+1 \Longrightarrow \mathrm{d}x=6t^5\,\mathrm{d}t.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
&\int \frac{\sqrt{x-1}}{1+\sqrt[3]{x-1}}\,\mathrm{d}x=\int \frac{t^3}{1+t^2}6t^5\,\mathrm{d}t=6\int \frac{t^8}{1+t^2}\,\mathrm{d}t=\\
&\qquad\qquad\text{(Por el ejemplo 4.2.8)}\\
&=6(\frac{t^7}{7}-\frac{t^5}{5}+\frac{t^3}{3}-t+\operatorname{arc\,tg} t)+C=\\
&=\frac{6}{7}(x-1)^{7/6}-\frac{6}{5}(x-1)^{5/6}+2(x-1)^{1/2}+6(x-1)^{1/6}+\\
&+6\operatorname{arc\,tg}(x-1)^{1/6}+C.
\end{aligned}$$

◁

4.2.4.3 Racionales de seno y coseno

Son de la forma

$$\int R(\operatorname{sen} x,\cos x)\,\mathrm{d}x,$$

donde $R(X,Y)$ es una función racional de dos variables.
El cambio general que siempre se puede realizar

$$t=\operatorname{tg}(x/2),$$

de donde se deduce que

$$\operatorname{sen} x=\frac{2t}{1+t^2},\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\ \mathrm{d}x=\frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}.$$

Además, en algunos casos particulares, se pueden realizar otros cambios que en ocasiones conducen a una integral más sencilla:

1) Si $R(\operatorname{sen} x, -\cos x) = -R(\operatorname{sen} x, \cos x)$, también sirve el cambio

$$t = \operatorname{sen} x.$$

2) Si $R(-\operatorname{sen} x, \cos x) = -R(\operatorname{sen} x, \cos x)$, también sirve el cambio

$$t = \cos x.$$

3) Si $R(-\operatorname{sen} x, -\cos x) = R(\operatorname{sen} x, \cos x)$, también sirve el cambio

$$t = \operatorname{tg} x,$$

de donde se deduce

$$\operatorname{sen} x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \ \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \ \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$$

Ejemplo 4.2.22 Calcular

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos x}.$$

Es racional en seno y coseno. Haremos el cambio

$$\operatorname{tg}(x/2) = t \Longrightarrow \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \ \mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2},$$

por lo que

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos x} = \int \frac{\dfrac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t}{1+\dfrac{1-t^2}{1+t^2}} =$$

$$= 2\int \frac{1+t^2}{(1+t^2+1-t^2)(1+t^2)}\,\mathrm{d}t = \int \mathrm{d}t = t + C = \operatorname{tg}(x/2) + C.$$

◁

Ejemplo 4.2.23 Calcular

$$\int \frac{\cos^3 x}{8+\operatorname{sen}^3 x}\,\mathrm{d}x.$$

Es racional en seno y coseno e impar en coseno, así que que haremos el cambio

$$t = \operatorname{sen} x \Longrightarrow \cos x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t,$$

por lo que

$$\int \frac{\cos^3 x}{8+\operatorname{sen}^3 x}\,\mathrm{d}x. = \int \frac{(1-\operatorname{sen}^2 x)\cos x}{8+\operatorname{sen}^3 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1-t^2}{8+t^3}\,\mathrm{d}t =$$

(Por el Ejemplo 4.2.9)

$$= -\frac{1}{4}\log|2+t| - \frac{3}{8}\log(t^2-2t+4) + \frac{\sqrt{3}}{12}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}(t-1)\right) + C =$$

$$= -\frac{1}{4}\log|2+\operatorname{sen} x| - \frac{3}{8}\log(\operatorname{sen}^2 x - 2\operatorname{sen} x + 4) +$$

$$+ \frac{\sqrt{3}}{12}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}(\operatorname{sen} x - 1)\right) + C$$

◁

Ejemplo 4.2.24 Calcular

$$\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{5+4\cos x}\,\mathrm{d}x.$$

Se tiene que

$$\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{5+4\cos x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2\operatorname{sen} x\cos x}{5+4\cos x}\,\mathrm{d}x,$$

que es racional en seno y coseno. Es impar en seno, luego se puede hacer el cambio

$$t = \cos x \Longrightarrow -\operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x = \,\mathrm{d}t,$$

por lo que

$$\int \frac{2\operatorname{sen} x\cos x}{5+4\cos x}\,\mathrm{d}x = -2\int \frac{t}{5+4t}\,\mathrm{d}t =$$

(Por el ejemplo 4.2.10)

$$= -\frac{1}{2}t + \frac{5}{8}\log|t+5/4| + C = \frac{5}{8}\log|\cos x + 5/4| - \frac{1}{2}\cos x + C$$

◁

Ejemplo 4.2.25 Calcular

$$\int \frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\cos^3 x(1+\cos^2 x)}\,\mathrm{d}x.$$

Es racional en seno y coseno y par en seno y coseno. Haremos el cambio

$$\operatorname{tg} x = t \Longrightarrow \operatorname{sen} x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}},\ \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2},$$

por lo que

$$\int \frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\cos^3 x(1+\cos^2 x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\dfrac{1+t}{\sqrt{1+t^2}}}{\dfrac{1}{(1+t^2)^{3/2}}\left(1+\dfrac{1}{1+t^2}\right)(1+t^2)}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int \frac{(1+t)(1+t^2)^2}{(1+t^2)(2+t^2)}\,\mathrm{d}t = \int \frac{(1+t)(1+t^2)}{t^2+2}\,\mathrm{d}t =$$

(Por el Ejemplo 4.2.11)

$$= \frac{t^2}{2} + t - \frac{1}{2}\log(t^2+2) - \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right) + C =$$

$$\frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + \operatorname{tg} x - \frac{1}{2}\log(\operatorname{tg}^2 x + 2) - \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{tg} x\right) + C$$

$\triangleleft$

4.2.4.4 Integrales de la forma $\int R(x, \sqrt{\pm a^2 \pm x^2})\,\mathrm{d}x$

Para las integrales de la forma

$$\int R(x, \sqrt{\pm a^2 \pm x^2})\,\mathrm{d}x,$$

donde $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ y $R(X,Y)$ es una función racional de dos variables, se pueden presentar tres casos

1) $\displaystyle\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2})\,\mathrm{d}x \xrightarrow{\text{cambio}} x = a\cos t$ ó $x = a\operatorname{sen} t$.

2) $\displaystyle\int R(x, \sqrt{a^2 + x^2})\,\mathrm{d}x \xrightarrow{\text{cambio}} x = a\operatorname{tg} t$.

3) $\displaystyle\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2})\,\mathrm{d}x \xrightarrow{\text{cambio}} x = \frac{a}{\cos t}$ ó $x = \dfrac{a}{\operatorname{sen} t}$.

Ejemplo 4.2.26 Calcular

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x^2}}.$$

Haremos el cambio

$$x = \operatorname{tg} t \Longrightarrow \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{\cos^2 t},$$

por lo que

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x^2}} = \int \frac{\mathrm{d}t}{\cos^2 t \frac{\operatorname{sen} t}{\cos t}\sqrt{1+\frac{\operatorname{sen}^2 t}{\cos^2 t}}} = \int \frac{\mathrm{d}t}{\operatorname{sen} t} =$$
$$\text{(Racional en seno y coseno:} y = \cos t,\ \mathrm{d}y = -\operatorname{sen} t\,\mathrm{d}t)$$
$$= -\int \frac{\mathrm{d}y}{1-y^2} =$$
$$\text{(por el Ejemplo 4.2.12)}$$
$$\frac{1}{2}\log\left|\frac{1-y}{1+y}\right| + C = \frac{1}{2}\log\left|\frac{1-\cos t}{1+\cos t}\right| + C =$$
$$\left(\begin{array}{l} x = \frac{\operatorname{sen} t}{\cos t} \Rightarrow x^2\cos^2 t = 1-\cos^2 t \\ \Rightarrow (1+x^2)\cos^2 t = 1 \Rightarrow \cos t = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \end{array} \right)$$
$$= \frac{1}{2}\log\left|\frac{1-\sqrt{1+x^2}}{1+\sqrt{1+x^2}}\right| + C.$$

◁

Ejemplo 4.2.27 Calcular

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2(x^2-2)\sqrt{x^2-4}}.$$

Haremos el cambio

$$x = \frac{2}{\cos t} \Longrightarrow \mathrm{d}x = \frac{2\operatorname{sen} t}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t,$$

por lo que

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2(x^2-2)\sqrt{x^2-4}} = \int \frac{\dfrac{2\operatorname{sen} t}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t}{\dfrac{4}{\cos^2 t}\left(\dfrac{4}{\cos^2 t}-2\right)\sqrt{\dfrac{4}{\cos^2 t}-4}} =$$

$$= \int \frac{2\operatorname{sen} t\cos^5 t}{\cos^2 t(16-8\cos^2 t)\sqrt{4(1-\cos^2 t)}}\,\mathrm{d}t =$$
$$= \frac{1}{8}\int \frac{\cos^3 t}{2-\cos^2 t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{8}\int \frac{\cos^2 t\cos t}{1+\operatorname{sen}^2 t}\,\mathrm{d}t =$$

$$(y = \operatorname{sen} t \Rightarrow \ \mathrm{d}y = \cos t\,\mathrm{d}t)$$
$$\frac{1}{8}\int \frac{1-y^2}{1+y^2}\,\mathrm{d}y =$$
$$(\text{por el Ejemplo 4.2.13})$$
$$= \frac{1}{8}(2\operatorname{arc\,tg} y - y) + C = \frac{1}{8}(2\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{sen} t) - \operatorname{sen} t) + C =$$
$$= \frac{1}{8}\left(2\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\sqrt{x^2-4}}{x}\right) - \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}\right) + C.$$

◁

4.2.4.5 Irracionales cuadráticas

Son de la forma

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)\,\mathrm{d}x,$$

donde $a, b, c \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$ y $R(X, Y)$ es una función racional en dos variables. El cambio que se realiza es

$$t = x + \frac{b}{2a}.$$

Ejemplo 4.2.28 Calcular

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}.$$

Es irracional cuadrática. Haremos el cambio

$$x + 1/2 = t \Longrightarrow \mathrm{d}x = \mathrm{d}t,$$

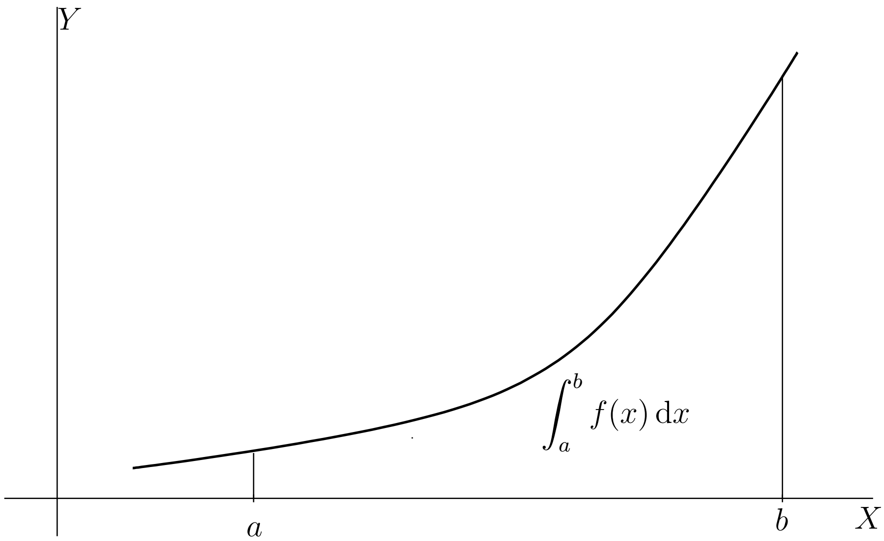
por lo que

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}} &= \int \frac{\mathrm{d}t}{(t+1/2)\sqrt{t^2+3/4}} \\
&\qquad \left(t = (\sqrt{3}/2)\operatorname{tg} z \Rightarrow \ \mathrm{d}t = \frac{\sqrt{3}\,\mathrm{d}z}{2\cos^2 z} \right) = \\
&= 2\int \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{3}\operatorname{sen} z + \cos z} = \\
&\qquad \left(\operatorname{tg}(z/2) = y \Rightarrow \cos z = \frac{1-y^2}{1+y^2}, \ \operatorname{sen} z = \frac{2y}{1+y^2}, \ \mathrm{d}z = \frac{2\,\mathrm{d}y}{1+y^2} \right) \\
&= -4\int \frac{\mathrm{d}y}{y^2 - 2\sqrt{3}y - 1} = \\
&\qquad \text{(por el Ejemplo 4.2.14)} \\
&= \log\left| \frac{y-\sqrt{3}+2}{y-\sqrt{3}-2} \right| + C = \log\left| \frac{\operatorname{tg}(z/2)-\sqrt{3}+2}{\operatorname{tg}(z/2)-\sqrt{3}-2} \right| + C = \\
&= \log\left| \frac{\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg}((2/\sqrt{3})t)/2)-\sqrt{3}+2}{\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg}((2/\sqrt{3})t)/2)-\sqrt{3}-2} \right| + C = \\
&= \log\left| \frac{\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg}((2/\sqrt{3})(x+1/2))/2)-\sqrt{3}+2}{\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg}((2/\sqrt{3})(x+1/2))/2)-\sqrt{3}-2} \right| + C
\end{aligned}
$$

$\triangleleft$

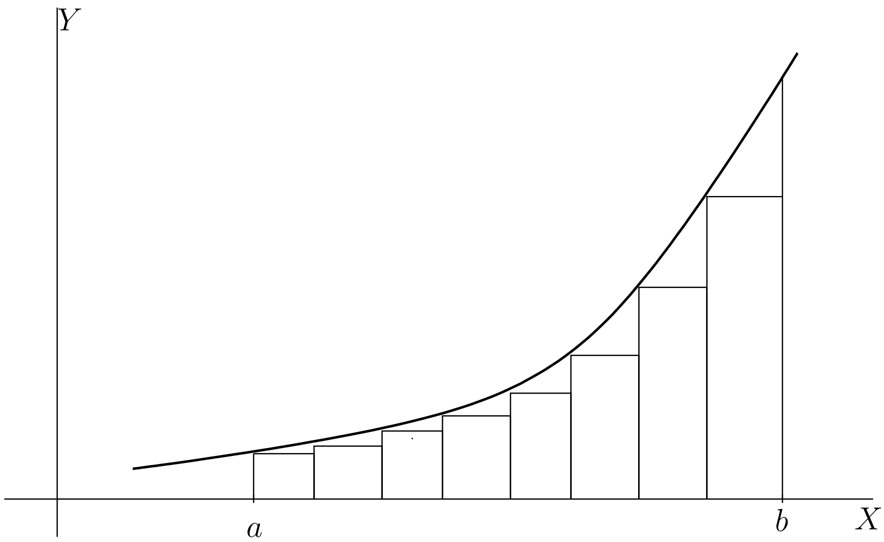
4.3 La integral de Riemann

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ y sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ acotada. Se pretende definir, cuando sea posible, una magnitud denotada por $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ que *mida* el área comprendida entre la gráfica de la función y el eje OX entre a y b cuando la función sea positiva en dicho intervalo

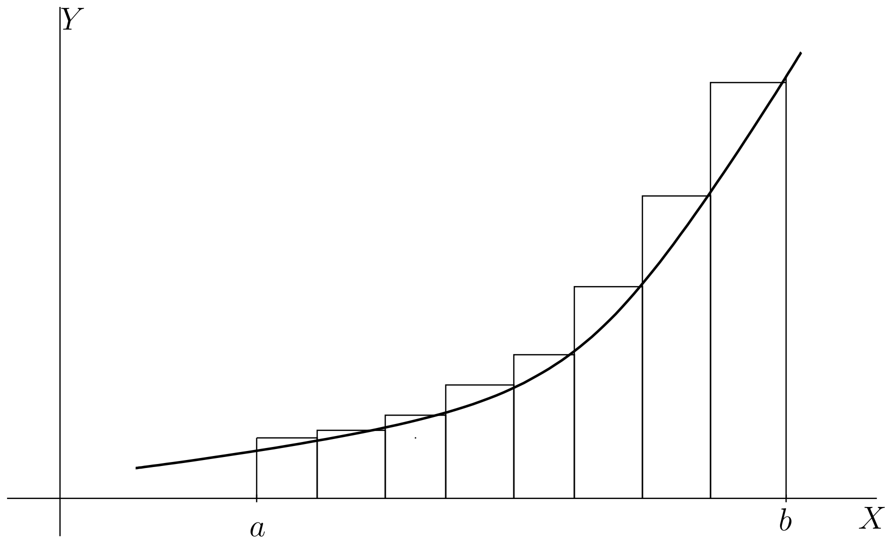


Para ello se realiza una construcción formal técnicamente complicada, cuyos rasgos generales a nivel intuitivo son

1) Se aproxima el área bajo la función por defecto mediante rectángulos:



2) Se aproxima el área bajo la función por exceso también mediante rectángulos:



3) Se toma algo que viene a significar *la mejor aproximación por defecto* y algo que viene a significar *la mejor aproximación por exceso* mediante una construcción similar a un *proceso de paso al límite*. Si ambas aproximaciones coinciden, se dice que f es integrable en $[a, b]$, su valor representa el área bajo la gráfica de f y se denota por

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

y recibe el nombre de *integral de Riemann* o *integral definida* de f en $[a, b]$.

Nota 4.3.1

1) Si f es integrable en $[a, b]$, entonces $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \in \mathbb{R}$. Si $f(x) \geq 0,\ \forall\, x \in [a, b]$, su valor es el área determinada por la gráfica de f en $[a, b]$ y si $f(x) \leq 0,\ \forall\, x \in [a, b]$ su valor es el área cambiada de signo.

2) No todas las funciones acotadas en $[a, b]$ son integrables en $[a, b]$.

3) Toda función $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ acotada en $[a, b]$ y continua en $[a, b]$ salvo quizá en una cantidad finita de puntos, es integrable en $[a, b]$.

4) Si f es integrable en $[a, b]$ y $[c, d] \subseteq [a, b]$, entonces f es integrable en $[c, d]$.

$\triangleleft$

4.3.1 Propiedades de la integral definida

Proposición 4.3.2 Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ y $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrables en $[a, b]$. Se verifica

1) $\displaystyle\int_a^b K \,\mathrm{d}x = K(b-a),\ \forall\, K \in \mathbb{R}$.

2) Si $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,
$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x)) \,\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \mu \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

3) Si $c \in (a, b)$,
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

4) Sea $P \subseteq [a, b]$ un conjunto finito. Si $f(x) = g(x),\ \forall\, x \in [a, b] - P$, entonces
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

$\triangleleft$

Definición 4.3.3 Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ y $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrable en $[a, b]$. Se establecen las siguientes definiciones por **convenio**

1) $\displaystyle\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x := 0.$

2) $\displaystyle\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x := -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

$\triangleleft$

Nota 4.3.4 Las integrales definidas según los convenios de la Definición 4.3.3, verifican también las propiedades de la Proposición 4.3.2 $\triangleleft$

Proposición 4.3.5 Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ y $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrables en $[a, b]$. Se verifican

1) $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$

2) Sea $P \subseteq [a, b]$ un conjunto finito. Si $f(x) \leq g(x),\ \forall\, x \in [a, b] - P$, entonces
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

$\triangleleft$

4.3.2 Teorema del valor medio

Proposición 4.3.6 Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ y $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$. Entonces existe $c \in [a, b]$ tal que

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x.$$

El segundo miembro de la igualdad anterior recibe el nombre de *valor medio* o *promedio* de la f en $[a, b]$. $\triangleleft$

4.3.3 Continuidad de la función integral

Proposición 4.3.7 Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ y $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrable en $[a, b]$. La función

$$\begin{aligned} F : [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \int_a^x f(t)\, \mathrm{d}t \end{aligned},$$

es continua en $[a, b]$. $\triangleleft$

4.3.4 Teorema fundamental del cálculo

Teorema 4.3.8 Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, $c \in (a, b)$ y $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrable en $[a, b]$ y continua en c. Entonces la función

$$\begin{aligned} F : [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \int_a^x f(t)\, \mathrm{d}t \end{aligned}$$

es derivable en c y además $F'(c) = f(c)$. $\triangleleft$

Corolario 4.3.9 Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ y $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$. Se tiene que

1) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\displaystyle\int_a^x f(t)\, \mathrm{d}t\right) = f(x),\ \forall\, x \in (a, b).$

2) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\displaystyle\int_x^b f(t)\, \mathrm{d}t\right) = -f(x),\ \forall\, x \in (a, b).$

3) Sea I un intervalo abierto y $g, h : I \longrightarrow [a, b]$ derivables en I,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(t)\, \mathrm{d}t\right) = f(h(x))h'(x) - f(g(x))g'(x),\ \forall\, x \in I.$$

$\triangleleft$

4.3.5 Regla de Barrow

Proposición 4.3.10 Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrable en $[a, b]$, I un intervalo abierto con $[a, b] \subseteq I$ y $G : I \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable en I y con $G'(x) = f(x)$, $\forall\, x \in [a, b]$. Entonces

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = G(x)|_a^b := G(b) - G(a)$$

◁

Ejemplo 4.3.11

$$\int_0^{\pi/2} \cos x\,\mathrm{d}x = \operatorname{sen} x|_0^{\pi/2} = \operatorname{sen}(\pi/2) - \operatorname{sen} 0 = 1 - 0 = 1.$$

◁

4.3.6 Integración por partes

Proposición 4.3.12 Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, I un intervalo abierto con $[a, b] \subseteq I$ y $u, v \in \mathcal{C}^1(I)$. Se tiene

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x)|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)\,\mathrm{d}x,$$

o escrito abreviadamente

$$\int_a^b u\,\mathrm{d}v = uv|_a^b - \int_a^b v\,\mathrm{d}u.$$

◁

Ejemplo 4.3.13

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} x\cos x\,\mathrm{d}x &= \\
&\begin{pmatrix} u = x, & \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \cos x\,\mathrm{d}x, & v = \displaystyle\int \cos x\,\mathrm{d}x = \operatorname{sen} x \end{pmatrix} \\
&= x\operatorname{sen} x|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x = \\
&= \frac{\pi}{2}\operatorname{sen}(\pi/2) - 0\operatorname{sen} 0 + \cos x|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} + \cos(\pi/2) - \cos 0 = \frac{\pi}{2} - 1.
\end{aligned}$$

◁

4.3.7 Cambio de variable

Proposición 4.3.14 Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrable en $[a, b]$, $I, J, A \subseteq \mathbb{R}$ tres intervalos abiertos con $[a, b] \subseteq I$, $u : I \longrightarrow A$ biyectiva con $u \in \mathcal{C}^1(I)$ y $v : J \longrightarrow A$ biyectiva con $v \in \mathcal{C}^1(J)$. Se tiene que

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{v^{-1}(u(a))}^{v^{-1}(u(b))} \frac{f(u^{-1}(v(t)))v'(t)}{u'(u^{-1}(v(t)))}\,\mathrm{d}t.$$

◁

La proposición anterior nos muestra como afectan los cambios de variable al cálculo de primitivas. El cambio sería

$$u(x) = v(t),$$

por lo que

$$\mathrm{d}u = \mathrm{d}v \Longrightarrow u'(x)\,\mathrm{d}x = v'(t)\,\mathrm{d}t \Longrightarrow \mathrm{d}x = \frac{u'(t)}{v'(t)}\,\mathrm{d}t,$$

y que

$$x = u^{-1}(v(t)), \;\; t = v^{-1}(u(x)),$$

y por tanto

$$x = a \Longrightarrow t = v^{-1}(u(a))$$
$$x = b \Longrightarrow t = v^{-1}(u(b))$$

No obstante, esta fórmula suele usarse en dos casos particulares que describiremos a continuación.

Corolario 4.3.15 Asumimos las mismas condiciones que en la proposición 4.2.18. Tenemos

1) Si $u(x)$ es la función identidad, y por tanto $I = A$, se tiene

$$x = v(t), \;\; \mathrm{d}x = v'(t)\,\mathrm{d}t,$$

y la fórmula de cambio de variable queda

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{v^{-1}(a)}^{v^{-1}(b)} f(v(t))v'(t)\,\mathrm{d}t$$

2) Si $v(t)$ es la función identidad, y por tanto $J = A$, se tiene

$$t = u(x), \;\; u'(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t,$$

y la fórmula integral de cambio de variable suele usarse de la siguiente forma

$$\int_a^b f(u(x))u'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{u(a)}^{u(b)} f(t)\,\mathrm{d}t$$

$\triangleleft$

Ejemplo 4.3.16

$$\int_0^2 x\cos x^2 \,\mathrm{d}x =$$
$$\begin{pmatrix} x^2 = t \Rightarrow 2x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \Rightarrow x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}t \\ x=0 \Rightarrow t=0, \quad x=2 \Rightarrow t=4. \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^4 \cos t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\operatorname{sen} t\Big|_0^4 = \frac{1}{2}(\operatorname{sen}4 - \operatorname{sen}0) = \frac{\operatorname{sen}4}{2}.$$

$\triangleleft$

4.4 Aplicaciones geométricas

4.4.1 Longitudes

Definición 4.4.1 Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ y $u, v : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas. Diremos que el conjunto

$$\{(u(t), v(t)) \,/\, t \in [a, b]\} \in \mathbb{R}^2$$

es una *curva continua plana* o simplemente una curva plana.
Llamaremos al par de funciones $(u(t), v(t))$ una parametrización de la curva definida en $[a, b]$ $\triangleleft$

Definición 4.4.2 Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ y $u, v, w : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas. Diremos que el conjunto

$$\{(u(t), v(t), w(t)) \,/\, t \in [a, b]\} \in \mathbb{R}^3$$

es una *curva continua* en $\mathbb{R}^3$ o simplemente una curva en $\mathbb{R}^3$.
Llamaremos a la terna de funciones $(u(t), v(t), w(t))$ una parametrización de la curva definida en $[a, b]$. $\triangleleft$

Proposición 4.4.3 Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, I un intervalo abierto con $[a, b] \subseteq I$ y $u, v \in \mathcal{C}^1(I)$. La longitud de la curva plana parametrizada por $(u(t), v(t))$ en $[a, b]$ es

$$\int_a^b \sqrt{u'(t)^2 + v'(t)^2}\,\mathrm{d}t.$$

$\triangleleft$

Corolario 4.4.4 Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, I un intervalo abierto con $[a, b] \subseteq I$ y $f \in \mathcal{C}^1(I)$. La longitud de la gráfica de la función f entre a y b es

$$\int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, \mathrm{d}x$$

◁

Proposición 4.4.5 Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, I un intervalo abierto con $[a, b] \subseteq I$ y $u, v, w \in \mathcal{C}^1(I)$. La longitud de la curva en $\mathbb{R}^3$ parametrizada por $(u(t), v(t), w(t))$ en $[a, b]$ es

$$\int_a^b \sqrt{u'(t)^2 + v'(t)^2 + w'(t)^2}\, \mathrm{d}t.$$

◁

4.4.2 Áreas

Proposición 4.4.6 Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ y $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrable. El área comprendida entre la gráfica de f y el eje OX entre a y b es

$$\int_a^b |f(x)|\, \mathrm{d}x.$$

◁

Corolario 4.4.7 Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ y $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrable. El área comprendida entre las gráficas de f y g entre a y b es

$$\int_a^b |f(x) - g(x)|\, \mathrm{d}x.$$

◁

4.4.3 Sólidos de revolución

Definición 4.4.8 Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ y $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrable. Llamaremos sólido de revolución generado al girar la gráfica de f alrededor del eje OX al conjunto de $\mathbb{R}^3$

$$\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle/\, a \le x \le b,\ y^2 + z^2 \le (f(x))^2\right\}.$$

◁

Proposición 4.4.9 Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, I un intervalo abierto con $[a, b] \subseteq I$ y $f \in \mathcal{C}^1(I)$. El área de la cara lateral del sólido de revolución generado al girar la gráfica de f alrededor del eje OX, es decir, el área del conjunto

$$\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle/\, a \leq x \leq b,\ y^2 + z^2 = f(x)^2 \right\}.$$

es

$$2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + f'(x)^2}\, \mathrm{d}x.$$

◁

Proposición 4.4.10 Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ y $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrable. El volumen del sólido de revolución generado al girar la gráfica de f alrededor del eje OX es

$$\pi \int_a^b f(x)^2\, \mathrm{d}x.$$

◁

4.5 Integrales impropias

La integral de Riemann se definía para funciones acotadas definidas en un intervalo cerrado. El objetivo ahora es extender la noción de integral definida (y por tanto de área) a funciones no acotadas y/o a intervalos no acotados.

Hablando en términos imprecisos, una integral definida será impropia cuando al menos uno de los límites de integración sea un infinito, o cuando la función presente *problemas* en una cantidad finita de puntos del intervalo de integración.

Para un estudio preciso de tales integrales, debemos introducir primero las llamadas integrales impropias básicas.

4.5.1 Integrales impropias básicas

4.5.1.1 Integrales impropias básicas de tipo 1

Son integrales $\displaystyle\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x$ que sólo presentan problemas en el punto b, bien porque $b = \infty$ o bien porque f no esté definida en b. Más precisamente

Definición 4.5.1 Sean $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ con $a < b$ y $f : [a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ integrable en $[a, x]$, $\forall\, x \in (a, b)$. Llamaremos *integral impropia* de f en $[a, b)$ a

$$\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x = \lim_{x \to b^-} \int_a^x f(t)\, \mathrm{d}t.$$

Si dicho límite

1) existe y es finito, diremos que la integral es *convergente* o que *converge.*

2) existe y es ∞ o $-\infty$, diremos que la integral es *divergente* o que *diverge.*

3) no existe, diremos que la integral es *oscilante* o que *no tiene sentido.*

$\triangleleft$

Ejemplo 4.5.2 $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$. Es impropia de tipo 1 porque la función no está definida en $x = 1$. El intervalo de integración es por lo tanto $[0, 1)$, donde la función es continua. Tenemos

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} &= \lim_{x\to 1^-} \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = \\ &= \lim_{x\to 1^-} \operatorname{arc\,sen} t\big|_0^x = \lim_{x\to 1^-} \operatorname{arc\,sen} x = \operatorname{arc\,sen} 1 = \pi/2.\end{aligned}$$

Luego la integral converge. $\triangleleft$

Ejemplo 4.5.3

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^x \,\mathrm{d}x &= \lim_{x\to\infty} \int_0^x e^t \,\mathrm{d}t = \\ \lim_{x\to\infty} e^t\big|_0^x &= \lim_{x\to\infty} (e^x - 1) = \infty.\end{aligned}$$

Por tanto la integral diverge. $\triangleleft$

Ejemplo 4.5.4

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \cos x \,\mathrm{d}x &= \lim_{x\to\infty} \int_0^x \cos t \,\mathrm{d}t = \\ \lim_{x\to\infty} \operatorname{sen} t\big|_0^x &= \lim_{x\to\infty} \operatorname{sen} x, \text{ no existe.}\end{aligned}$$

Por tanto la integral es oscilante. $\triangleleft$

4.5.1.2 Integrales impropias básicas de tipo 2

Son integrales $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ que sólo presentan problemas en el punto a, bien porque $a = -\infty$ o bien porque f no esté definida en a. Más precisamente

Definición 4.5.5 Sean $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ y $f : (a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrable en $[x, b]$, $\forall\, x \in (a, b)$. Llamaremos *integral impropia* de f en $(a, b]$ a

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{x \to a^+} \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Si dicho límite

1) existe y es finito, diremos que la integral es *convergente* o que *converge.*

2) existe y es ∞ o $-\infty$, diremos que la integral es *divergente* o que *diverge.*

3) no existe, diremos que la integral es *oscilante* o que *no tiene sentido.*

$\triangleleft$

Ejemplo 4.5.6 $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x}$. Es impropia de tipo 2 porque la función no está definida en $x = 0$. El intervalo de integración es por lo tanto $(0, 1]$, donde la función es continua. Tenemos

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x} &= \lim_{x \to 0^+} \int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{t} = \\ &= \lim_{x \to 0^+} \log t\big|_x^1 = \lim_{x \to 0^+} -\log x = \infty.\end{aligned}$$

Luego la integral diverge. $\triangleleft$

4.5.2 Integrales impropias generales

Definición 4.5.7 Sean $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $n \in \mathbb{N}$, $P = \{c_1, c_2 \ldots, c_n\} \subseteq \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ con $a \leq c_1 < c_2 < \cdots < c_n \leq b$ tal que $[a, b] - P \subseteq \mathbb{R}$ y f una función definida en $[a, b] - P$ integrable en cada intervalo cerrado contenido en $[a, b] - P$. Llamaremos integral impropia de f en (a, b) a

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

a la que daremos sentido mediante el proceso que describiremos a continuación

1) Por convenio, si $r \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$

$$\int_r^r f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

2) Se toman $d_1, \ldots, d_{n-1} \in \mathbb{R}$ con

$$c_1 < d_1 < c_2 < d_2 < c_3 \cdots c_{n-1} < d_{n-1} < c_n.$$

3) Sean $d_0 = a$ y $d_n = b$.

4) Podemos así descomponer nuestra integral como

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} \left(\int_{d_{i-1}}^{c_i} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{c_i}^{d_i} f(x)\,\mathrm{d}x \right),$$

donde cada una de las integrales anteriores es impropia de tipo básico, pudiendo darse que el primero y/o el último sumando sean 0 por el convenio que adoptamos en el primer apartado.

5) Cada una de las integrales básicas anteriores se calcula por separado y diremos que $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ es

- Convergente si todos los sumandos lo son, y su valor será la suma de todos los valores de las integrales básicas.
- Divergente si sólo hay sumandos convergentes o divergentes y al aplicar la extensión de la aritmética que empleábamos para los límites, la suma de las integrales básicas sale ∞ o $-\infty$.
- Oscilante en cualquier otro caso.

$\triangleleft$

Ejemplo 4.5.8 Estudiar

$$\int_{-1}^{\infty} \frac{e^{-x^{1/3}}(x^{1/3}-1)}{x^{2/3}}\,\mathrm{d}x.$$

En este caso claramente $P = \{0, \infty\}$, es decir $n = 2$, $c_0 = 0$ y $c_2 = \infty$. Tenemos $d_0 = -1$, $d_2 = \infty$ y podemos tomar por ejemplo $d_1 = 1$. Así

$$\int_{-1}^{\infty} \frac{e^{-x^{1/3}}(x^{1/3}-1)}{x^{2/3}}\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} \frac{e^{-x^{1/3}}(x^{1/3}-1)}{x^{2/3}}\,\mathrm{d}x + \\ + \int_{0}^{1} \frac{e^{-x^{1/3}}(x^{1/3}-1)}{x^{2/3}}\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{\infty} \frac{e^{-x^{1/3}}(x^{1/3}-1)}{x^{2/3}}\,\mathrm{d}x,$$

donde hemos ya omitido ya el último sumando que será 0. El primero y tercer sumandos son de tipo 1 y el segundo de tipo 2. Puesto que en nuestras tres integrales el integrando es el mismo, parece indicado calcular una primitiva de la función

$$
\begin{aligned}
&\int \frac{e^{-x^{1/3}}(x^{1/3}-1)}{x^{2/3}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x^{1/3}-1}{x^{2/3}e^{x^{1/3}}}\,\mathrm{d}x = \\
&\qquad\qquad \left(x^{1/3} = y \Rightarrow \frac{1}{3}x^{-2/3}\,\mathrm{d}t = \,\mathrm{d}y \Rightarrow \frac{\mathrm{d}x}{x^{2/3}} = 3\,\mathrm{d}y\right) \\
&= 3\int (y-1)e^{-y}\,\mathrm{d}y = \\
&\qquad\qquad \left(\begin{array}{ll} u = y-1, & \mathrm{d}u = \,\mathrm{d}y \\ \mathrm{d}v = e^{-y}\,\mathrm{d}y, & v = \displaystyle\int e^{-y}\,\mathrm{d}y = -e^{-y} \end{array}\right) \\
&= 3\left((1-y)e^{-y} + \int e^{-y}\,\mathrm{d}y\right) = -3ye^{-y} + C = -3x^{1/3}e^{-x^{1/3}} + C.
\end{aligned}
$$

Por tanto nuestra integral es

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{x\to 0^-}\int_{-1}^{x} \frac{e^{-t^{1/3}}(t^{1/3}-1)}{t^{2/3}}\,\mathrm{d}t + \lim_{x\to 0^+}\int_{x}^{1} \frac{e^{-t^{1/3}}(t^{1/3}-1)}{t^{2/3}}\,\mathrm{d}t + \\
&\quad + \lim_{x\to\infty}\int_{1}^{x} \frac{e^{-t^{1/3}}(t^{1/3}-1)}{t^{2/3}}\,\mathrm{d}t = \\
&= \lim_{x\to 0^-} -3t^{1/3}e^{-t^{1/3}}\Big|_{-1}^{x} + \lim_{x\to 0^+} -3t^{1/3}e^{-t^{1/3}}\Big|_{x}^{1} + \lim_{x\to\infty} -3t^{1/3}e^{-t^{1/3}}\Big|_{1}^{x} = \\
&= \lim_{x\to 0^-} -3(x^{1/3}e^{-x^{1/3}} - e) + \lim_{x\to 0^+} 3(x^{1/3}e^{-x^{1/3}} - e^{-1}) + \\
&\quad + \lim_{x\to\infty} 3(e^{-1} - x^{1/3}e^{-x^{1/3}}) = -3e,
\end{aligned}
$$

y la integral converge. ◁

Definición 4.5.9 Estudiar el *carácter* de una integral impropia, es estudiar si es convergente, divergente u oscilante. ◁

4.5.3 Propiedades de las integrales impropias

4.5.3.1 Combinaciones lineales

Proposición 4.5.10 Sean $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ y $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ y $\displaystyle\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ integrales impropias convergentes entonces $\displaystyle\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))\,\mathrm{d}x$ es convergente y

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))\,\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \mu \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

$\triangleleft$

4.5.3.2 Regla de Barrow

Proposición 4.5.11 Sean $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$ y $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en (a, b). Sea $G(x)$ una primitiva de f en (a, b). Entonces

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = G(x)\big|_{a^+}^{b^-} := G(b^-) - G(a^+) := \lim_{x \to b^-} G(x) - \lim_{x \to a^+} G(x).$$

$\triangleleft$

Ejemplo 4.5.12

$$\int_1^\infty e^{-x}\,\mathrm{d}x = -e^{-x}\big|_1^\infty = \lim_{x \to \infty} -e^{-x} + e^{-1} = e^{-1}.$$

$\triangleleft$

4.5.4 Integración por partes

Proposición 4.5.13 Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, y $u, v \in \mathcal{C}^1((a, b))$. Se tiene

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x)\big|_{a^+}^{b^-} - \int_a^a v(x)u'(x)\,\mathrm{d}x,$$

o escrito abreviadamente

$$\int_a^b u\,\mathrm{d}v = uv\big|_{a^+}^{b^-} - \int_a^b v\,\mathrm{d}u.$$

$\triangleleft$

Ejemplo 4.5.14

$$\int_0^1 x^2 \log x \, \mathrm{d}x =$$

$$\begin{pmatrix} u = \log x, & \mathrm{d}u = \dfrac{1}{x}\, \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = x^2 \, \mathrm{d}x, & v = \displaystyle\int x^2 \, \mathrm{d}x = \dfrac{x^3}{3} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{x^3}{3} \log x \Big|_{0^+}^{1^-} - \int_0^1 \frac{x^2}{3} \, \mathrm{d}x = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^3}{3} \log x - 0 - \frac{x^3}{9} \Big|_{0^+}^{1^-} = -\frac{1}{9}.$$

◁

4.5.5 Cambio de variable

Proposición 4.5.15 Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en (a, b), $J, A \subseteq \mathbb{R}$ tres intervalos abiertos, $u : (a, b) \longrightarrow A$ biyectiva con $u \in \mathcal{C}^1((a, b))$ y $v : J \longrightarrow A$ biyectiva con $v \in \mathcal{C}^1(J)$. Se tiene que

$$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x = \int_{\lim\limits_{x \to b^-} v^{-1}(u(a))}^{\lim\limits_{x \to a^+} v^{-1}(u(v))} \frac{f(u^{-1}(v(t)))v'(t)}{u'(u^{-1}(v(t)))} \, \mathrm{d}t.$$

◁

Ejemplo 4.5.16

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2 e^{1/x}} =$$

$$\left(t = \frac{1}{x} \Rightarrow \mathrm{d}t = -\frac{\mathrm{d}x}{x^2}, \quad \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty, \ \lim_{x \to 1^-} \frac{1}{x} = 1. \right)$$

$$= \int_\infty^1 -e^{-t} \, \mathrm{d}t = \int_1^\infty e^{-t} \, \mathrm{d}t = \left. -e^{-t} \right|_1^\infty = \lim_{x \to t} \infty - e^{-t} + e^{-1} = e^{-1}.$$

◁

Nota 4.5.17 Una integral no impropia puede ser tratada como una impropia. En ese caso resulta ser convergente y su valor es el mismo que el que tiene como integral de Riemann ◁

Nota 4.5.18 Las aplicaciones geométricas son también válidas con integrales impropias ◁

4.6 Ejercicios

Ejercicio 4.1 Sean $a, b \in \mathbb{R} - \{0\}$. Calcular

$$\int e^{ax} \cos bx \,\mathrm{d}x.$$

Ejercicio 4.2 Calcular

$$\int \frac{2^x \,\mathrm{d}x}{1 + 4^x}.$$

Ejercicio 4.3 Calcular

$$\int \frac{x \,\mathrm{d}x}{(x+1)(x+2)(x+3)}.$$

Ejercicio 4.4 Calcular

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3 - 1}.$$

Ejercicio 4.5 Calcular

$$\int \frac{2x^3 - x^2 + 5x}{(x^2+1)^2} \,\mathrm{d}x.$$

Ejercicio 4.6 Calcular

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x+2} + \sqrt[3]{x+2}}.$$

Ejercicio 4.7 Calcular

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x}.$$

Ejercicio 4.8 Calcular

$$\int \frac{1 - 5 \operatorname{sen} x}{2 \cos x} \,\mathrm{d}x.$$

Ejercicio 4.9 Calcular

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 - a^2}}, \ \text{con } a \neq 0.$$

Ejercicio 4.10 Calcular

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4 \sqrt{x^2 - 1}}.$$

Ejercicio 4.11 Calcular
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(1+\sqrt{1-2x-x^2})}.$$

Ejercicio 4.12 Calcular
$$\int \operatorname{tg}^2 x \,\mathrm{d}x.$$

Ejercicio 4.13 Calcular
$$\int \cos^2 x \,\mathrm{d}x.$$

Ejercicio 4.14 Calcular
$$\int \operatorname{sen}^2 x \,\mathrm{d}x.$$

Ejercicio 4.15 Calcular
$$\int \cos(x)\cos(2x)\cos(3x)\,\mathrm{d}x.$$

Ejercicio 4.16 Calcular
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{sen} x \cos x}.$$

Ejercicio 4.17 Calcular
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x}.$$

Ejercicio 4.18 Calcular
$$\int \cos x e^{\operatorname{sen} x}\,\mathrm{d}x.$$

Ejercicio 4.19 Calcular
$$\int \frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\sqrt[3]{\operatorname{sen} x - \cos x}}\,\mathrm{d}x.$$

Ejercicio 4.20 Calcular
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x \log^3 x}.$$

Ejercicio 4.21 Calcular
$$\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}\,\mathrm{d}x.$$

Ejercicio 4.22 Calcular
$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2+\sqrt{(1+x^2)^3}}}.$$

Ejercicio 4.23 Calcular
$$\int xe^x\,\mathrm{d}x.$$

Ejercicio 4.24 Calcular
$$\int x^3e^{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Ejercicio 4.25 Calcular
$$\int \log^2 x\,\mathrm{d}x.$$

Ejercicio 4.26 Calcular
$$\int \frac{\log(\log x)}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Ejercicio 4.27 Calcular
$$\int \operatorname{arc\,tg} x\,\mathrm{d}x.$$

Ejercicio 4.28 Calcular
$$\int e^x \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x.$$

Ejercicio 4.29 Calcular
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2x^2-2x+5}}.$$

Ejercicio 4.30 Calcular
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{5x^2-7}}.$$

Ejercicio 4.31 Calcular
$$\int \frac{\operatorname{sen} x\cos x}{\sqrt{2-\operatorname{sen}^4 x}}\,\mathrm{d}x.$$

Ejercicio 4.32 Calcular
$$\int \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}+e^x+1}}\,\mathrm{d}x.$$

Ejercicio 4.33 Calcular
$$\int \frac{x}{\sqrt{1-6x^4}}\,\mathrm{d}x.$$

Ejercicio 4.34 Calcular
$$\int \frac{\sec^2 x}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x+4\operatorname{tg} x}}\,\mathrm{d}x.$$

Ejercicio 4.35 Calcular
$$\int \frac{5x+10}{x(x+10)}\,\mathrm{d}x.$$

Ejercicio 4.36 Calcular
$$\int \frac{2(x^3+5)}{x^3(x+1)}\,\mathrm{d}x.$$

Ejercicio 4.37 Calcular
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x^2+2x+2)}.$$

Ejercicio 4.38 Calcular
$$\int \frac{3x^2+2x+1}{(x-1)(x^2+x+1)}\,\mathrm{d}x.$$

Ejercicio 4.39 Calcular
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^3-1)^2}.$$

Ejercicio 4.40 Calcular
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^3(x^2+1)^2}.$$

Ejercicio 4.41 Calcular
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x)\sqrt{x+\sqrt{x}}}.$$

Ejercicio 4.42 Calcular
$$\int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x.$$

Ejercicio 4.43 Calcular
$$\int \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x+1}}\,\mathrm{d}x.$$

Ejercicio 4.44 Calcular
$$\int \frac{x + (2x-1)^{2/3}}{(2x-1)^{1/2} + 1} \,\mathrm{d}x.$$

Ejercicio 4.45 Calcular
$$\int \frac{\sqrt{x-1}}{1 + \sqrt[3]{x-1}} \,\mathrm{d}x.$$

Ejercicio 4.46 Calcular
$$\int x^3 \sqrt{1+x} \,\mathrm{d}x.$$

Ejercicio 4.47 Calcular
$$\int \frac{2x^5 + 3x^4 - 5x^3 - 2x^2 + x + 4}{x^4 - 3x^2 + 2x} \,\mathrm{d}x.$$

Ejercicio 4.48 Calcular
$$\int \frac{x^2 - 2}{x^7 + 2x^5 + x^3} \,\mathrm{d}x.$$

Ejercicio 4.49 Calcular
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + x + 1}.$$

Ejercicio 4.50 Calcular
$$\int x \left(2 + \sqrt[3]{x^2}\right)^2 \,\mathrm{d}x.$$

Ejercicio 4.51 Calcular
$$\int x \left(2 + \sqrt[3]{x^2}\right)^{1/2} \,\mathrm{d}x.$$

Ejercicio 4.52 Calcular
$$\int (1 + x^2)^{-3/2} \,\mathrm{d}x.$$

Ejercicio 4.53 Calcular
$$\int \frac{\sqrt{x^2 + 9x}}{x^2} \,\mathrm{d}x.$$

Ejercicio 4.54 Calcular
$$\int \sqrt[3]{x}(1 + 2\sqrt{x})^2 \,\mathrm{d}x.$$

Ejercicio 4.55 Calcular
$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Ejercicio 4.56 Calcular
$$\int \frac{x}{1+x^4}\,\mathrm{d}x.$$

Ejercicio 4.57 Calcular
$$\int \frac{(1+\sqrt{x})^2}{2x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x.$$

Ejercicio 4.58 Calcular
$$\int \frac{\sqrt[4]{x}}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x.$$

Ejercicio 4.59 Calcular
$$\int (x+2)\operatorname{sen}(x^2+4x-6)\,\mathrm{d}x.$$

Ejercicio 4.60 Calcular
$$\int \frac{\operatorname{cotg}(\log x)}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Ejercicio 4.61 Calcular
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x+2)(x+3)}}.$$

Ejercicio 4.62 Calcular
$$\int \frac{1+e^x}{1-e^x}\,\mathrm{d}x.$$

Ejercicio 4.63 Calcular
$$\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}\,\mathrm{d}x.$$

Ejercicio 4.64 Calcular
$$\int x^2 e^x\,\mathrm{d}x.$$

Ejercicio 4.65 Calcular
$$\int \log x\,\mathrm{d}x.$$

Ejercicio 4.66 Calcular
$$\int \log^3 x \,\mathrm{d}x.$$

Ejercicio 4.67 Calcular
$$\int \frac{\log x}{x} \,\mathrm{d}x.$$

Ejercicio 4.68 Calcular
$$\int x^2 \operatorname{sen} x \,\mathrm{d}x.$$

Ejercicio 4.69 Calcular
$$\int \operatorname{sen} x \log(\cos x) \,\mathrm{d}x.$$

Ejercicio 4.70 Calcular
$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \,\mathrm{d}x.$$

Ejercicio 4.71 Calcular
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x^2}}.$$

Ejercicio 4.72 Calcular
$$\int \operatorname{sen}(\log x) \,\mathrm{d}x.$$

Ejercicio 4.73 Calcular
$$\int \cos(\log x) \,\mathrm{d}x.$$

Ejercicio 4.74 Calcular
$$\int x^n \log x \,\mathrm{d}x, \ \ n \in \mathbb{N}.$$

Ejercicio 4.75 Calcular
$$\int 3^{\sqrt{2x+1}} \,\mathrm{d}x.$$

Ejercicio 4.76 Calcular
$$\int \operatorname{sen}^5 x \cos x \,\mathrm{d}x.$$

Ejercicio 4.77 Calcular
$$\int \sec^2 x \operatorname{tg}^5 x \,\mathrm{d}x.$$

Ejercicio 4.78 Calcular
$$\int \frac{\operatorname{arc\,sen} x}{(1-x^2)^{3/2}} \,\mathrm{d}x.$$

Ejercicio 4.79 Calcular
$$\int \cos^5 x \sqrt{\operatorname{sen} x} x.$$

Ejercicio 4.80 Calcular
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x)\sqrt{x^2+x+1}}.$$

Ejercicio 4.81 Calcular
$$\int \sqrt{-x^2-2x+3} \,\mathrm{d}x.$$

Ejercicio 4.82 Calcular
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-2x-3}}.$$

Ejercicio 4.83 Calcular
$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}} \,\mathrm{d}x.$$

Ejercicio 4.84 Calcular
$$\int \frac{4x^2-3}{\sqrt{1-2x^2}} \,\mathrm{d}x.$$

Ejercicio 4.85 Calcular
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-3x+2}}.$$

Ejercicio 4.86 Calcular
$$\int \operatorname{sen}^3 x \cos^3 x \,\mathrm{d}x.$$

Ejercicio 4.87 Calcular
$$\int \operatorname{sen}^3 x \cos^2 x \,\mathrm{d}x.$$

Ejercicio 4.88 Calcular
$$\int \frac{\operatorname{sen}^5 x}{\cos x}\,\mathrm{d}x.$$

Ejercicio 4.89 Calcular
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{sen}^4 x \cos^2 x}.$$

Ejercicio 4.90 Calcular
$$\int \frac{\cos x}{\sqrt{\operatorname{sen} x}}\,\mathrm{d}x.$$

Ejercicio 4.91 Calcular
$$\int \frac{\cos^3 x}{1-\operatorname{sen}^4 x}\,\mathrm{d}x.$$

Ejercicio 4.92 Calcular
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\operatorname{sen}^2 x}.$$

Ejercicio 4.93 Calcular
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{sen} x}.$$

Ejercicio 4.94 Calcular
$$\int \sqrt{x^2-a^2}\,\mathrm{d}x,\ a\in\mathbb{R}-\{0\}$$

Ejercicio 4.95 Calcular
$$\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x.$$

Ejercicio 4.96 Calcular
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n},\ a\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{N}.$$

Ejercicio 4.97 Calcular el valor de
$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\operatorname{sen} x}}\,\mathrm{d}x$$

Ejercicio 4.98 Calcular el valor de

$$\int_{-1}^{1} \frac{|\operatorname{sen} x|}{\cos^4 x} \, \mathrm{d}x$$

Ejercicio 4.99 Calcular el valor de

$$\int_{0}^{\pi} \frac{x \operatorname{sen} x}{1+\cos^2 x} \, \mathrm{d}x$$

Ejercicio 4.100 Sean $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ derivables con $f'(x) = g(x)$ y $g'(x) = -f(x),\ \forall\, x \in \mathbb{R}$ y con $f(0) = 0,\ g(0) = 1$. Calcular

$$\lim_{x\to\infty} \int_{x}^{x+1} \left(f^2(t) + g^2(t)\right) \mathrm{d}t.$$

Ejercicio 4.101 Sean $f, g \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R})$ tales que el polinomio de Taylor de orden 2 de f en 1 es $P(x) = 6(x-1) + 3(x-1)^2$ y el polinomio de Taylor de orden 2 de g en 0 es $Q(x) = 1 + 4x$. Se sabe además que $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \pi$. Calcular el polinomio de Taylor de orden 3 en 0 de la función

$$F(x) = \int_0^{g(x)} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Ejercicio 4.102 Sea f una función par en el intervalo $[-a, a]$ con $a > 0$. Si llamamos $I = \displaystyle\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$, calcular $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x$

Ejercicio 4.103 Sea f una función impar en el intervalo $[-a, a]$ con $a > 0$. Calcular $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x$

Ejercicio 4.104 Sea $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua. Calcular el valor de

$$\int_0^{\pi/2} \frac{f(\operatorname{sen} x)}{f(\operatorname{sen} x) + f(\cos x)}\,\mathrm{d}x.$$

Ejercicio 4.105 Sea $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua con $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Probar que existe $c \in [0,1]$ con $f(c) = 0$.

Ejercicio 4.106 Sea $f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en $[-1, 1]$ y derivable en $(-1, 1)$ con

$$\int_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Probar que existe $c \in (-1, 1)$ tal que $f'(c) = 0$.

Ejercicio 4.107 Hallar una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{R}$ tales que

$$\int_{a}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \cos x - \frac{1}{2},\ \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Ejercicio 4.108 Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $e^2 < a < b$. Probar que

$$\int_{a}^{b} \frac{\mathrm{d}t}{\log t} < \frac{2b}{\log b}.$$

Ejercicio 4.109 Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$. Estudiar la continuidad en $x = -1$ de la función

$$f(x) = \int_{a}^{b} t^x\,\mathrm{d}t.$$

Ejercicio 4.110 Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable en $\mathbb{R}$, con $f(0) = 0$ y $f'(x) > 0,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$. Calcular los extremos relativos de

$$F(x) = \int_{0}^{x^2-3x+2} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Ejercicio 4.111 Sea

$$T(x,t) = \frac{C}{a\sqrt{4\pi k t}} \int_{0}^{a} e^{-(x-u)^2}(4kt)\,\mathrm{d}u.$$

Calcular

$$\lim_{a\to 0} T(x,t).$$

Ejercicio 4.112 Sea

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}, & \text{si } x \neq 0 \\ 1, & \text{si } x = 0 \end{cases},$$

y

$$f(x) = \int_{0}^{x} g(t)\,\mathrm{d}t.$$

a) Calcular los extremos relativos de f en $(0, \infty)$.

b) Calcular el polinomio de Taylor de orden 6 de f en 0.

Ejercicio 4.113 Sea $g : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ con $g(1) = 1$ y $g'(x^2) = x^3$, $\forall\, x > 0$. Calcular $g(4)$.

Ejercicio 4.114 Sea

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}, & \text{si } x < 0 \\ e^x, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}.$$

Probar que existe $c \in [-1, 1]$ tal que

$$f(c) = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(e^x + \frac{\operatorname{sen} x}{x}\right) \mathrm{d}x.$$

Ejercicio 4.115 Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x+y) = f(x)f(y)$, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$ y con

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - 1}{x} = 1.$$

Probar que f es derivable en $\mathbb{R}$ y obtener la expresión explícita de f.

Ejercicio 4.116 Calcular el polinomio de Taylor de orden 4 en 0 de

$$f(x) = \begin{cases} \cos^2(x - \pi/2) + \dfrac{\log(1 + x^2)}{x} \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^5 t \,\mathrm{d}t, & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

Ejercicio 4.117 Calcular la longitud de la gráfica de $\operatorname{sen} x$ entre 0 y 2π.

Ejercicio 4.118 Calcular el área generada al girar la curva $y = \operatorname{tg} x$ con $x \in [0, \pi/4]$ respecto del eje OX.

Ejercicio 4.119 Calcular el volumen del cuerpo generado al girar

$$y = \frac{\sqrt{\operatorname{sen} x \cos x}}{\sqrt{1 + \operatorname{sen}^4 x}},\ x \in [0, \pi/2],$$

respecto del eje OX.

Ejercicio 4.120 Calcular el volumen del toro que se genera al girar el círculo $x^2 + y^2 \leq 9$ alrededor de la recta $x = 4$. Calcular también la superficie de dicho toro.

Ejercicio 4.121 Calcular el área delimitada por la curva

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{si } x \in [0,1] \\ 1, & \text{si } x \in (1,2] \end{cases}.$$

Ejercicio 4.122 Sean $a \in \mathbb{R}$ con $a > 0$, $f(x) = \cos x$, $x \in [0, \pi/2]$ y $g(x) = a \operatorname{sen} x$, $x \in [0, \pi/2]$. Hallar el valor de a para que g divida a la región del primer cuadrante de $\mathbb{R}^2$ delimitada por f en dos partes de igual área.

Ejercicio 4.123 Calcular el volumen y la superficie lateral del cono de radio r y altura h.

Ejercicio 4.124 Calcular el área de la superficie de revolución generada al gira la gráfica de $\operatorname{sh} x$ alrededor de OX entre los puntos $x = 0$ y $x = 1$

Ejercicio 4.125 Calcular el volumen del elipsoide de revolución engendrado por la elipse $x^2/4 + y^2/9 = 1$ al girar alrededor de su eje mayor.

Ejercicio 4.126 Calcular el volumen limitado por las superficies que generan las parábolas $y = x^2$ y $x = y^2$ al girar alrededor de la recta $x = 4$.

Ejercicio 4.127 Sean

$$\begin{aligned} f : (0,\infty) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{\log(x+1)}{x^\alpha} \end{aligned}, \qquad \begin{aligned} g : (0,\infty) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sqrt{\frac{xe^x}{\sqrt{(e^x-1)^3}}} \end{aligned},$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$

a) Para $\alpha = 3$, estudiar la convergencia de

$$\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$$

b) Probar que para $\alpha = 3/2$

$$\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$$

es convergente y calcular su valor.

c) Calcular el volumen de revolución generado al girar la gráfica de $g(x)$ respecto del eje OX.

Ejercicio 4.128 Calcular el área delimitada por las curvas $f(x) = xe^{-x}$ y $g(x) = x^2e^{-x}$ en el intervalo $[0, \infty)$.

Ejercicio 4.129 Estudiar y calcular si es pertinente

$$\int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)\sqrt{1-x^4}}\,\mathrm{d}x.$$

Ejercicio 4.130 Probar que las siguientes integrales impropias convergen, que toman el mismo valor y calcular dicho valor

$$\int_0^\infty e^{-x}\operatorname{sen}(\lambda x)\,\mathrm{d}x,\ \int_0^\infty \lambda e^{-x}\cos(\lambda x)\,\mathrm{d}x,\ \lambda\in\mathbb{R}.$$

Ejercicio 4.131 Sea $n \in \mathbb{N}$. Calcular el valor de

$$\int_0^1 \left(\log\left(\frac{1}{x}\right)\right)^n \mathrm{d}x$$

Ejercicio 4.132 Ver que las integrales impropias

$$\int_0^{\pi/2} \log(\operatorname{sen} x)\,\mathrm{d}x, \quad \int_0^{\pi/2} \log(\cos x)\,\mathrm{d}x$$

son convergentes, que toman el mismo valor y calcular dicho valor.

A partir de lo anterior calcular

$$\int_0^{\pi/2} \frac{x^2}{\operatorname{sen}^2 x}\,\mathrm{d}x \quad \text{y} \quad \int_0^\infty \frac{x}{\sqrt{e^{2z}-1}}\,\mathrm{d}x.$$

Ejercicio 4.133 Estudiar la convergencia y calcular el valor si procede de

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{d}x}{e^x+e^{-x}}.$$

Ejercicio 4.134 Estudiar la convergencia y calcular el valor si procede de

$$\int_0^1 \frac{\log x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x.$$

Ejercicio 4.135 Estudiar la convergencia y calcular el valor si procede de

$$\int_1^\infty e^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

Ejercicio 4.136 Estudiar la convergencia y calcular el valor si procede de

$$\int_1^\infty \cos(\pi x)\,\mathrm{d}x.$$

Ejercicio 4.137 Estudiar la convergencia y calcular el valor si procede de

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1-x)}}.$$

Capítulo 5

Sucesiones y series

5.1 Sucesiones

5.1.1 Introducción

Definición 5.1.1 Una *sucesión* de números reales es una aplicación

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longmapsto a_n \end{aligned}.$$

Habitualmente tal sucesión se denotará por

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ o por } (a_n)_{n=1}^{\infty}$$

Diremos que a_n es el *término general* de la sucesión. Llamaremos a a_1 el primer término de la sucesión, a a_2 el segundo término y así sucesivamente. ◁

En la práctica podemos interpretar una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como si fuera una especie de vector de *infinitas componentes*

$$(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots),$$

empleando la palabra *términos* en vez de componentes para denotar a los números reales que la forman.

Ejemplo 5.1.2

$$\begin{aligned}
(-1, 1, -1, 1, \ldots) &= ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}} \\
(1/2, 1/4, 1/8, 1/16, \ldots) &= (1/2^n)_{n\in\mathbb{N}} \\
(3, 3, 3, 3, \ldots) &= (3)_{n\in\mathbb{N}} \\
(1/8, 1/9, 1/10, 1/11, \ldots) &= (1/(n+7))_{n\in\mathbb{N}} \\
(0, 1, 4, 9, 16, \ldots) &= \left((n-1)^2\right)_{n\in\mathbb{N}}
\end{aligned}$$

◁

En ocasiones resulta mucho más cómodo efectuar un cambio de índice y expresar las sucesiones de otro modo. Así podríamos expresar las dos últimas sucesiones del ejemplo 5.1.2 como

$$\begin{aligned}(1/8, 1/9, 1/10, 1/11, \ldots) &= (1/n)_{n=8}^{\infty}\\ (0, 1, 4, 9, 16, \ldots) &= \left(n^2\right)_{n=0}^{\infty}\end{aligned}$$

Nota 5.1.3 Para todas las sucesiones del ejemplo 5.1.2 se puede dar una expresión cerrada del término general, pero ello no siempre es posible o puede resultar complicado. $\triangleleft$

Nota 5.1.4 Una manera habitual de expresar una sucesión es mediante una *fórmula de recurrencia*. Por ejemplo, consideremos la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ y $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$, $\forall\, n > 2$. $\triangleleft$

Definición 5.1.5 Si $A \subseteq \mathbb{R}$ y $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de números reales tal que $a_n \in A$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, entonces diremos que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ también es una sucesión de elementos de A. $\triangleleft$

Ejemplo 5.1.6 La sucesión

$$\left((n-1)^2\right)_{n\in\mathbb{N}} = (0, 1, 4, 9, 16, \ldots),$$

también es una sucesión de números naturales.
La sucesión

$$((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}} = (-1, 1, -1, 1, \ldots),$$

también es una sucesión de números enteros.
La sucesión

$$\left(\frac{1}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots\right),$$

también es una sucesión de números racionales. $\triangleleft$

Definición 5.1.7 Llamaremos *sucesión constante* a toda sucesión de la forma

$$(\alpha)_{n\in\mathbb{N}} = (\alpha, \alpha, \alpha, \ldots) \text{ con } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Diremos que la sucesión anterior es la *sucesión constante* α o bien la *sucesión constantemente igual a* α. $\triangleleft$

Ejemplo 5.1.8 La sucesión

$$(5)_{n\in\mathbb{N}} = (5, 5, 5, \ldots),$$

es la sucesión constante 5 o la sucesión constantemente igual a 5. $\triangleleft$

Definición 5.1.9 Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión y P una propiedad relativa a las sucesiones. Diremos que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ verifica la propiedad P *a partir de un término en adelante* si existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\, n_0$ verifica la propiedad P. $\triangleleft$

Ejemplo 5.1.10 La sucesión

$$(2, -4, 6, 3, 3, 3, 3, 3, \ldots),$$

es constante a partir de un término en adelante. $\triangleleft$

5.1.2 Monotonía y acotación

Definición 5.1.11 Diremos que una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es

- *creciente* si $a_n \leq a_{n+1},\ \forall\, n \in \mathbb{N}$.
- *decreciente* si $a_n \geq a_{n+1},\ \forall\, n \in \mathbb{N}$.
- *monótona* si es creciente o decreciente
- *estrictamente creciente* si $a_n < a_{n+1},\ \forall\, n \in \mathbb{N}$.
- *estrictamente decreciente* si $a_n > a_{n+1},\ \forall\, n \in \mathbb{N}$.
- *estrictamente monótona* si es estrictamente creciente o estrictamente decreciente.

$\triangleleft$

Toda sucesión estrictamente creciente es creciente, pero el recíproco no es cierto. Toda sucesión estrictamente decreciente es decreciente, pero el recíproco tampoco es cierto.

Ejemplo 5.1.12 Todas las sucesiones constantes son crecientes y decrecientes, pero no estrictamente crecientes ni estrictamente decrecientes. $\triangleleft$

Ejemplo 5.1.13 La sucesión

$$(1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, \ldots)$$

es creciente pero no estrictamente creciente. $\triangleleft$

Ejemplo 5.1.14 La sucesión

$$\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right),$$

es estrictamente decreciente.
La sucesión

$$\left(n^2\right)_{n\in\mathbb{N}} = (1, 4, 9, \ldots),$$

es estrictamente creciente. $\triangleleft$

Ejemplo 5.1.15 La sucesión

$$((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}} = (-1, 1, -1, 1, \ldots),$$

no es ni creciente ni decreciente. $\triangleleft$

Ejemplo 5.1.16 La sucesión

$$\left((n-5)^2\right)_{n\in\mathbb{N}} = (16, 9, 4, 1, 0, 1, 4, 9, 16, 25, \ldots),$$

es estrictamente creciente a partir de un término en adelante. $\triangleleft$

Definición 5.1.17 Dada una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, diremos que

- Es acotada si existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $|a_n| \leq M, \ \forall\, n \in \mathbb{N}$.
- Es acotada superiormente si existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $a_n \leq M, \ \forall\, n \in \mathbb{N}$.
- Es acotada inferiormente si existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $a_n \geq M, \ \forall\, n \in \mathbb{N}$.

$\triangleleft$

Lema 5.1.18 Una sucesión es acotada si y sólo si es acotada superior e inferiormente. $\triangleleft$

Ejemplo 5.1.19

- La sucesión $(1/n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada.
- La sucesión $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada inferiormente pero no superiormente.
- La sucesión $(-n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada superiormente pero no inferiormente.
- La sucesión $((-1)^n n)_{n\in\mathbb{N}}$ no es acotada ni superior ni inferiormente.
- Toda sucesión constante es acotada.

$\triangleleft$

5.1.3 Subsucesiones

Definición 5.1.20 Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión. Llamaremos *subsucesión* de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a toda sucesión de la forma $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, donde $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión estrictamente creciente de números naturales. ◁

Ejemplo 5.1.21

- La sucesión $(1)_{n\in\mathbb{N}}$ es una subsucesión de $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- La única subsucesión de una sucesión constante es ella misma.
- La sucesión $((3n-1)^2)_{n\in\mathbb{N}}$ es un subsucesión de $(n^2)_{n\in\mathbb{N}}$

◁

Nota 5.1.22 De manera informal, podemos decir que una subsucesión de una dada es otra sucesión obtenida a partir de la primera tomando términos de la primera, posiblemente salteados y respetando el orden en el que aparecían. ◁

5.1.4 Aritmética de sucesiones

Definición 5.1.23 Se definen las siguientes *operaciones aritméticas de sucesiones*. Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones y $\alpha \in \mathbb{R}$.

1) Suma.
$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} + (b_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

2) Producto.
$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} (b_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

3) Producto por un escalar.
$$\alpha (a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\alpha a_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

◁

5.2 Límites de sucesiones

5.2.1 Introducción

Definición 5.2.1 Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión. Si existe $L \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ tal que para cada entorno V de L, todos los términos de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a partir de uno en adelante pertenecen a V, entonces diremos que existe el *límite* de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cuando n tiende hacia ∞ y que su valor es L. Denotaremos este hecho por

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L.$$

En este caso también podremos decir que la sucesión tiene límite y que el límite es L. $\triangleleft$

Propiedades 5.2.2 Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Se tiene:

1) El límite de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puede existir o no.

2) Si $\exists \lim_{n\to\infty} a_n$ entonces es único.

3) La existencia y en su caso el valor del límite de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no depende de si extraemos o añadimos a $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una cantidad finita de términos.

$\triangleleft$

Ejemplo 5.2.3

- Sea $\alpha \in \mathbb{R}$. La sucesión constante $(\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ tiene límite α.
- $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.
- $\lim_{n\to\infty} n = \infty$.
- La sucesión $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$, no tiene límite.

$\triangleleft$

Definición 5.2.4 Sean $L \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ y $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión con límite L.

- Diremos que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es *convergente* si $L \in \mathbb{R}$. Diremos además que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge* hacia L.
- Diremos que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es *divergente* si $L \in \{\infty, -\infty\}$. Diremos además que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *diverge* hacia L.

$\triangleleft$

Proposición 5.2.5 Toda sucesión convergente es acotada. $\triangleleft$

Proposición 5.2.6 Toda sucesión monótona y acotada es convergente. $\triangleleft$

5.2.2 Subsucesiones y límites

Proposición 5.2.7 Toda subsucesión de una sucesión que tenga límite, tiene también el mismo límite. ◁

Este resultado se utiliza para probar que una sucesión no tiene límite. Para ello basta encontrar una subsucesión que no lo tenga o dos subsucesiones que posean límites distintos.

Ejemplo 5.2.8 Consideremos la sucesión

$$((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}} = (-1, 1, -1, 1, \ldots).$$

Dos subsucesiones suyas son

$$\begin{aligned} \left((-1)^{2n}\right)_{n\in\mathbb{N}} &= (1)_{n\in\mathbb{N}} = (1, 1, \ldots) \\ \left((-1)^{2n-1}\right)_{n\in\mathbb{N}} &= (-1)_{n\in\mathbb{N}} = (-1, -1, \ldots), \end{aligned}$$

para las cuales es claro que

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} 1 = 1 \\ &\lim_{n\to\infty} -1 = -1. \end{aligned}$$

Como ambos límites son distintos, $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ no puede tener límite. ◁

5.2.3 Reducción a límites de funciones

Proposición 5.2.9 Sean $k \in \mathbb{Z}$, $(a_n)_{n=k}^{\infty}$ una sucesión y $f : [k, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(n) = a_n$, $\forall\, n \in \mathbb{Z},\ n \geq k$. Si existe $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ y vale L, entonces también existe $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ y vale L. ◁

Ejemplo 5.2.10 Sean la sucesión

$$\left(n \operatorname{sen} \frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Consideramos la función

$$\begin{aligned} f : [1, \infty) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x \operatorname{sen} \frac{1}{x} \end{aligned}.$$

Como

$$\lim_{x\to\infty} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 1,$$

entonces por la Proposición 5.2.9 tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} n \operatorname{sen} \frac{1}{n} = 1.$$

$\triangleleft$

Este resultado permite calcular muchos límites de sucesiones sin más que construir la función resultante de sustituir n por x en el término general de la sucesión y aplicar la teoría de límites de funciones. Sin embargo debemos tener cuidado, pues este proceso de *sustituir n por x para construir una función* puede no tener sentido.

Ejemplo 5.2.11 Para la sucesión $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$, la expresión $(-1)^x$ no define ninguna función real en ningún intervalo de la forma $[k,\infty)$ con $k \in \mathbb{Z}$. $\triangleleft$

Sin embargo, los límites de sucesiones tienen propiedades muy similares a los de funciones de una variable y podremos aplicar directamente las técnicas que veremos a continuación.

5.2.4 Algunos casos particulares

El siguiente resultado nos muestra como son los límites de las potencias enteras no triviales del índice.

Proposición 5.2.12 Sea $k \in \mathbb{N}$. Tenemos que

1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0$

2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^k = \infty$

$\triangleleft$

Veremos que muchos límites se reducen a estos.

5.2.5 Acotación. Regla del Sandwich

Proposición 5.2.13 Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones. Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada y $\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0.$$

$\triangleleft$

Proposición 5.2.14 Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones verificando que $a_n \leq b_n$ a partir de un término en adelante. Si existen los límites de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n.$$

◁

Nota 5.2.15 Aunque en el enunciado de la proposición anterior impongamos $a_n < b_n$, no se puede garantizar que la desigualdad de los límites sea estricta. ◁

Proposición 5.2.16 [Regla del sandwich]
Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$,$(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tres sucesiones verificando que $a_n \leq b_n \leq c_n$ a partir de un término en adelante. Si existen los límites de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n,$$

entonces también existe $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ y además

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n.$$

◁

5.2.6 Aritmética

5.2.6.1 Suma

Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones, tales que existen sus límites y con

$$\lim_{n\to\infty} a_n = c \in \mathbb{R}\cup\{-\infty,\infty\},\ \lim_{n\to\infty} b_n = d \in \mathbb{R}\cup\{-\infty,\infty\}.$$

Se tiene que

1) Si $c, d \in \mathbb{R}$, entonces existe el límite de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} + (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = c + d.$$

2) Si se verifica al menos una de las dos condiciones siguientes

- $c \neq -\infty$ y $d = \infty$, ó
- $c = \infty$ y $d \neq -\infty$,

entonces existe el límite de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} + (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \infty.$$

3) Si se verifica alguna de las dos condiciones siguientes

- $c \neq \infty$ y $d = -\infty$, ó
- $c = -\infty$ y $d \neq \infty$,

entonces existe el límite de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} + (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = -\infty.$$

4) Si se verifica alguna de las dos condiciones siguientes

- $c = -\infty$ y $d = \infty$, ó
- $c = \infty$ y $d = -\infty$,

entonces no se sabe nada sobre $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n)$. En este caso diremos que se tiene una *indeterminación* de tipo $\infty - \infty$

5.2.6.2 Producto

Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones, tales que existen sus límites y con

$$\lim_{n\to\infty} a_n = c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}, \ \lim_{n\to\infty} b_n = d \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}.$$

Entonces

1) Si $c, d \in \mathbb{R}$, entonces existe el límite de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = cd.$$

2) Si se verifica alguna de las cuatro condiciones siguientes

- $c > 0$ y $d = \infty$, ó
- $c < 0$ y $d = -\infty$, ó
- $c = \infty$ y $d > 0$, ó
- $c = -\infty$ y $d < 0$,

entonces existe el límite de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \infty.$$

3) Si se verifica alguna de las cuatro condiciones siguientes

- $c < 0$ y $d = \infty$, ó
- $c > 0$ y $d = -\infty$, ó
- $c = \infty$ y $d < 0$, ó
- $c = -\infty$ y $d > 0$,

entonces existe el límite de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\,(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = -\infty.$$

4) Si se verifica alguna de las dos condiciones siguientes

- $c = 0$ y $d = \in \{\infty, -\infty\}$, ó
- $c \in \{\infty, -\infty\}$ y $d = 0$,

entonces no se sabe nada sobre $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n$. En este caso diremos que se tiene una *indeterminación* de tipo 0∞

5.2.6.3 Cociente

Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones con $b_n \neq 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, tales que existen los límites de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y con

$$\lim_{n\to\infty} a_n = c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\},\ \lim_{n\to\infty} b_n = d \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}.$$

Tenemos que

1) Si $c \in \mathbb{R}$ y $d \in \mathbb{R} - \{0\}$, entonces existe el límite de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \,/\, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{c}{d}.$$

2) Si $c \in \mathbb{R}$ y $d \in \{\infty, -\infty\}$, entonces existe el límite de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \,/\, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0.$$

3) Si se verifica alguna de las dos condiciones siguientes

- $c = \infty$ y $d > 0$ y $d \neq \infty$, ó
- $c = -\infty$ y $d < 0$ y $d \neq -\infty$,

entonces existe el límite de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \,/\, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty.$$

4) Si se verifica alguna de las dos condiciones siguientes

- $c = \infty$ y $d < 0$ y $d \neq -\infty$, ó
- $c = -\infty$ y $d > 0$ y $d \neq \infty$

entonces existe el límite de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \,/\, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = -\infty.$$

5) Si se verifica alguna de las dos condiciones siguientes

- $c > 0$ y $d = 0$ y $b_n > 0$ a partir de un término en adelante, ó
- $c < 0$ y $d = 0$ y $b_n < 0$ a partir de un término en adelante,

entonces existe el límite de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \,/\, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty.$$

6) Si se verifica alguna de las dos condiciones siguientes

- $c > 0$ y $d = 0$ y $b_n < 0$ a partir de un término en adelante, ó
- $c < 0$ y $d = 0$ y $b_n > 0$ a partir de un término en adelante,

entonces existe el límite de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \,/\, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = -\infty.$$

7) Si se verifica $c \neq 0$ y $d = 0$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no es de signo constante a partir de un término en adelante entonces no existe el límite de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \,/\, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

8) Si se verifica que $c = d = 0$ entonces no se sabe nada sobre $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$. En este caso diremos que se tiene una *indeterminación* de tipo $\dfrac{0}{0}$

9) Si se verifica que $c, d \in \{\infty, -\infty\}$ entonces no se sabe nada sobre $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$. En este caso diremos que se tiene una *indeterminación* de tipo $\frac{\infty}{\infty}$

5.2.6.4 Exponenciales

Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones con $a_n \geq 0,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$, de forma que no existe $n \in \mathbb{N} \,/\, a_n = b_n = 0$ y tales que existen los límites de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y con

$$\lim_{n\to\infty} a_n = c \in \mathbb{R} \cup \{\infty\},\ \lim_{n\to\infty} b_n = d \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}.$$

Entonces

1) Si se verifica alguna de las dos condiciones siguientes

- $c \in \mathbb{R}$ y $d \in \mathbb{R} - \{0\}$, ó
- $c \in \mathbb{R} - \{0\}$ y $d \in \mathbb{R}$,

entonces existe el límite de $\left(a_n^{b_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ y

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = c^d.$$

2) Si se verifica alguna de las tres condiciones siguientes

- $0 \leq c < 1$ y $d = \infty$, ó
- $c > 1$ y $d = -\infty$, ó $c = \infty$ y $d < 0$

entonces existe el límite de $a_n^{b_n}$ y

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = 0.$$

3) Si se verifica alguna de las tres condiciones siguientes

- $0 \leq c < 1$ y $d = -\infty$, ó
- $c > 1$ y $d = \infty$, ó
- $c = \infty$ y $d > 0$

entonces existe el límite de $a_n^{b_n}$ y

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = \infty.$$

4) Si $c = 1$ y $d \in \{\infty, -\infty\}$, entonces no se sabe nada sobre $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{b_n}$. En este caso diremos que se tiene una *indeterminación* de tipo 1^∞

5) Si $c = \infty$ y $d = 0$, entonces no se sabe nada sobre $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{b_n}$. En este caso diremos que se tiene una *indeterminación* de tipo ∞^0.

6) Si $c = d = 0$, entonces no se sabe nada sobre $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{b_n}$. En este caso diremos que se tiene una *indeterminación* de tipo 0^0.

Todo lo anterior podemos resumirlo en la Tabla 5.1. En cada fila aparece descrita una operación de las anteriores. Cada símbolo que aparezca se considerará en las condiciones establecidas antes para cada operación. En la primera columna aparece la aritmética usual cuando los límites son reales y tiene sentido la operación. En la segunda columna aparece una extensión de la aritmética a casos donde aparecen infinitos y algunos casos con ceros. En esta columna los valores de c y/o d pueden ser finitos o infinitos, salvo que se exprese lo contrario. Esta extensión es válida en el caso de límites a la luz de las propiedades de los límites que acabamos de enunciar. Finalmente en la tercera columna aparecen las indeterminaciones para cada operación.

Aritmética usual	Extensiones	Indeterm.
$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=c+d$	$c+\infty=\infty$, si $c\neq-\infty$ $c-\infty=-\infty$, si $c\neq\infty$	$\infty-\infty$
$\lim\limits_{n\to\infty} a_nb_n=cd$	$\pm\infty d=\begin{cases}\pm\infty, \text{ si } d>0\\ \mp\infty, \text{ si } d<0\end{cases}$	0∞
$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{c}{d}$	$\dfrac{c}{\pm\infty}=0,\ \forall c\in\mathbb{R}$ $\dfrac{\pm\infty}{d}=\begin{cases}\pm\infty, \text{ si } d\in\mathbb{R} \text{ y } d>0\\ \mp\infty, \text{ si } d\in\mathbb{R} \text{ y } d<0\end{cases}$ $\dfrac{c\neq0}{0}=\begin{cases}\infty c, \text{ si } \ \exists\, m\in\mathbb{N}\,/\,b_n>0\ \forall\, n>m\\ -\infty c, \text{ si } \ \exists\, m\in\mathbb{N}\,/\,b_n<0\,\forall\, n>m\\ \text{No existe en cualquier otro caso}\end{cases}$	$\dfrac{0}{0}, \dfrac{\infty}{\infty}$
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{b_n}=c^d$	$\infty^d=\begin{cases}\infty, \text{ si } d>0\\ 0, \text{ si } d<0\end{cases}$ $c^\infty=\begin{cases}0, \text{ si } 0\leq c<1\\ \infty, \text{ si } c>1\end{cases}$ $c^{-\infty}=\begin{cases}\infty, \text{ si } 0\leq c<1\\ 0, \text{ si } c>1\end{cases}$	1^∞, ∞^0, 0^0

Tabla 5.1 – Resumen de la aritmética de límites.

Nuestro principal objetivo ahora es ser capaces de resolver límites en los casos en los que hay indeterminaciones. Veremos varias técnicas a lo largo del curso. La primera será el uso de equivalencias.

5.2.7 Equivalencias. Principio de sustitución

Definición 5.2.17 Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones verificando que $b_n \neq 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Diremos que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son *equivalentes* si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1.$$

Denotaremos este hecho por

$$a_n \sim b_n \text{ si } n \to \infty$$

Además si

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0,$$

diremos que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son *infinitésimos* equivalentes, y si

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \pm\infty,$$

diremos que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son *infinitos* equivalentes. $\triangleleft$

En la Tabla 5.2 podemos ver algunos infinitésimos equivalentes y en la Tabla 5.3, algunos infinitos equivalentes.

	$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$	
$\operatorname{sen} a_n \sim a_n$	$\tan a_n \sim a_n$	$\operatorname{arc\,sen} a_n \sim a_n$
$1 - \cos a_n \sim (a_n)^2/2$	$\arctan a_n \sim a_n$	$\log(1 + a_n) \sim a_n$
$(1 + a_n)^p - 1 \sim pa_n$	$e^{a_n} - 1 \sim a_n$	$b^{a_n} - 1 \sim a_n \log b$

Tabla 5.2 – Infinitésimos equivalentes.

Proposición 5.2.18 Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $a_n \sim b_n$ si $n \to \infty$. Sea $p \in \mathbb{R}$ de manera que tenga sentido considerar las potencias a_n^p y b_n^p. Entonces

$$a_n^p \sim b_n^p \text{ si } n \to \infty.$$

$\triangleleft$

$b_kn^k + b_{k-1}n^{k-1} + \cdots + b_1n + b_0 \sim b_kn^k,\ (b_k \neq 0)$
$\log(b_kn^k + b_{k-1}n^{k-1} + \cdots + b_1n + b_0) \sim k\log n,\ (b_k > 0)$
$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \sim \log n$
$n! \sim e^{-n}n^n\sqrt{2\pi n}$ (fórmula de Stirling)

Tabla 5.3 – Infinitos equivalentes.

Proposición 5.2.19 Sea $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ y $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión con

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

Entonces se tiene que

$$a_n \sim L \text{ si } n \to \infty,$$

Donde en la anterior expresión interpretamos L como la sucesión constantemente igual a L. ◁

Teorema 5.2.20 [Principio de sustitución]
Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $a_n \sim b_n$ si $n \to \infty$. Sea $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ otra sucesión. Entonces

1) $\lim_{n\to\infty} c_na_n = \lim_{n\to\infty} c_nb_n$.

2) $\lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{b_n}$.

◁

Este resultado, junto con las tablas de infinitos e infinitésimos equivalentes, conducen a la resolución directa de numerosas indeterminaciones.

5.2.8 Órdenes de infinitud

Proposición 5.2.21 Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ con $a, c > 0$ y $b > 1$. Se tiene

1) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^{an}}{b^n} = \infty$,

2) $\lim_{n\to\infty} \frac{b^n}{n^c} = \infty$,

3) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^c}{\log n} = \infty$.

◁

5.3 Series

5.3.1 Introducción

Tratamos de dar sentido al proceso de *sumar infinitos números*

Definición 5.3.1 Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión. Una *serie numérica* es

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots .$$

◁

Nota 5.3.2

1) Los a_n se denominan *términos* de la serie.

2) Una serie puede empezar en un índice distinto de 1:

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$$

◁

Definición 5.3.3 Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie numérica. Llamaremos *sucesión de sumas parciales* de la serie a la sucesión $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ construida así

$$\begin{aligned}
&S_1 = a_1,\\
&S_2 = a_1 + a_2,\\
&\cdots\cdots\\
&S_n = a_1 + \cdots + a_n,\\
&\cdots\cdots
\end{aligned}$$

◁

5.3.1.1 Carácter de una serie

Sean $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie y $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ su sucesión de sumas parciales.
Si

$$\lim_{n\to\infty} S_n \begin{cases} \text{no existe} & \longrightarrow \text{ se dice que la serie es } \textit{oscilante.} \\ = \pm\infty & \longrightarrow \text{ se dice que la serie } \textit{diverge.} \\ = S \in \mathbb{R} & \longrightarrow \text{ se dice que la serie es } \textit{converge.} \end{cases}$$

Estudiar el *carácter* de una serie es estudiar si es convergente, divergente u oscilante. En los casos de divergencia, se suele escribir, según proceda,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty,$$

y se dice que la serie diverge hacia ∞, o bien

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = -\infty,$$

y se dice que la serie diverge hacia $-\infty$.
En el caso de convergencia, se escribe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S,$$

y se dice que la serie converge hacia S. Al valor S se le llama *suma* de la serie.

No olvidemos que para estudiar el carácter de una serie hay que mirar cómo es el límite de su sucesión de sumas parciales, no el de la sucesión de los términos de la serie.

Ejemplo 5.3.4 Consideramos la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n.$$

Su sucesión de sumas parciales es

$$\begin{aligned} &S_1 = -1, \\ &S_2 = -1 + 1 = 0, \\ &S_3 = -1 + 1 - 1 = -1, \\ &S_4 = -1 + 1 - 1 + 1 = 0, \\ &\cdots\cdots \end{aligned}$$

es decir

$$S_n = \begin{cases} -1, & \text{si } n \text{ impar} \\ 0, & \text{si } n \text{ par} \end{cases}$$

Por lo tanto $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no tiene límite y nuestra serie es oscilante. ◁

Ejemplo 5.3.5 [Serie armónica]
La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

recibe el nombre de serie armónica. Su sucesión de sumas parciales es

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \sim \log n \text{ si } n \to \infty.$$

Luego $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \log n = \infty$, por lo que la serie armónica es divergente. ◁

Ejemplo 5.3.6 La sucesión de sumas parciales de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} 0,$$

es

$$\begin{aligned} &S_1 = 0, \\ &S_2 = 0 + 0 = 0, \\ &S_3 = 0 + 0 + 0 = 0, \\ &\dots\dots \\ &S_n = 0 + \cdots + 0 = 0 \\ &\dots\dots \end{aligned}$$

por lo que $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0$, y la serie es convergente y su suma vale 0. ◁

Ejemplo 5.3.7 La sucesión de sumas parciales de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1,$$

es

$$\begin{aligned} &S_1 = 1, \\ &S_2 = 1 + 1 = 2, \\ &S_3 = 1 + 1 + 1 = 3, \\ &\dots\dots \\ &S_n = 1 + \cdots + 1 = n \\ &\dots\dots \end{aligned}$$

por lo que $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$, y la serie diverge. $\triangleleft$

Propiedades 5.3.8

1) El carácter de una serie no cambia si se suprimen o añaden una cantidad finita de términos.

2) La suma de una serie convergente **sí** cambia cuando se suprimen o añaden una cantidad finita de términos.

3) Se verifica

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge } \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0,$$

pero el recíproco no es cierto y la serie armónica sirve de contraejemplo. Por tanto esta propiedad sólo se puede utilizar para ver que una serie no converge. Por ejemplo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{3n^2+2n-1},$$

no puede ser convergente, ya que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{3n^2+2n-1} = \frac{1}{3} \neq 0.$$

$\triangleleft$

Dada una serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, hay dos problemas

1) Estudiar su carácter.

2) Si es convergente, calcular su suma.

Realmente hay muy pocas series convergentes para las que se pueda calcular su suma de manera exacta. A continuación veremos los casos más sencillos en los que se puede efectuar dicho cálculo.

5.3.2 Series sumables

5.3.2.1 Series geométricas

Las series *geométricas* son de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n,$$

donde $a, r \in \mathbb{R}$. Diremos que r es la *razón* de la serie geométrica.
Son convergentes $\Longleftrightarrow |r| < 1$. Además, en este caso, su suma vale

$$\frac{a}{1-r}.$$

Nota 5.3.9 Puede que una serie geométrica no empiece en $n = 0$:

$$\sum_{n=k}^{\infty} ar^n.$$

En este caso, si $|r| < 1$, la suma es

$$\frac{ar^k}{1-r},$$

es decir *el primer término entre 1 menos la razón.* $\triangleleft$

Ejemplo 5.3.10 Sea

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

La razón es $1/2$ y $|1/2| < 1$, luego es convergente y su suma vale

$$\frac{1}{1-1/2} = 2.$$

La suma de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ es

$$\frac{1/2}{1-1/2} = 1.$$

$\triangleleft$

5.3.2.2 Series telescópicas

Se dice que una serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es *telescópica* si existe una sucesión $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$a_n = b_n - b_{n+1}, \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

En este caso, se verifica que la sucesión de sumas parciales es

$$S_n = b_1 - b_{n+1}.$$

Por tanto, para estudiar el carácter de la serie y calcular la suma en caso de convergencia, basta estudiar

$$b_1 - \lim_{n\to\infty} b_{n+1}.$$

Nota 5.3.11 Si el índice no empieza en 1:

$$\sum_{n=k}^{\infty} a_n,$$

el carácter y la posible suma vienen dados por

$$b_k - \lim_{n\to\infty} b_{n+1}.$$

◁

Ejemplo 5.3.12 Para la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)},$$

se tiene que

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

luego la serie es telescópica para $b_n = 1/n$. Entonces

$$b_1 - \lim_{n\to\infty} b_{n+1} = 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 1 - 0 = 1.$$

Así la serie es convergente y su suma vale 1. ◁

5.3.2.3 Series hipergeométricas

Diremos que una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es *hipergeométrica* si existen $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ con $\alpha \neq 0$ tales que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\alpha n + \beta}{\alpha n + \gamma},\ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

La serie hipergeométrica

$$\text{converge} \iff \frac{\gamma - \beta}{\alpha} > 1.$$

En cualquier otro caso, diverge. Cuando converge, la suma vale

$$\frac{\gamma a_1}{\gamma - \alpha - \beta}.$$

Nota 5.3.13 Si la serie hipergeométrica es de la forma

$$\sum_{n=k}^{\infty} a_n,$$

converge en la mismas condiciones que antes, pero en caso de convergencia su suma es

$$\frac{(\gamma+\alpha(k-1))a_k}{\gamma-\alpha-\beta}.$$

◁

Ejemplo 5.3.14 Sea la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\, a^n}{(1+a)(1+2a)\cdots(1+na)}, a \in \mathbb{R}-\{0\}.$$

Se tiene que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\dfrac{(n+1)!\, a^{n+1}}{(1+a)(1+2a)\cdots(1+na)(1+(n+1)a)}}{\dfrac{n!\, a^n}{(1+a)(1+2a)\cdots(1+na)}} = \frac{an+a}{an+(a+1)},$$

por lo que la serie es hipergeométrica para

$$\alpha = a,\ \beta = a,\ \gamma = a+1$$

y por tanto converge si y sólo si

$$\frac{1+a-a}{a} = \frac{1}{a} > 1 \Longleftrightarrow 0 < a < 1.$$

Además en caso de convergencia, la serie suma

$$\frac{(1+a)\dfrac{a}{1+a}}{1-a} = \frac{a}{1-a}.$$

◁

5.3.2.4 Series aritmo-geométricas generalizadas

Las series *aritmo-geométricas generalizadas* son de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n) r^n,$$

donde p es un polinomio con coeficientes reales y $r \in \mathbb{R}$. Convergen si y sólo si $|r| < 1$.
Para sumar estas series se dispone de un proceso algorítmico que ilustramos con un ejemplo.

Ejemplo 5.3.15 Consideramos

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n^2 + n + 1) \frac{1}{3^n}.$$

Tenemos que $p(n) = n^2 + n + 1$ y $r = 1/3$. Como $|r| = 1/3 < 1$, la serie converge. Sea S la suma de la serie. Realizamos el siguiente proceso

$$\begin{array}{lrcccccccccccc}
- & S & = & 1 & + & \frac{7}{9} & + & \frac{13}{27} & + & \frac{21}{81} & + & \cdots & + & (n^2+n+1)\frac{1}{3^n} & + & \cdots \\
 & \frac{1}{3}S & = & & & \frac{1}{3} & + & \frac{7}{27} & + & \frac{13}{81} & + & \cdots & + & (n^2-n+1)\frac{1}{3^n} & + & \cdots \\
\hline
- & S(1-\frac{1}{3}) & = & 1 & + & \frac{4}{9} & + & \frac{6}{27} & + & \frac{8}{81} & + & \cdots & + & 2n\frac{1}{3^n} & + & \cdots \\
 & \frac{1}{3}S(1-\frac{1}{3}) & = & & & \frac{1}{3} & + & \frac{4}{27} & + & \frac{6}{81} & + & \cdots & + & (2n-2)\frac{1}{3^n} & + & \cdots \\
\hline
 & S(1-\frac{1}{3})^2 & = & 1 & + & \frac{1}{9} & + & \frac{2}{27} & + & \frac{2}{81} & + & \cdots & + & \frac{2}{3^n} & + & \cdots
\end{array}$$

El primer miembro de la última igualdad es $(4/9)S$, mientras que en el segundo aparece una serie geométrica que se puede sumar. Así

$$\frac{4}{9}S = 1 + \frac{1}{9} + \sum_{n=3}^{\infty} 2\frac{1}{3^n} = \frac{11}{9},$$

y despejando, tenemos que

$$S = \frac{11}{4}.$$

En general, el proceso de restar la magnitud multiplicada por la razón, se repite tantas veces como grado tenga $p(n)$. En este ejemplo, el grado era dos y por eso se ha hecho el proceso dos veces. Al final, siempre queda en el segundo miembro una serie geométrica que se puede sumar, salvo quizá los primeros términos que hay que sumar por separado. ◁

A continuación veremos criterios que nos permiten estudiar el carácter de algunas series sin necesidad de recurrir su sucesión de sumas parciales ni al cálculo de la suma en los casos convergentes.

5.3.3 Criterios de convergencia

5.3.3.1 Series de términos positivos

Definición 5.3.16 Diremos que una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es de *términos positivos* si $a_n \geq 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. ◁

Proposición 5.3.17 Una serie de términos positivos, o converge o diverge a ∞. ◁

5.3.3.1.1 Serie armónica generalizada

La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}},\ \alpha \in \mathbb{R},$$

se llama *serie armónica generalizada*. Se tiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \begin{cases} \text{converge,} & \text{si } \alpha > 1 \\ \text{diverge,} & \text{si } \alpha \leq 1 \end{cases}$$

5.3.3.1.2 Criterio de la mayorante (Gauß)

Sean $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ dos series de términos positivos con $0 \leq a_n \leq b_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Se tiene que

1) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge $\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

2) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge $\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge.

Ejemplo 5.3.18 La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \operatorname{sen}^2 n}{\sqrt{n}},$$

es de términos positivos. Se tiene que

$$1 \leq 1 + \operatorname{sen}^2 n \Longrightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{1 + \operatorname{sen}^2 n}{\sqrt{n}},\ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Pero
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}},$$
diverge, por ser la serie armónica generalizada para $\alpha = 1/2$, luego por el criterio de la mayorante, la serie considerada diverge también. $\triangleleft$

5.3.3.1.3 Criterio de comparación por paso al límite

Sean $a_n \geq 0$, $b_n > 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Si
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L \begin{cases} \text{Si } L \neq 0 \text{ y } L \neq \infty & \Longrightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ tienen el mismo carácter} \\ \text{Si } L = 0 \text{ y } \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ converge} & \Longrightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge} \\ \text{Si } L = \infty \text{ y } \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ diverge} & \Longrightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ diverge} \end{cases}$$
En cualquier otro caso, este criterio no aporta ninguna información. Cuando este criterio se combina con la serie armónica generalizada se tiene el siguiente.

5.3.3.1.4 Criterio de Pringsheim

Sea $a_n \geq 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Si existe $\alpha \in \mathbb{R}$ con
$$\lim_{n\to\infty} n^{\alpha} a_n = L \begin{cases} \text{Si } L \neq 0, L \neq \infty \text{ y } \begin{cases} \alpha \leq 1 \Longrightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ diverge} \\ \alpha > 1 \Longrightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge} \end{cases} \\ \text{Si } L = 0 \text{ y } \alpha > 1 \Longrightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge} \\ \text{Si } L = \infty \text{ y } \alpha \leq 1 \Longrightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ diverge} \end{cases}$$
En cualquier otro caso no se tiene información.

Ejemplo 5.3.19 La serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 + 2n^2 + 3},$$
es de términos positivos. Calculemos
$$\lim_{n\to\infty} n^{\alpha} \frac{1}{n^3 + 2n^2 + 3} = \lim_{n\to\infty} n^{\alpha-3}.$$

Tomando $\alpha = 3 > 1$, el límite anterior se convierte en

$$\lim_{n\to\infty} 1 = 1,$$

y por el criterio de Pringsheim, la serie converge. $\triangleleft$

5.3.3.1.5 Criterio de la raíz (Cauchy-Hadamard)

Supongamos que $a_n \geq 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Si existe

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L \begin{cases} \text{Si } L < 1 & \Longrightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge} \\ \text{Si } L > 1 & \Longrightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ diverge} \end{cases}$$

Si $L = 1$ no se sabe nada.

Ejemplo 5.3.20 La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n+3}\right)^{n^2}$$

es de términos positivos. Tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{n+3}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n+3}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty} e^{n \log \frac{n+1}{n+3}} = e^{-2} < 1.$$

Por lo tanto la serie converge. $\triangleleft$

5.3.3.1.6 Criterio del cociente (D'Alambert)

Supongamos que $a_n > 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Si existe

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L \begin{cases} \text{Si } L < 1 & \Longrightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge} \\ \text{Si } L > 1 & \Longrightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ diverge} \end{cases}$$

Si $L = 1$ no se sabe nada.

Ejemplo 5.3.21 La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{(2n)!}$$

es de términos positivos. Tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3^{n+1}(n+1)!}{(2(n+1))!}}{\frac{3^n n!}{(2n)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3(n+1)}{(2n+1)(2n+2)} = 0 < 1.$$

Por lo tanto la serie converge. ◁

Nota 5.3.22

1) No es necesario que todos los términos de la serie sean positivos para poder aplicar los criterios anteriores. Basta con que lo sean a partir de un término en adelante.

2) Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es de términos negativos, se tiene que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = -\sum_{n=1}^{\infty} -a_n,$$

y ésta última es de términos positivos, por lo que se le pueden aplicar todos los criterios anteriores. Su carácter es el mismo que el de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

◁

5.3.3.2 Series de términos positivos y negativos

Definición 5.3.23 Se dice que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es *absolutamente convergente* si $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ es convergente. ◁

Proposición 5.3.24 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutamente convergente $\Longrightarrow$ es convergente. ◁

Nota 5.3.25 El recíproco del resultado anterior no es cierto, por lo cual sólo se puede usar para probar que una serie converge, nunca para probar que no converge. ◁

Ejemplo 5.3.26 Sea la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{2^n}.$$

Tenemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{2^n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n},$$

que converge por ser geométrica de razón $1/2$. Por tanto la serie original converge absolutamente, luego converge. ◁

Proposición 5.3.27 [Criterio de Leibniz]
Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ verificando

1) $a_n \geq 0,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$.

2) $a_1 \geq a_2 \geq \cdots$.

3) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Entonces la serie (llamada *alternada*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ converge. ◁

Ejemplo 5.3.28 La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n},$$

verifica todas las condiciones del criterio de Leibniz, luego converge. Obsérvese que, sin embargo, no es absolutamente convergente, pues la serie de los valores absolutos es la serie armónica. ◁

5.4 Ejercicios

5.4.1 Sucesiones

Ejercicio 5.1 Calcular

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+3}$$

Ejercicio 5.2 Calcular

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$$

Ejercicio 5.3 Calcular

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$$

Ejercicio 5.4 Calcular

$$\lim_{n\to\infty} S_n,$$

donde

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+2n+1}}$$

Ejercicio 5.5 Calcular

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(3n^2+1)(1-\cos(1/n))}{(n^2-2)\log(1+1/n^2)}$$

Ejercicio 5.6 Calcular

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[4]{n+3}-\sqrt[4]{n+5}}{\sqrt[3]{n+3}-\sqrt[3]{n+5}} \sqrt[12]{n-1}$$

Ejercicio 5.7 Calcular

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[3n]{n^3-1}$$

Ejercicio 5.8 Calcular

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{(n+1)^2}{n} - \frac{n^3}{(n-1)^2}\right)$$

Ejercicio 5.9 Calcular

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n-3}{2n+4}\right)^n$$

Ejercicio 5.10 Calcular

$$\lim_{n\to\infty} \log(1+|x|^n),\ x\in\mathbb{R}$$

Ejercicio 5.11 Calcular

$$\lim_{n\to\infty} nx(1-x)^n,\ 0\le x\le 1$$

5.4.2 Series

Ejercicio 5.12 Estudiar el carácter de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{sen}(a/n),\ a \in \mathbb{R}$$

Ejercicio 5.13 Estudiar el carácter de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n}{1+n^2}$$

Ejercicio 5.14 Calcular el límite de la sucesión

$$\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \ldots$$

Ejercicio 5.15 Estudiar el carácter y sumar en caso de convergencia

$$\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2^n}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{3x}{2^n}\right),\ x \in \mathbb{R}$$

Ejercicio 5.16 Estudiar el carácter y sumar en caso de convergencia

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{6^n}$$

Ejercicio 5.17 Estudiar el carácter de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{(4n-1)^2-1},\ a \in \mathbb{R}$$

Ejercicio 5.18 Estudiar la convergencia y la convergencia absoluta de

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(\log n)\right)$$

Ejercicio 5.19 Estudiar la convergencia de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n^2},\ x \in \mathbb{R}$$

Parte II

Álgebra lineal

Capítulo 6

Matrices de números reales

6.1 Generalidades

Definición 6.1.1 Sean $n, m \in \mathbb{N}$. Una *matriz* de orden $n \times m$ es una disposición rectangular ordenada de nm números reales en n filas (líneas horizontales) y m columnas (líneas verticales). Tal disposición se suele rodear con paréntesis o corchetes. $\triangleleft$

Ejemplo 6.1.2 Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 12 & -4 & 27 & 0 \\ 2 & -3 & 31 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

A es una matriz de orden 3×5, o simplemente una matriz 3×5 o una matriz con 3 filas y 5 columnas. $\triangleleft$

Ejemplo 6.1.3 Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 7 \\ 2 & 0 \\ -1 & 8 \end{pmatrix}.$$

A es una matriz 4×2. $\triangleleft$

Ejemplo 6.1.4 Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

A es una matriz 3×3. $\triangleleft$

Normalmente denotaremos con letras mayúsculas a las matrices. Cuando no esté claro cuál es el orden de una matriz, cuando lo queramos resaltar o cuando sea genérico, podemos ponerlo como subíndice de la matriz. Así, para decir que A es una matriz 3×4, escribiremos

$$\mathsf{A}_{3\times 4}.$$

A las filas y columnas de una matriz, las llamaremos *líneas* en general. Las columnas de una matriz se numeran de izquierda a derecha y las filas de arriba abajo. De esta manera, podemos especificar cualquier elemento de una matriz con un par de números naturales, el primero indicando la fila en la que está y el segundo la columna. Por ejemplo, en la siguiente matriz, vamos a rodear con un cuadrado el elemento $2, 3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & \boxed{1} & 3 \\ -3 & 6 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{5\times 4}.$$

Nótese que hemos indicado el orden de la matriz como subíndice para resaltar que es una matriz 5×4. Cuando representamos una matriz con una letra mayúscula, se suele denotar a sus elementos con la letra minúscula correspondiente con dos subíndices. El primer subíndice indica la fila a la que pertenece el elemento y el segundo la columna. Así, si llamamos A a la matriz anterior

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ -3 & 6 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

diremos por ejemplo que $a_{23} = 1$ o que $a_{31} = -3$.

Cuando los elementos de una matriz sean desconocidos o genéricos, podremos usar también ciertas adaptaciones de las notaciones anteriores. Por ejemplo, para denotar a una matriz A de orden 3×4 genérica, podremos poner cualquiera de las siguientes notaciones

$$\mathsf{A}_{3\times 4} = \big(a_{ij}\big)_{3\times 4} = \big(a_{ij}\big)_{\substack{i=1,\dots,3 \\ j=1,\dots,4}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}.$$

También pueden emplearse matrices de orden genérico. Por ejemplo, si $n, m \in \mathbb{N}$, podemos expresar que A es una matriz de orden $n \times m$ de las siguientes maneras:

$$\mathsf{A}_{n\times m} = \big(a_{ij}\big)_{n\times m} = \big(a_{ij}\big)_{\substack{i=1,\ldots,n\\ j=1,\ldots,m}} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

6.2 Tipos de matrices

Algunas matrices, debido a ciertas características especiales de su orden o a la disposición de sus elementos, reciben nombres especiales.

Definición 6.2.1 Una matriz de orden $1 \times n$, es decir que sólo tiene una fila, se llama *matriz fila*. Del mismo modo, una matriz de orden $n \times 1$, es decir que sólo tiene una columna, se llama *matriz columna*. $\triangleleft$

En el Capítulo 8 identificaremos estos tipos de matrices con otros objetos que llamaremos *vectores*.

Ejemplo 6.2.2 La matrices siguientes son matrices fila

$$\begin{pmatrix} 0 & 9 & -2 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}_{1\times 7}.$$

Las siguientes son matrices columna

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ \vdots \\ 2 \end{pmatrix}_{1\times 5}.$$

$\triangleleft$

Dada una matriz $\mathsf{A}_{n\times m}$ sus *filas* son las n matrices fila que se pueden construir con cada una de las filas de A. Sus *columnas* son las m matrices columna que se pueden construir con cada una de las columnas de A.

Ejemplo 6.2.3 Sea

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 12 & -4 & 27 & 0 \\ 2 & -3 & 31 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

La primera fila de A es

$$\begin{pmatrix} 1 & 12 & -4 & 27 & 0 \end{pmatrix}.$$

La segunda fila de A es

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 31 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La tercera fila de A es
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$
Las columnas primera, segunda, tercera, cuarta y quinta de A, son
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 12 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -4 \\ 31 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 27 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix},$$
en el orden en que están escritas. ◁

Obsérvese que el elemento j de la fila i de una matriz es el elemento i, j de la matriz, y que el elemento j de la columna i es su elemento j, i.

Definición 6.2.4 Una *matriz constante* es aquella cuyos elementos son todos iguales entre si. Si λ es un número real, la matriz constante de orden $n \times m$ tal que todos sus elementos son iguales a λ, suele representarse como
$$\left(\lambda\right)_{n\times m}.$$
◁

Ejemplo 6.2.5 La matriz 3×2 constantemente igual a 4, se puede representar
$$\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} = \left(4\right)_{3\times 2}.$$
La matriz $n \times m$ constantemente igual a -1, se puede representar como
$$\begin{pmatrix} -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & & \vdots \\ -1 & \cdots & -1 \end{pmatrix}_{n\times m} = \left(-1\right)_{n\times m}.$$
◁

Definición 6.2.6 La *matriz nula* o *matriz cero* de orden $n \times m$ es la única matriz $n \times m$ constantemente igual a cero. Según lo anterior, suele representarse con el símbolo
$$\left(0\right)_{n\times m}.$$
◁

6.2.1 Matrices cuadradas

Definición 6.2.7 Una matriz de orden $n \times n$, es decir con el mismo número de filas que de columnas, se dice que es una *matriz cuadrada*. Si una matriz es cuadrada de orden $n \times n$, diremos más brevemente que es de *orden* n. ◁

Las matrices cuadradas tienen una importancia destacada y por ello merecen que les dediquemos una atención especial

Definición 6.2.8 Si $\mathsf{A} = \left(a_{ij}\right)_{n\times n}$ es una matriz cuadrada de orden n, la *diagonal principal* (o simplemente la *diagonal*) de A es

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{22} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

◁

Ejemplo 6.2.9 En la siguiente matriz 4×4, marcamos con un recuadro los elementos de su diagonal

$$\begin{pmatrix} \boxed{0} & 3 & 1 & 4 \\ 1 & \boxed{3} & 6 & 1 \\ 3 & 2 & \boxed{1} & 0 \\ 4 & 5 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix},$$

y su diagonal es por tanto

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

◁

A la luz del ejemplo anterior vemos la razón por la que se da tal nombre a la diagonal de una matriz. Sus elementos son los que aparecen sobre una de las diagonales del *cuadrado* que representa la *forma* de la matriz.

Definición 6.2.10 Sea $\mathsf{A} = \left(a_{ij}\right)_{n\times n}$ una matriz cuadrada de orden n.

1) Llamaremos *elementos diagonales* de A a los elementos a_{ij} tales que $i = j$ es decir, a los elementos de su diagonal.

2) Diremos que la diagonal de A es *constante* si todos sus elementos diagonales son iguales.

3) Diremos que la diagonal de A es *nula* si todos sus elementos diagonales son cero.

4) Llamaremos *traza* de A y la denotaremos por $\operatorname{tr} \mathsf{A}$, a la suma de los elementos de la diagonal de A.

5) Diremos que un elemento a_{ij} de A *está por encima de la diagonal* de A si $i < j$.

6) Diremos que un elemento a_{ij} de A *está por debajo de la diagonal* de A si $i > j$.

◁

Ejemplo 6.2.11 En la siguiente matriz, recuadramos aquellos elementos que están por encima de la diagonal de A

$$\begin{pmatrix} 0 & \boxed{3} & \boxed{1} & \boxed{4} \\ 1 & 3 & \boxed{6} & \boxed{1} \\ 3 & 2 & 1 & \boxed{0} \\ 4 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

En la siguiente matriz, recuadramos aquellos elementos que están por debajo de la diagonal de A

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 4 \\ \boxed{1} & 3 & 6 & 1 \\ \boxed{3} & \boxed{2} & 1 & 0 \\ \boxed{4} & \boxed{5} & \boxed{0} & 1 \end{pmatrix},$$

◁

Hay distintos tipos de matrices cuadradas que merecen ser destacados.

Definición 6.2.12 Sea A una matriz cuadrada de orden n.

1) Se dice que A es *triangular superior* si todos sus elementos por debajo de la diagonal son cero.

2) Se dice que A esi *triangular inferior* si todos sus elementos por encima de la diagonal son cero.

◁

Una *matriz triangular* es aquella que es triangular superior o triangular superior.

Ejemplo 6.2.13 La siguiente matriz es triangular superior

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

La siguiente matriz es triangular inferior

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 5 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 9 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$\triangleleft$

Definición 6.2.14 Se dice que una matriz cuadrada es una *matriz diagonal* si todos sus elementos no diagonales son cero. $\triangleleft$

Observemos que cada elemento diagonal de una matriz diagonal pueden ser cero o no. Es interesante también pensar que una matriz es diagonal si y solo si es triangular inferior y superior simultáneamente

Ejemplo 6.2.15 Las siguientes matrices son diagonales

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

$\triangleleft$

Definición 6.2.16 Una *matriz escalar* es una matriz diagonal con diagonal constante. $\triangleleft$

Ejemplo 6.2.17 Las siguientes matrices son escalares

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

$\triangleleft$

Definición 6.2.18 La *matriz identidad* de orden n es la matriz escalar de orden n que tiene 1 en la diagonal principal. La denotaremos por I_n. $\triangleleft$

Ejemplo 6.2.19

$$\mathrm{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{I}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\triangleleft$

Definición 6.2.20 Diremos que una matriz cuadrada $\mathsf{A} = \left(a_{ij}\right)_{n\times n}$ es *simétrica* si $a_{ij} = a_{ji}$, para cada $i = 1, \ldots, n$ y $j = 1, \ldots, n$. $\triangleleft$

Lo que quiere decir esta definición, es que una matriz simétrica, presenta *simetría* respecto de la diagonal principal. Es decir, que si *doblásemos* la matriz por su diagonal, las posiciones de la matriz que quedasen *juntas* contendrían exactamente los mismos valores. Notemos que los elementos de la diagonal de una matriz simétrica no tienen por qué verificar ninguna condición específica.

Ejemplo 6.2.21 Las siguientes matrices son simétricas

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & -6 \\ 1 & 4 & 2 & 7 \\ 2 & -6 & 7 & 9 \end{pmatrix}.$$

$\triangleleft$

Definición 6.2.22 Diremos que una matriz cuadrada $\mathsf{A} = \left(a_{ij}\right)_{n\times n}$ es *antisimétrica* si $a_{ij} = -a_{ji}$, para cada $i = 1, \ldots, n$ y $j = 1, \ldots, n$. $\triangleleft$

Si *doblásemos* la matriz por su diagonal, las posiciones de la matriz que quedasen *juntas* contendrían los mismos valores pero cambiados de signo. Los elementos diagonales de una matriz antisimétrica deben ser cero.

Ejemplo 6.2.23 Las siguientes matrices son antisimétricas

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ -3 & 0 & 1 \\ -5 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 4 & -6 \\ -1 & -4 & 0 & 7 \\ -2 & 6 & -7 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\triangleleft$

6.3 Submatrices

Dada una matriz, es posible construir otras matrices más pequeñas tomando algunas filas y columnas de ella.

Definición 6.3.1 Sea $\mathsf{A} = \left(a_{ij}\right)_{n\times m}$. Si tomamos k índices de fila verificando

$$1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n,$$

y h índices de columna tales que

$$1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_h \leq m,$$

podemos formar la siguiente matriz de orden $k \times h$

$$\begin{pmatrix} a_{i_1j_1} & a_{i_1j_2} & \dots & a_{i_1j_h} \\ a_{i_2j_1} & a_{i_2j_2} & \dots & a_{i_2j_h} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i_kj_1} & a_{i_kj_2} & \dots & a_{i_kj_h} \end{pmatrix}_{k\times h}.$$

Dicha matriz se llama *submatriz* de A que se obtiene tomando o fijando las k filas $i_1, \dots, i_k$ y las h columnas $j_1, \dots, j_h$ de la matriz A. ◁

Cuando se construye una submatriz de una matriz dada, lo importante es tomar sólo los elementos que están simultáneamente en las filas y las columnas fijadas, y además con la misma ordenación que tenían en la matriz original.

Ejemplo 6.3.2 Sea

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 9 & 45 & 3 & 0 & 78 & -5 & -27 \\ 5 & 4 & 0 & 28 & -80 & 8 & 27 & 32 \\ 7 & 22 & 12 & -36 & 55 & 7 & -6 & 73 \\ 25 & -65 & 8 & 4 & 88 & -75 & 34 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & -83 & 0 & 32 & 12 & 3 \\ 3 & 5 & 100 & 87 & -2 & 12 & 23 & 4 \end{pmatrix}.$$

La submatriz de A que se obtiene fijando las columnas 3 y 7 y las filas 1, 4 y 5 de A es

$$\begin{pmatrix} 45 & -5 \\ 8 & 34 \\ 3 & 12 \end{pmatrix}.$$

La submatriz que se obtiene fijando las columnas 2, 4, 5 y 8 y las filas 2 4 y 6 es

$$\begin{pmatrix} 4 & 28 & -80 & 32 \\ -65 & 4 & 88 & -2 \\ 5 & 87 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

◁

Tengamos en cuenta que cualquier submatriz de una matriz dada es también una matriz y que una matriz es una submatriz de sí misma.

6.3.1 Bloques

Un tipo especial de submatrices que tiene cierta importancia son los /bloque, de una matriz]bloques, llamados también *cajas* en ciertos contextos.

Definición 6.3.3 Un *bloque* de una matriz es una submatriz en la que las filas seleccionadas son contiguas y las columnas seleccionadas son también contiguas. ◁

Ejemplo 6.3.4 En la siguiente matriz mostramos recuadrado el bloque consistente en tomar las filas 2 a 4 y las columnas 4 a 7

$$
\mathsf{A} = \left(\begin{array}{rrr|rrrr|r}
\cline{4-7}
-1 & 9 & 45 & 3 & 0 & 78 & -5 & -27 \\
5 & 4 & 0 & 28 & -80 & 8 & 27 & 32 \\
7 & 22 & 12 & -36 & 55 & 7 & -6 & 73 \\
25 & -65 & 8 & 4 & 88 & -75 & 34 & -2 \\
\cline{4-7}
0 & 1 & 3 & -83 & 0 & 32 & 12 & 3 \\
3 & 5 & 100 & 87 & -2 & 12 & 23 & 4
\end{array}\right).
$$

Dicho bloque es por tanto

$$
\begin{pmatrix}
28 & -80 & 8 & 27 \\
-36 & 55 & 7 & -6 \\
4 & 88 & -75 & 34
\end{pmatrix}.
$$

◁

A veces es útil dividir una matriz en bloques disjuntos. Esto se suele indicar trazando una serie se líneas entre las filas y las columnas donde se produce tal división.

Ejemplo 6.3.5

$$
\mathsf{A} = \left(\begin{array}{rrrrr|rrr}
-1 & 9 & 45 & 3 & 0 & 78 & -5 & -27 \\
5 & 4 & 0 & 28 & -80 & 8 & 27 & 32 \\
\hline
7 & 22 & 12 & -36 & 55 & 7 & -6 & 73 \\
25 & -65 & 8 & 4 & 88 & -75 & 34 & -2 \\
0 & 1 & 3 & -83 & 0 & 32 & 12 & 3 \\
\hline
3 & 5 & 100 & 87 & -2 & 12 & 23 & 4
\end{array}\right).
$$

Los bloques en los que se ha dividido esta matriz son

$$\begin{pmatrix} -1 & 9 & 45 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & 0 & 28 & -80 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 78 & -5 & -27 \\ 8 & 27 & 32 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 7 & 22 & 12 & -36 & 55 \\ 25 & -65 & 8 & 4 & 88 \\ 0 & 1 & 3 & -83 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 7 & -6 & 73 \\ -75 & 34 & -2 \\ 32 & 12 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 100 & 87 & -2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 12 & 23 & 4 \end{pmatrix}.$$

◁

Cuando se dispone de unas cuantas matrices de *órdenes compatibles*, también se puede a veces formar una matriz más grande utilizando aquéllas como bloques.

Ejemplo 6.3.6 Sean las matrices

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \mathsf{B} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix},$$

$$\mathsf{C} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathsf{D} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Con ellas podemos formar la siguiente matriz *por bloques*

$$\mathsf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & 3 & 5 \\ -1 & 1 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix},$$

Diremos de E que se ha obtenido a partir de los bloques A, B, C y D. Separemos los bloques de E para mayor claridad

$$\mathsf{E} = \left(\begin{array}{rr|rrr} 1 & 0 & 5 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & 3 & 5 \\ \hline -1 & 1 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 6 & 7 & 8 \end{array}\right).$$

En ocasiones puede ser útil representar tal E mediante la notación

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathsf{A} & \mathsf{B} \\ \hline \mathsf{C} & \mathsf{D} \end{array}\right).$$

◁

6.3.2 Matrices diagonales por bloques

Definición 6.3.7 Se dice que una matriz cuadrada A de orden n es *diagonal por bloques*, si es posible extraer una cantidad de bloques cuadrados y disjuntos de ella, de manera que un elemento de A está en la diagonal de A si y sólo si es un elemento diagonal de alguno de dichos bloques y además los elementos de A que no están en ninguno de esos bloques son 0. ◁

Ejemplo 6.3.8 La siguiente matriz es diagonal por bloques

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para resaltar esta característica, las matrices diagonales por bloques suelen representarse enmarcando los bloques diagonales como sigue

$$\left(\begin{array}{c|ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Conviene que apreciemos que la manera de dividir una matriz en bloques diagonales no tiene por qué ser única. Así la matriz anterior podría dividirse de la siguiente forma

$$\left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Lo que ocurre es que cuando hablamos de matrices diagonales por bloques se suele entender que los bloques diagonales se toman lo más pequeños posible. ◁

6.4 Operaciones matriciales

Una matriz puede servir para almacenar una cantidad finita de información discreta con una organización bidimensional. Esencialmente es la misma función que cumple una tabla de doble entrada. La utilidad de las matrices sería escasa si sólo sirvieran como almacén. Lo que las hace interesantes es que se pueden formular reglas precisas para transformar dicha información, o incluso la información que contienen puede ser utilizada para transformar otras matrices En esta disciplina de Álgebra Lineal, no nos interesa realizar operaciones arbitrarias con las matrices, sino algunas específicas que trataremos de ir exponiendo.

6.4.1 Aritmética

Por el momento disponemos de dos tipos de objetos. De un lado los números reales y de otro las matrices de números reales. En lo que sigue llamaremos a menudo *escalares* a los números reales. Un escalar es un objeto esencialmente *univaluado*, mientras una matriz es un objeto *multivaluado*. Eso si exceptuamos las matrices de orden 1×1. No obstante aunque un escalar contenga esencialmente la misma información que una matriz 1×1, obsérvese que son entidades distintas.

En lo que sigue vamos a definir una aritmética para escalares y matrices y para ciertos tipos de matrices que podrán interactuar entre si.

6.4.1.1 Producto por escalares

La primera operación que vamos a ver es el producto de un escalar por una matriz.

Definición 6.4.1 Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ y $\mathsf{A} = \left(a_{ij}\right)_{n\times m}$. El *producto* de λ por A es la matriz $n \times m$ que se obtiene al multiplicar cada elemento de la matriz A por λ, es decir

$$\lambda\mathsf{A} = \left(\lambda a_{ij}\right)_{n\times m}.$$

$\triangleleft$

Ejemplo 6.4.2 Sea

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 8 & 4 & -5 & -5 & 3 & -5 & 8 \\ 5 & -1 & 0 & 3 & -4 & -5 & -2 \\ -1 & -9 & 5 & 8 & 4 & -3 & 8 \end{pmatrix}.$$

Se tiene que

$$7\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 56 & 28 & -35 & -35 & 21 & -35 & 56 \\ 35 & -7 & 0 & 21 & -28 & -35 & -14 \\ -7 & -63 & 35 & 56 & 28 & -21 & 56 \end{pmatrix}.$$

Si

$$\mathsf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 9 & 8 & 3 & -2 & 6 \\ -1 & -1 & 8 & 4 & 2 \\ 5 & 8 & 9 & 2 & 1 \\ 7 & 3 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix},$$

entonces

$$-3\mathsf{B} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -3 & 0 & -9 \\ -27 & -24 & -9 & 6 & -18 \\ 3 & 3 & -24 & -12 & -6 \\ -15 & -24 & -27 & -6 & -3 \\ -21 & -9 & -3 & -9 & 3 \end{pmatrix}.$$

◁

Si λ es un escalar y A una matriz, es lo mismo escribir $\lambda\mathsf{A}$ que $\mathsf{A}\lambda$.

Obsérvese que si multiplicamos 0 por cualquier matriz, obtenemos la matriz nula del mismo orden.

6.4.1.2 Suma

La siguiente operación que definiremos es la suma de matrices.

Definición 6.4.3 Sean $\mathsf{A} = \left(a_{ij}\right)_{n\times m}$ y $\mathsf{B} = \left(b_{ij}\right)_{n\times m}$ dos matrices del mismo orden. La matriz suma de A y de B es otra matriz $n \times m$ que se obtiene sumando cada elemento de A con aquél de B que ocupa la misma posición. Es decir

$$\mathsf{A} + \mathsf{B} = \left(a_{ij} + b_{ij}\right)_{n\times m}.$$

◁

Ejemplo 6.4.4 Sean

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 8 & -3 & 7 & 1 & 0 & -2 & 5 & 1 \\ 7 & 9 & 9 & 2 & 4 & -2 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & 1 & 4 & 1 & 8 & -1 & -3 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 5 & -2 & 6 & 6 & -1 & -2 & 7 \\ 5 & 7 & -2 & 0 & 1 & 0 & 7 & 7 & 4 \\ 5 & 5 & 0 & 1 & 2 & 0 & -2 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & -3 & 6 & -1 & 5 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

y

$$\mathsf{B} = \begin{pmatrix} 9 & -2 & 2 & 1 & 2 & 5 & 2 & 4 & 5 \\ -2 & 4 & 0 & -1 & 5 & 3 & 8 & 0 & 0 \\ -1 & 9 & 0 & 2 & 2 & 2 & 0 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & -3 & 0 & 8 & 3 & 7 & 2 \\ 4 & 8 & 5 & 0 & 6 & -1 & 5 & 6 & -3 \\ 7 & 1 & 2 & 5 & 1 & -1 & 5 & 9 & 6 \\ 7 & 1 & 8 & -1 & 1 & -1 & 6 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

entonces

$$\mathsf{A}+\mathsf{B}=\begin{pmatrix} 11 & 6 & -1 & 8 & 3 & 5 & 0 & 9 & 6 \\ 5 & 13 & 9 & 1 & 9 & 1 & 8 & 5 & -3 \\ 3 & 10 & 4 & 3 & 10 & 1 & -3 & 12 & 11 \\ 3 & 8 & 4 & -5 & 6 & 14 & 2 & 5 & 9 \\ 9 & 15 & 3 & 0 & 7 & -1 & 12 & 13 & 1 \\ 12 & 6 & 2 & 6 & 3 & -1 & 3 & 12 & 8 \\ 9 & 7 & 5 & 5 & 0 & 4 & 7 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

◁

Es importante tener siempre en mente que sólo se pueden sumar matrices que tengan el mismo orden. Además si a una matriz dada le sumamos la matriz nula del mismo orden, la matriz no cambia. Por tanto la matriz nula de cada orden, se comporta para la suma de matrices como el número 0 para la suma de números reales.

6.4.1.3 Combinaciones lineales

Dadas todas las matrices de una misma dimensión, pongamos $n \times m$, podemos tomar una cantidad finita de ellas y una cantidad finita de escalares y construir una fórmula en la que aparezcan sólo operaciones de alguno de los dos tipos anteriores, así como operaciones entre los propios escalares. Tales expresiones serán llamadas *expresiones lineales*

Ejemplo 6.4.5 Sean A, B, C y D matrices $n \times m$ y sean λ, μ, ν, α y β escalares. Podemos formar con las dos operaciones definidas hasta el momento fórmulas como la siguiente

$$((\alpha+\beta)\mathsf{A}-\beta(\mathsf{A}+\mathsf{C}+\mathsf{D}))\nu-(\mathsf{C}-\mu^2\mathsf{D})(\lambda-\nu)+\mathsf{B}.$$

Este tipo de fórmulas lineales pueden ser simplificadas utilizando las mismas leyes que las que sirven para fórmulas de números reales, pues el producto de un escalar por una matriz y la suma de matrices verifican las mismas propiedades básicas que el producto y la suma de números reales. Así por ejemplo, la fórmula anterior puede acabarse escribiendo después de ciertas manipulaciones como

$$\alpha\nu\mathsf{A}+\mathsf{B}+(-\lambda+\nu(1-\beta))\mathsf{C}+(-\nu(\beta+\mu^2)+\lambda\mu^2)\mathsf{D}.$$

Escrita en esta forma, la expresión recibe el nombre de *combinación lineal* de las matrices $(\mathsf{A},\mathsf{B},\mathsf{C},\mathsf{D})$, con matriz de escalares

$$\begin{pmatrix} \alpha\nu & 1 & -\lambda+\nu(1-\beta) & -\nu(\beta+\mu^2)+\lambda\mu^2 \end{pmatrix}.$$

◁

Las *combinaciones lineales* son esenciales en la materia que se estudia aquí. En lo que se refiere a las matrices podemos interpretar las dos operaciones que proporcionan la *linealidad* como mecanismos que transforman y/o combinan el contenido de una o varias matrices.

Aunque a partir del ejemplo anterior es sencillo deducir qué es una una *combinación lineal* de matrices en general, escribiremos a continuación su definición formal.

Definición 6.4.6 Sean $\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \ldots, \mathsf{A}_k$ matrices $n \times m$ y $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ escalares. Llamaremos *combinación lineal* de las matrices $\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \ldots, \mathsf{A}_k$ con matriz de coeficientes

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_k \end{pmatrix},$$

a la expresión

$$\lambda_1 \mathsf{A}_1 + \lambda_2 \mathsf{A}_2 + \cdots + \lambda_k \mathsf{A}_k = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mathsf{A}_i.$$

$\triangleleft$

Observemos que después de operar, una combinación lineal de matrices $n \times m$ proporciona otra matriz $n \times m$.

6.4.1.4 Producto

La siguiente operación que estudiaremos es la multiplicación de matrices. Su naturaleza es mucho menos intuitiva que la de las operaciones anteriores, y quizá debiéramos entenderla como una operación que sirve para transformar una matriz siguiendo unas reglas que están codificadas en la otra matriz. No seremos capaces de entender el alcance de esta afirmación hasta más adelante.

Definición 6.4.7 El *producto* de una matriz fila de orden $1 \times n$

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix},$$

por una matriz columna de orden $n \times 1$

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

es una matriz de orden 1×1 dada por

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \right).$$

◁

Ejemplo 6.4.8

$$\begin{pmatrix}3 & 4 & -2 & 2 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\-1\\3\\0\\-2\\-1\end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix}3\cdot 0 + 4\cdot(-1) - 2\cdot 3 + 2\cdot 0 - 1\cdot 2 - 1\cdot 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-13\end{pmatrix}.$$

◁

Nótese que para multiplicar una matriz fila por una matriz columna ambas tienen que tener la misma longitud, si no el producto no está definido.

Definición 6.4.9 Sean $\mathsf{A} = \left(a_{ij}\right)_{n\times m}$ y $\mathsf{B} = \left(b_{ij}\right)_{m\times p}$ dos matrices. La *matriz producto* de A por B es una matriz $\mathsf{C} = \left(c_{ij}\right)_{n\times p}$ cuyo elemento c_{ij} es el único elemento de la matriz 1×1 resultante de multiplicar la fila i de A con la columna j de B. Es decir, que si

$$\mathsf{C} = \mathsf{AB},$$

entonces

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}.$$

◁

Nota 6.4.10 Para que el producto de dos matrices esté definido el número de columnas del primer factor ha de ser igual al número de filas del segundo. ◁

Ejemplo 6.4.11 Vamos a presentar varios productos de matrices que el lector deberá comprobar de acuerdo con las definiciones

$$\begin{pmatrix}5 & 6\\7 & 3\\4 & -9\\2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 5 & -7\\-5 & 8 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-40 & 73 & -17\\-29 & 59 & -40\\37 & -52 & -55\\1 & 2 & -17\end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 7 & 3 & -5 \\ 6 & -4 & 5 & 2 \\ 6 & -7 & 9 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & -3 & -7 & -1 \\ -9 & 9 & 1 & 3 \\ 7 & -5 & 0 & -7 \\ -6 & -9 & -7 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -8 & 96 & 49 & -9 \\ 35 & -97 & -60 & -49 \\ 84 & -153 & -70 & -84 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 1 & -5 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 7 \\ 6 & 5 & -1 \\ 2 & -5 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 4 & 30 \\ -23 & -13 & 3 \\ -43 & 18 & 68 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} -7/4 & 7/4 & -5/4 & 2/5 \\ 3 & -1/2 & -1/2 & -3 \\ -5/4 & -5/7 & 7 & -4/3 \\ 9/5 & 2 & 1/7 & -1 \\ -3 & 8/7 & -2 & 1/2 \\ 6/7 & -4/5 & 1/8 & 9/8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2/7 & -8/5 & 1/2 \\ -3/7 & -1 & 7/8 \\ 2 & -9/5 & 3/2 \\ 2/3 & -7/3 & -2/3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -149/60 & 71/30 & -713/480 \\ -51/14 & 18/5 & 37/16 \\ 12149/882 & -2134/315 & 365/36 \\ -184/105 & -1472/525 & 1483/420 \\ -485/147 & 1279/210 & -23/6 \\ 269/245 & -479/140 & -467/560 \end{pmatrix}$$

$\triangleleft$

El producto de matrices es un tanto *extraño* en varios sentidos. Su definición no parece natural en un principio y no es muy intuitiva. Además, algunas de las propiedades que verifica no son lo que uno podría esperar en principio cuando está acostumbrado a manejar sólo conjuntos como los números reales. Detallemos esto a continuación ilustrado con algunos ejemplos.

Nota 6.4.12

1) Aunque el producto de dos matrices AB esté bien definido, el producto BA ni siquiera tiene por qué existir, ya que el número de columnas de B no tiene por qué coincidir con el número de filas de A.

Ejemplo 6.4.13 Sean

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -9 & 4 \\ 0 & -8 & -5 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 4 & 7 & -9 \\ 5 & 7 & -8 \\ 3 & 5 & -9 \end{pmatrix}.$$

Tenemos que

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 20 & -45 \\ -55 & -81 & 109 \end{pmatrix},$$

pero BA no está definido. ◃

2) Aunque AB y BA estén definidos en un caso particular, AB y BA no tienen por qué ser iguales. Para empezar, a menos que A y B sean matrices cuadradas, AB ni siquiera tendrá el mismo orden que BA.

Ejemplo 6.4.14 Sean

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ -5 & 5 & -7 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 8 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Tenemos

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ -11 & 24 \end{pmatrix} \text{ y } BA = \begin{pmatrix} 9 & -5 & 6 \\ -28 & 40 & -59 \\ -3 & 15 & -24 \end{pmatrix}.$$

Vemos que AB y BA no tienen el mismo orden, pues una es 2×2 y la otra 3×3. ◃

3) Aun en el caso en que A y B sean matrices cuadradas del mismo orden (por tanto AB y BA también), AB no tiene por qué coincidir con BA.

Ejemplo 6.4.15 Tenemos

$$\begin{pmatrix} -9 & -6 & 3 \\ 9 & -9 & -5 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 & -1 & -1 \\ -4 & 2 & 9 \\ -7 & -7 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 66 & -24 & -54 \\ 8 & 8 & -75 \\ -49 & -13 & -9 \end{pmatrix},$$

mientras que

$$\begin{pmatrix} -7 & -1 & -1 \\ -4 & 2 & 9 \\ -7 & -7 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -9 & -6 & 3 \\ 9 & -9 & -5 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 48 & 51 & -17 \\ 108 & 6 & -13 \\ -18 & 105 & 11 \end{pmatrix}.$$

◁

Si bien en algún caso particular, pudieran coincidir.

4) Aunque multipliquemos dos matrices no nulas, el resultado puede ser una matriz nula.

Ejemplo 6.4.16 Ni la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix},$$

ni

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 3 & -4 \end{pmatrix},$$

son nulas, pero

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

es decir la matriz cuadrada nula de orden 2. ◁

◁

A pesar de todas estas aparentes *contrariedades*, el producto de matrices es muy útil, y realmente su definición sí es *natural* en cierto sentido, pero esto es algo que iremos viendo poco a poco.

Nota 6.4.17 Resulta muy sencillo comprobar que si A es una matriz $n \times m$, entonces se verifica que

$$\mathrm{I}_n\mathsf{A} = \mathsf{A} \text{ y que } \mathsf{A}\mathrm{I}_m = \mathsf{A},$$

es decir, que si multiplicamos a la derecha o a la izquierda a una matriz por la identidad del orden adecuado, la matriz no cambia.

Por tanto, si fijamos un $n \in \mathbb{N}$, y consideramos el conjunto de todas las matrices cuadradas de orden n, entonces la matriz I_n se comporta en ese conjunto respecto del producto de matrices como el 1 en $\mathbb{R}$ respecto de la multiplicación de números reales. ◁

Proposición 6.4.18

1) El producto de dos matrices triangulares superiores (del mismo orden) es triangular superior.

2) El producto de dos matrices triangulares inferiores (del mismo orden) es triangular inferior.

3) El producto de dos matrices diagonales (del mismo orden) es diagonal.

$\triangleleft$

Proposición 6.4.19 La multiplicación de matrices verifica respecto de la suma y el producto por escalares las siguientes propiedades

1) Si $\lambda \in \mathbb{R}$ y A y B son matrices tales que tiene sentido AB, entonces

$$\lambda(AB) = A(\lambda B) = (\lambda A)B.$$

2) Si A, B y C son matrices tales que tiene sentido AB y C tiene el mismo orden que B, entonces

$$A(B + C) = AB + AC.$$

3) Si A, B y C son matrices tales que tiene sentido BA y C tiene el mismo orden que B, entonces

$$(B + C)A = BA + CA.$$

$\triangleleft$

6.4.2 Trasposición

Definición 6.4.20 Sea $A = \left(a_{ij}\right)_{n\times m}$. La matriz *traspuesta* de A, denotada por A^t es una matriz $m \times n$ definida por

$$A^t = \left(a_{ji}\right)_{m\times n}.$$

Es decir, la matriz A^t se puede construir disponiendo en forma de columnas las filas de A, o lo que es lo mismo, disponiendo en forma de filas las columnas de A, sin cambiar la ordenación. $\triangleleft$

Ejemplo 6.4.21 Escribiremos varias matrices con sus traspuestas

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 4 & -5 & -5 & 3 & -5 \\ 8 & 5 & -1 & 0 & 3 & -4 \\ -5 & -2 & -1 & -9 & 5 & 8 \end{pmatrix}, \quad A^t = \begin{pmatrix} 8 & 8 & -5 \\ 4 & 5 & -2 \\ -5 & -1 & -1 \\ -5 & 0 & -9 \\ 3 & 3 & 5 \\ -5 & -4 & 8 \end{pmatrix}.$$

$$\mathsf{B} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 8 & -9 \\ 7 & 5 \\ 0 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{B}^t = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 7 & 0 & 4 \\ -3 & -9 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\mathsf{C} = \begin{pmatrix} 5 & -5 & 9 & -9 & 4 & 0 & -8 \\ -5 & 4 & 7 & -9 & 5 & 7 & -8 \\ 3 & 5 & -9 & 4 & 0 & -1 & -5 \\ 5 & -7 & 1 & -1 & 3 & 8 & 3 \\ 3 & -9 & -6 & 3 & 9 & -9 & -5 \\ 6 & 0 & 1 & -7 & -1 & -1 & -4 \\ 2 & 9 & -7 & -7 & -3 & -7 & -2 \end{pmatrix},$$

$$\mathsf{C}^t = \begin{pmatrix} 5 & -5 & 3 & 5 & 3 & 6 & 2 \\ -5 & 4 & 5 & -7 & -9 & 0 & 9 \\ 9 & 7 & -9 & 1 & -6 & 1 & -7 \\ -9 & -9 & 4 & -1 & 3 & -7 & -7 \\ 4 & 5 & 0 & 3 & 9 & -1 & -3 \\ 0 & 7 & -1 & 8 & -9 & -1 & -7 \\ -8 & -8 & -5 & 3 & -5 & -4 & -2 \end{pmatrix}.$$

$\triangleleft$

A continuación veremos algunas propiedades que relacionan la trasposición de matrices con nociones que hemos adquirido anteriormente.

Proposición 6.4.22 A partir de las definiciones es muy sencillo ver que

1) La traspuesta de una matriz columna es una matriz fila.

2) La traspuesta de una matriz fila es una matriz columna.

3) Las filas de una matriz son las columnas de su traspuesta.

4) Las columnas de una matriz son las filas de su traspuesta.

5) La traspuesta de una matriz triangular superior es triangular inferior.

6) La traspuesta de una matriz triangular inferior es triangular superior.

7) La traspuesta de una matriz cuadrada es otra matriz cuadrada del mismo orden.

8) Una matriz cuadrada A es simétrica si y solo si $\mathsf{A} = \mathsf{A}^t$.

9) Una matriz cuadrada A es antisimétrica si y solo si $\mathsf{A} = -\mathsf{A}^t$.

10) $(\mathsf{A}^t)^t = \mathsf{A}$.

$\triangleleft$

Es muy sencillo comprobar que la trasposición verifica con respecto a la aritmética matricial las propiedades siguientes

Proposición 6.4.23

- Si $\lambda \in \mathbb{R}$ y A es una matriz
$$\lambda \mathsf{A}^t = (\lambda \mathsf{A})^t$$
- Si A y B son dos matrices del mismo orden
$$(\mathsf{A} + \mathsf{B})^t = \mathsf{A}^t + \mathsf{B}^t.$$
- Si A y B son dos matrices tales que tiene sentido AB entonces también tiene sentido $\mathsf{B}^t\mathsf{A}^t$. Además
$$(\mathsf{AB})^t = \mathsf{B}^t\mathsf{A}^t.$$

$\triangleleft$

6.4.3 Producto de matrices y combinaciones lineales

Trataremos de interpretar el producto de matrices en términos de combinaciones lineales de filas o columnas, lo cual nos resultará útil posteriormente.

Lema 6.4.24 La matriz fila $1 \times m$ que resulta de multiplicar una matriz fila $\mathsf{A}_{1\times n}$ por una matriz $\mathsf{B}_{n\times m}$, es combinación lineal de las filas de B con matriz de escalares A. $\triangleleft$

Ejemplo 6.4.25 Sean

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Las filas de B son

$$\begin{aligned} \mathsf{B}_1 &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \mathsf{B}_2 &= \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \\ \mathsf{B}_3 &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Se tiene

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix}2 & 3 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2 & 0 & 1\\ -3 & 1 & -1 & 2\\ 2 & 1 & 0 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-11 & -3 & -3 & 2\end{pmatrix} =\\ &2\begin{pmatrix}1 & -2 & 0 & 1\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}-3 & 1 & -1 & 2\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}2 & 1 & 0 & 3\end{pmatrix} =\\ &2\mathsf{B}_1 + 3\mathsf{B}_2 - 2\mathsf{B}_3.\end{aligned}$$

Vemos como el producto de las dos matrices se puede expresar como la combinación lineal de las filas de B con matriz de coeficientes A $\triangleleft$

Lema 6.4.26 La matriz columna $n \times 1$ que resulta de multiplicar una matriz $\mathsf{A}_{n\times m}$ por una matriz columna $\mathsf{B}_{m\times 1}$, es combinación lineal de las columnas de A con matriz de escalares B^t.
Demostración:
Esto es una consecuencia del lema 6.4.24 usando la trasposición. Tenemos que

$$(\mathsf{AB})^t = \mathsf{B}^t\mathsf{A}^t.$$

Por el lema 6.4.24, la matriz fila $(\mathsf{AB})^t$ es combinación lineal de las filas de A^t con matriz de escalares B^t que es una matriz fila. Teniendo en cuenta que las filas de A^t son las traspuestas de las columnas de A se sigue de manera inmediata el resultado. $\triangleleft$

A partir de los lemas 6.4.24 y 6.4.26, se sigue el siguiente resultado de forma inmediata.

Corolario 6.4.27 Sea $\mathsf{A}_{n\times m}$ y $\mathsf{B}_{m\times p}$

1) Si $i \in \{1, \dots, n\}$, la fila i-ésima de AB es la combinación lineal de las filas de B con matriz de escalares formada por la fila i-ésima de A.

2) Si $j \in \{1, \dots, p\}$, la columna j-ésima de AB es la combinación lineal de las columnas de A con matriz de escalares formada por la traspuesta de la columna j-ésima de B.

$\triangleleft$

6.4.4 Productos de matrices por bloques

Cuando dos matrices que se multiplican se dividen en bloques verificando ciertas reglas, entonces las matrices se van a poder multiplicar *por bloques* siguiendo las mismas reglas que para la multiplicación de matrices usual pero aplicadas a los bloques. Veámoslo.

Lema 6.4.28 Sean $n, m, p, s, t \in \mathbb{N}$ con $1 < s < n$, $1 < t < p$, A una matriz $n \times m$ y B una matriz $m \times p$, y sean

- A_1 el bloque resultante de tomar las s primeras filas de A,
- A_2 el bloque resultante de tomar las $n - s$ últimas filas de A,
- B_1 el bloque resultante de tomar las t primeras columnas de B
- B_2 el bloque resultante de tomar las $n - t$ últimas columnas de B.

Entonces

$$\mathsf{AB} = \left(\begin{array}{c} \mathsf{A}_1 \\ \hline \mathsf{A}_2 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} \mathsf{B}_1 & \mathsf{B}_2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \mathsf{A}_1\mathsf{B}_1 & \mathsf{A}_1\mathsf{B}_2 \\ \hline \mathsf{A}_2\mathsf{B}_1 & \mathsf{A}_2\mathsf{B}_2 \end{array}\right).$$

Demostración:
Es muy sencilla a partir de la fórmula de multiplicación de matrices de 6.4.9 $\triangleleft$

Lema 6.4.29 Sean $n, m, p, r \in \mathbb{N}$ con $1 < r < m$, A una matriz $n \times m$ y B una matriz $m \times p$, y sean

- A_1 el bloque resultante de tomar las r primeras columnas de A,
- A_2 el bloque resultante de tomar las $m - r$ últimas columnas de A,
- B_1 el bloque resultante de tomar las r primeras filas de B
- B_2 el bloque resultante de tomar las $m - r$ últimas filas de B.

Entonces

$$\mathsf{AB} = \left(\begin{array}{c|c} \mathsf{A}_1 & \mathsf{A}_2 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} \mathsf{B}_1 \\ \hline \mathsf{B}_2 \end{array}\right) = \left(\mathsf{A}_1\mathsf{B}_1 + \mathsf{A}_2\mathsf{B}_2\right).$$

Demostración:
Es también sencilla a partir de la fórmula de multiplicación de matrices de 6.4.9 $\triangleleft$

Corolario 6.4.30 Sean $n, m, p, r, s, t \in \mathbb{N}$ con $1 < r < m$, $1 < s < n$, $1 < t < p$, A una matriz $n \times m$ y B una matriz $m \times p$. Ahora

- Dividimos A por bloques de la siguiente forma
  - A_1 es el bloque obtenido seleccionando las s primeras filas y las r primeras columnas de A,
  - A_2 es el bloque obtenido seleccionando las s primeras filas y las $m - r$ últimas columnas de A,

  - A_3 es el bloque obtenido seleccionando las $n-s$ últimas filas y las r primeras columnas de A,
  - A_4 es el bloque obtenido seleccionando las $n-s$ últimas filas y las $m-r$ últimas columnas de A.

- Dividimos B por bloques de la siguiente forma
  - B_1 es el bloque obtenido seleccionando las r primeras filas y las t primeras columnas de B,
  - B_2 es el bloque obtenido seleccionando las r primeras filas y las $p-t$ últimas columnas de B,
  - B_3 es el bloque obtenido seleccionando las $n-r$ últimas filas y las t primeras columnas de B,
  - B_4 es el bloque obtenido seleccionando las $n-r$ últimas filas y las $p-t$ últimas columnas de B.

Entonces

$$AB = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline A_3 & A_4 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} B_1 & B_2 \\ \hline B_3 & B_4 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} A_1B_1 + A_2B_3 & A_1B_2 + A_2B_4 \\ \hline A_3B_1 + A_4B_3 & A_3B_2 + A_4B_4 \end{array}\right).$$

$\triangleleft$

Vemos como las matrices se pueden multiplicar por bloques (cuando los bloques sean compatibles en tamaño) usando las reglas de multiplicación de matrices que utilizaríamos si los bloques tuvieran todos tamaño 1×1, salvo por el hecho de que no se pueden conmutar los bloques en cada uno de los productos que aparecen.

6.5 Operaciones elementales

Estudiaremos ahora el tipo de operación que más importancia va a tener para el desarrollo de la presente materia

6.5.1 Operaciones elementales por filas

Definición 6.5.1 Una *operación elemental por filas* consiste en un proceso mediante el que se obtiene una matriz B a partir de otra del mismo orden A, cambiando alguna de las filas de la matriz A de acuerdo con una de las siguientes reglas

1) Sumar a una fila otra distinta multiplicada por un escalar.

2) Multiplicar a una fila por un escalar no nulo.

3) Intercambiar dos filas.

A cada una de las operaciones que resultan de aplicar cada una de las reglas anteriores las denotaremos de la siguiente manera

1) Sumar a la fila i la fila j (con $i \neq j$) multiplicada por un escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ se denotará por
$$f_{ij}^{\lambda}.$$

2) Multiplicar la fila i por un escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ con $\lambda \neq 0$, se denotará por
$$f_i^{\lambda}.$$

3) Intercambiar las filas i y j (con $i \neq j$), se denotará por
$$f_{ij}.$$

◁

Ejemplo 6.5.2 Presentamos varios ejemplos de operaciones elementales por filas

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_{42}^{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ 5 & 0 & 6 & -1 \\ -2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_{13}} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_{3}^{-2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 7/8 & 0 & 4/9 & 5/9 & 9/7 & 2/3 \\ -4/3 & 4 & -3 & 7/9 & 3/5 & -9/8 \\ 0 & -5/6 & -1 & -1/5 & 8/5 & 3/7 \\ -1 & 9 & -5 & 0 & -1 & -1/6 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_{13}^{-2/3}}$$
$$\begin{pmatrix} 7/8 & 5/9 & 10/9 & 31/45 & 23/105 & 8/21 \\ -4/3 & 4 & -3 & 7/9 & 3/5 & -9/8 \\ 0 & -5/6 & -1 & -1/5 & 8/5 & 3/7 \\ -1 & 9 & -5 & 0 & -1 & -1/6 \end{pmatrix}.$$

◁

Definición 6.5.3 Diremos que una operación elemental por filas f es *inversible*, cuando siempre que se aplique a una matriz A para obtener una matriz B, exista otra operación elemental por filas (que no depende de las matrices A y B) que aplicada a B nos proporcione A. A tal operación la llamaremos la inversa de f y será denotada por $(f)^{-1}$. ◁

Proposición 6.5.4 Toda operación elemental por filas es inversible, y sus inversas son

1) $(f_{ij}^{\lambda})^{-1} = f_{ij}^{-\lambda}$.

2) $(f_i^{\lambda})^{-1} = f_i^{1/\lambda}$.

3) $(f_{ij})^{-1} = f_{ij}$

◁

Observemos que la inversa de una operación de intercambio de filas es ella misma.

Ejemplo 6.5.5 En los siguientes ejemplos aplicaremos sucesivamente una operación elemental por filas y su inversa para ver como se recupera la matriz de partida.

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_{12}^{3}} \begin{pmatrix} -3 & -4 & 3 & 5 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_{12}^{-3}}$$
$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_{3}^{2}} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & -4 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_{3}^{1/2}}$$
$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$
$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_{13}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_{13}}$$
$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

◁

Así pues una operación elemental por filas transforma una matriz en otra. También es posible realizar sucesivas operaciones elementales por filas a una matriz para obtener finalmente otra.

Ejemplo 6.5.6 Realizaremos varias operaciones elementales por filas sucesivas a la matriz de partida

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_{13}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_{21}^{-2}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_3^{1/3}}$$
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 2/3 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_{31}^{1}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -4/3 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

◁

El orden en el que se hacen las operaciones elementales por filas es muy importante, ya que en general no conmutan.

Ejemplo 6.5.7 Realicemos dos operaciones elementales por filas a una matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ -2 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_{12}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ -2 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_{41}^{-1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ -3 & -4 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ahora realizaremos las mismas operaciones elementales por filas, pero en distinto orden

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ -2 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_{41}^{-1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ -3 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_{12}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ -3 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Vemos como las matrices finales obtenidas en uno y otro caso son distintas. ◁

A veces es posible realizar ciertos bloques de operaciones elementales por filas de forma conjunta, sin tener que escribir las matrices transformadas intermedias para cada operación por separado. Esto solo puede hacerse cuando cada operación elemental no cambie ninguna fila que influya en alguna de las operaciones siguientes del bloque

Ejemplo 6.5.8 Las siguientes operaciones elementales por filas

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_{21}^{-1}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_{31}^{1}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_{41}^{-3}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -7 \end{pmatrix},$$

podrían haberse realizado conjuntamente

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_{21}^{-1}, f_{31}^{1}, f_{41}^{-3}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -7 \end{pmatrix},$$

sin necesidad de escribir las dos matrices intermedias, debido a que cada operación elemental por filas sólo cambia filas que no intervienen en las siguientes operaciones elementales por filas. $\triangleleft$

Definición 6.5.9 Diremos que una matriz A es *equivalente por filas* a una matriz B si es posible obtener B realizando una cantidad finita de operaciones elementales por filas sucesivas sobre A. $\triangleleft$

Proposición 6.5.10 Se tiene que

1) Toda matriz es equivalente por filas a sí misma.

2) Si A es equivalente por filas a B entonces B es equivalente por filas a A.

3) Si A es equivalente por filas a B y B es equivalente por filas a C entonces A es equivalente por filas a C.

Demostración:
Probemos cada una de las propiedades por separado

1) Es inmediato, haciendo 0 operaciones elementales por filas a A.

2) Si para pasar de A a B, hacemos las operaciones elementales por filas

$$f_1, f_2, \ldots, f_k,$$

en el orden escrito, entonces para pasar de B a A bastará hacer sobre B

$$(f_k)^{-1}, (f_{k-1})^{-1}, \ldots, (f_2)^{-1}, (f_1)^{-1},$$

lo cual tiene sentido pues en 6.5.4 se estableció la inversibilidad de todas las operaciones elementales.

3) Basta concatenar las operaciones elementales por filas que se hacen a A para pasar a B con las que se hacen a B para pasar a C. Todas estas operaciones realizadas secuencialmente sobre A, la transforman en C y por tanto A y C son equivalentes por filas.

$\triangleleft$

6.5.1.1 Interpretación matricial

A continuación vamos a interpretar las operaciones elementales por filas como productos de matrices. Primero definiremos las matrices elementales por filas.

Definición 6.5.11 Para cada $n \in \mathbb{N}$, $i \leq n$, $j \leq n$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ definimos las siguientes matrices

1) Si $i \neq j$, se define $\mathsf{F}_{ij}^{\lambda}$ como el resultado de aplicar la operación elemental por filas f_{ij}^{λ} a la matriz identidad I_n.

2) Si $\lambda \neq 0$, se define F_{i}^{λ} como el resultado de aplicar la operación elemental por filas f_{i}^{λ} a la matriz identidad I_n.

3) Si $i \neq j$, se define F_{ij} como el resultado de aplicar la operación elemental por filas f_{ij} a la matriz identidad I_n.

A las matrices anteriores se les llama *matrices elementales por filas* de orden n. Cada una de ellas se dice que corresponde a la operación elemental por filas que sirve para generarla. $\triangleleft$

Ejemplo 6.5.12 Presentamos algunas matrices elementales por filas de distintos órdenes

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_{12}^{3}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathsf{F}_{12}^{3}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_{41}^{-2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathsf{F}_{41}^{-2}.$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{f_2^{-5}}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-5&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=\mathsf{F}_2^{-5}.$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{f_{25}}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1\end{pmatrix}=\mathsf{F}_{25}.$$

$\triangleleft$

Proposición 6.5.13 La matriz obtenida tras aplicar una operación elemental por filas a una matriz $\mathsf{A}_{n\times m}$, es también el resultado de multiplicar la matriz A por la izquierda por la matriz elemental por filas correspondiente. $\triangleleft$

Ejemplo 6.5.14 Vamos a realizar una operación elemental por filas sobre una cierta matriz

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&-2&1\\1&3&-2\\-2&-2&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{f_{41}^2}\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&-2&1\\1&3&-2\\0&-2&-1\end{pmatrix}.$$

Ahora construimos la matriz elemental por filas de orden 4 correspondiente a la operación elemental realizada

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{f_{41}^2}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\2&0&0&1\end{pmatrix}=\mathsf{F}_{41}^2,$$

y finalmente multiplicamos nuestra matriz inicial por F_{41}^2 a la izquierda

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\2&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&-2&1\\1&3&-2\\-2&-2&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&-2&1\\1&3&-2\\0&-2&-1\end{pmatrix},$$

viendo que se obtiene el mismo resultado. $\triangleleft$

Proposición 6.5.15 Para cada orden $n\in\mathbb{N}$, $i\le n$, $j\le n$ y $\lambda\in\mathbb{R}$ se verifica

1) Si $i \neq j$

$$\mathsf{F}_{ij}^{\lambda}\mathsf{F}_{ij}^{-\lambda} = \mathsf{F}_{ij}^{-\lambda}\mathsf{F}_{ij}^{\lambda} = \mathrm{I}_n.$$

Escribiremos $(\mathsf{F}_{ij}^{\lambda})^{-1} = \mathsf{F}_{ij}^{-\lambda}$ y $(\mathsf{F}_{ij}^{-\lambda})^{-1} = \mathsf{F}_{ij}^{\lambda}$.

2) Si $\lambda \neq 0$

$$\mathsf{F}_{i}^{\lambda}\mathsf{F}_{i}^{1/\lambda} = \mathsf{F}_{i}^{1/\lambda}\mathsf{F}_{i}^{\lambda} = \mathrm{I}_n.$$

Escribiremos $(\mathsf{F}_{i}^{\lambda})^{-1} = \mathsf{F}_{i}^{1/\lambda}$ y $(\mathsf{F}_{i}^{1/\lambda})^{-1} = \mathsf{F}_{i}^{\lambda}$.

3) Si $i \neq j$.

$$\mathsf{F}_{ij}\mathsf{F}_{ij} = \mathrm{I}_n.$$

Escribiremos $(\mathsf{F}_{ij})^{-1} = \mathsf{F}_{ij}$

Demostración:
Sea f_1 una operación elemental por filas y f_2 su inversa. Sean F_1 y F_2 las matrices elementales por filas correspondientes respectivamente.
Por 6.5.4 es evidente que

$$\mathrm{I}_n \xrightarrow{f_1} \mathsf{F}_1 \xrightarrow{f_2} \mathrm{I}_n.$$

Pero por 6.5.13 se tiene que

$$\mathsf{F}_1 \xrightarrow{f_2} \mathsf{F}_2\mathsf{F}_1,$$

de donde se sigue que

$$\mathsf{F}_2\mathsf{F}_1 = \mathrm{I}_n.$$

Haciendo un razonamiento similar, que se deja al lector, se demuestra que

$$\mathsf{F}_1\mathsf{F}_2 = \mathrm{I}_n.$$

Ahora particularizando a cada tipo de operación elemental por filas, se tiene el resultado buscado. $\triangleleft$

Debido a estas propiedades se dice que las matrices elementales por filas son *inversibles*. Con la ayuda de estas matrices, se extenderá más adelante la noción de *inversibilidad* a otras matrices.

Ejemplo 6.5.16 Veamos en algunos ejemplos cómo se cumplen las propiedades de 6.5.15

$$\mathsf{F}_{41}^{3}\mathsf{F}_{41}^{-3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{I}_4.$$

$$\mathsf{F}_{41}^{-3}\mathsf{F}_{41}^{3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{I}_4.$$

$$\mathsf{F}_{2}^{5}\mathsf{F}_{2}^{1/5} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{I}_4.$$

$$\mathsf{F}_{2}^{1/5}\mathsf{F}_{2}^{5} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{I}_4.$$

$$\mathsf{F}_{23}\mathsf{F}_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{I}_3.$$

$\triangleleft$

Proposición 6.5.17 Si A y B son dos matrices $n \times m$ equivalentes por filas, existen dos matrices P y Q cuadradas de orden n, verificando las siguientes propiedades

1) $\mathsf{A} = \mathsf{PB}$

2) $\mathsf{B} = \mathsf{QA}$

3) Tanto P como Q son productos de matrices elementales por filas.

4) $\mathsf{PQ} = \mathsf{QP} = \mathrm{I}_n$. Escribiremos $\mathsf{P} = \mathsf{Q}^{-1}$ y $\mathsf{Q} = \mathsf{P}^{-1}$

Demostración:
Como A y B son equivalentes por filas, existen $f_1, f_2, \ldots, f_{k-1}, f_k$ operaciones elementales por filas tales que

$$\mathsf{A} \xrightarrow{f_1, f_2, \ldots, f_{k-1}, f_k} \mathsf{B}.$$

Sean $\mathsf{F}_1, \mathsf{F}_2, \ldots, \mathsf{F}_{k-1}, \mathsf{F}_k$ las matrices elementales por filas correspondientes respectivamente a $f_1, f_2, \ldots, f_{k-1}, f_k$. Por la interpretación matricial dada en 6.5.13, se tiene entonces que

$$\mathsf{B} = \mathsf{F}_k \mathsf{F}_{k-1} \cdots \mathsf{F}_2 \mathsf{F}_1 \mathsf{A}.$$

Llamemos

$$\mathsf{P} = \mathsf{F}_k \mathsf{F}_{k-1} \cdots \mathsf{F}_2 \mathsf{F}_1.$$

Se tiene que

$$\mathsf{B} \xrightarrow{(f_k)^{-1},(f_{k-1})^{-1},\ldots,(f_{k-1})^{-1},(f_k)^{-1}} \mathsf{A}.$$

Además las matrices elementales por filas correspondientes a

$$(f_k)^{-1}, (f_{k-1})^{-1}, \ldots, (f_{k-1})^{-1}, (f_k)^{-1},$$

son

$$(\mathsf{F}_k)^{-1}, (\mathsf{F}_{k-1})^{-1}, \ldots, (\mathsf{F}_{k-1})^{-1}, (\mathsf{F}_k)^{-1},$$

respectivamente. Llamando

$$\mathsf{Q} = (\mathsf{F}_k)^{-1}, (\mathsf{F}_{k-1})^{-1}, \ldots, (\mathsf{F}_{k-1})^{-1}, (\mathsf{F}_k)^{-1},$$

es muy sencillo comprobar que se verifican las propiedades requeridas. $\triangleleft$

6.5.2 Operaciones elementales por columnas

Definición 6.5.18 Una *operación elemental por columnas* consiste en un proceso por el que se obtiene una matriz B a partir de otra del mismo orden A, cambiando alguna de las columnas de la matriz A de acuerdo con una de las siguientes reglas

1) Sumar a una columna otra distinta multiplicada por un escalar.

2) Multiplicar a una columna por un escalar no nulo.

3) Intercambiar dos columnas.

A cada una de las operaciones que resultan de aplicar cada una de las reglas anteriores las denotaremos de la siguiente manera

1) Sumar a la columna i la columna j (con $i \neq j$) multiplicada por un escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ se denotará por

$$c_{ij}^{\lambda}.$$

2) Multiplicar la columna i por un escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ con $\lambda \neq 0$, se denotará por

$$c_i^{\lambda}.$$

3) Intercambiar las columnas i y j (con $i \neq j$), se denotará por

$$c_{ij}.$$

◁

Ejemplo 6.5.19 Algunos ejemplos de operaciones elementales por columnas

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_{31}^{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 7 & 0 \\ -1 & -1 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_{24}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_{3}^{-2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -6 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

◁

Definición 6.5.20 Una operación elemental por columnas c diremos que es *inversible*, cuando siempre que se aplique a una matriz A para obtener una matriz B, exista otra operación elemental (que no depende de las matrices A y B) que aplicada a B nos proporcione A. A tal operación la llamaremos la inversa de c y será denotada por $(c)^{-1}$. ◁

Una vez establecidas las definiciones anteriores, que son similares a las operaciones elementales por filas, podemos establecer una relación entre las operaciones elementales por filas y por columnas.

Definición 6.5.21 Diremos que

1) Diremos que f_{ij}^{λ} es la operación elemental por filas correspondiente a la operación elemental por columnas c_{ij}^{λ}, y viceversa.

2) Diremos que f_{i}^{λ} es la operación elemental por filas correspondiente a la operación elemental por columnas c_{i}^{λ}, y viceversa.

3) Diremos que f_{ij} es la operación elemental por filas correspondiente a la operación elemental por columnas c_{ij}, y viceversa.

◁

Las operaciones elementales por columnas y sus correspondientes por filas están relacionadas por el siguiente resultado

Proposición 6.5.22 Supongamos que f_i es una operación elemental por filas y que c_i su operación elemental por columnas correspondiente. Sea A una matriz y sean

$$\mathsf{A} \xrightarrow{c_i} \mathsf{B}_1$$
$$\mathsf{A}^t \xrightarrow{f_i} \mathsf{B}_2,$$

entonces

$$\mathsf{B}_2^t = \mathsf{B}_1.$$

Demostración:
Es inmediata teniendo en cuenta que las columnas de una matriz coinciden con las filas de su traspuesta y viceversa. ◁

Nota 6.5.23 A partir de 6.5.22 se deduce que para hacer una cierta cantidad de operaciones elementales por columnas a una matriz, bastaría con hacer las correspondientes por filas a su traspuesta y finalmente trasponer el resultado.

También puede deducirse que para hacer una cierta cantidad de operaciones elementales por filas a una matriz, bastaría con hacer las correspondientes por columnas a su traspuesta y finalmente trasponer el resultado.

En todo caso, lo que nos dice 6.5.22 es que basta con desarrollar una teoría de operaciones elementales por filas para, mediante la trasposición, tener una teoría de operaciones elementales por columnas. ◁

Simplemente enunciaremos a continuación los resultados de operaciones elementales por columnas similares a los de filas, omitiendo casi todos los ejemplos.

Proposición 6.5.24 Toda operación elemental por columnas es inversible, y sus inversas son

1) $(c_{ij}^{\lambda})^{-1} = c_{ij}^{-\lambda}$.

2) $(c_i^{\lambda})^{-1} = c_i^{1/\lambda}$.

3) $(c_{ij})^{-1} = c_{ij}$

◁

Observemos que la inversa de una operación de intercambio de columnas es ella misma.

Es posible realizar sucesivas operaciones elementales por columnas a una matriz para obtener finalmente otra.

Las operaciones elementales por columnas en general no conmutan.

A veces es posible realizar ciertos bloques de operaciones elementales por columnas de forma conjunta, sin tener que escribir las matrices transformadas intermedias para cada operación por separado. Esto solo puede hacerse cuando cada operación elemental por columnas no cambie ninguna columna que influya en alguna de las operaciones siguientes del bloque.

Definición 6.5.25 Diremos que una matriz A es *equivalente por columnas* a una matriz B si es posible obtener B realizando una cantidad finita de operaciones elementales por columnas sucesivas sobre A. ◁

Proposición 6.5.26 Se tiene que

1) Toda matriz es equivalente por columnas a si misma.

2) Si A es equivalente por columnas a B entonces B es equivalente por columnas a A.

3) Si A es equivalente por columnas a B y B es equivalente por columnas a C entonces A es equivalente por columnas a C.

◁

Proposición 6.5.27 Una matriz A es equivalente por columnas a B si y sólo si A^t es equivalente por filas a B^t. ◁

6.5.2.1 Interpretación matricial

Las operaciones elementales por columnas también tienen una interpretación matricial. Definiremos las matrices elementales por columnas.

Definición 6.5.28 Para cada $n \in \mathbb{N}$, $i \leq n$, $j \leq n$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ definimos las siguientes matrices

1) Si $i \neq j$, se define $\mathsf{C}_{ij}^{\lambda}$ como el resultado de aplicar la operación elemental por columnas c_{ij}^{λ} a la matriz identidad I_n.

2) Si $\lambda \neq 0$, se define C_i^{λ} como el resultado de aplicar la operación elemental por columnas c_i^{λ} a la matriz identidad I_n.

3) Si $i \neq j$, se define C_{ij} como el resultado de aplicar la operación elemental por filas c_{ij} a la matriz identidad I_n.

A las matrices anteriores se les llama *matrices elementales por columnas* de orden n. Cada una de ellas se dice que corresponde a la operación elemental por columnas que sirve para generarla a partir de la identidad. ◁

Proposición 6.5.29 Sea C una matriz elemental por columnas y F la matriz elemental por filas correspondiente. Se tiene que

$$\mathsf{C} = \mathsf{F}^t.$$

Demostración:
Se sigue de 6.5.22 y del hecho de que $\mathrm{I}_n^t = \mathrm{I}_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. ◁

Proposición 6.5.30 La matriz obtenida tras aplicar una operación elemental por columnas a una matriz $\mathsf{A}_{n\times m}$, es también el resultado de multiplicar la matriz A por la derecha por la matriz elemental columnas correspondiente.
Demostración:
Sea c una operación elemental por columnas y f la operación elemental por filas correspondiente a c. Sean C y F las matrices elementales correspondientes a c y f respectivamente.

Por 6.5.22 y por 6.5.13 tenemos que

$$\mathsf{A} \xrightarrow{c} \left(\mathsf{F}\mathsf{A}^t\right)^t = \mathsf{A}\mathsf{F}^t.$$

Pero por 6.5.29 se tiene que $\mathsf{F}^t = \mathsf{C}$, de donde

$$\mathsf{A} \xrightarrow{c} \left(\mathsf{F}\mathsf{A}^t\right)^t = \mathsf{A}\mathsf{F}^t = \mathsf{A}\mathsf{C},$$

y se tiene el resultado. ◁

Obsérvese que 6.5.30 marca la primera diferencia importante entre las operaciones elementales por filas y por columnas.

Ejemplo 6.5.31 Vamos a realizar una operación elemental por columnas sobre una matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_{21}^2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -4 & 1 \\ 1 & 5 & -2 \\ -2 & -6 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ahora construimos la matriz elemental por columnas de orden 4 correspondiente a la operación elemental realizada

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_{21}^{2}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathsf{C}_{21}^{2},$$

y finalmente multiplicamos nuestra matriz inicial por C_{21}^{2} a la derecha

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -4 & 1 \\ 1 & 5 & -2 \\ -2 & -6 & -1 \end{pmatrix},$$

viendo que se obtiene el mismo resultado. $\triangleleft$

Proposición 6.5.32 Para cada orden $n \in \mathbb{N}$, $i \leq n$, $j \leq n$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ se verifica

1) Si $i \neq j$

$$\mathsf{C}_{ij}^{\lambda}\mathsf{C}_{ij}^{-\lambda} = \mathsf{C}_{ij}^{-\lambda}\mathsf{C}_{ij}^{\lambda} = \mathrm{I}_n.$$

Escribiremos $(\mathsf{C}_{ij}^{\lambda})^{-1} = \mathsf{C}_{ij}^{-\lambda}$ y $(\mathsf{C}_{ij}^{-\lambda})^{-1} = \mathsf{C}_{ij}^{\lambda}$.

2) Si $\lambda \neq 0$

$$\mathsf{C}_{i}^{\lambda}\mathsf{C}_{i}^{1/\lambda} = \mathsf{C}_{i}^{1/\lambda}\mathsf{C}_{i}^{\lambda} = \mathrm{I}_n.$$

Escribiremos $(\mathsf{C}_{i}^{\lambda})^{-1} = \mathsf{C}_{i}^{1/\lambda}$ y $(\mathsf{C}_{i}^{1/\lambda})^{-1} = \mathsf{C}_{i}^{\lambda}$.

3) Si $i \neq j$.

$$\mathsf{C}_{ij}\mathsf{C}_{ij} = \mathrm{I}_n.$$

Escribiremos $(\mathsf{C}_{ij})^{-1} = \mathsf{C}_{ij}$.

$\triangleleft$

Debido a estas propiedades se dice que las matrices elementales por columnas son *inversibles.*

Proposición 6.5.33 Si A y B son dos matrices $n \times m$ equivalentes por columnas, existen dos matrices P y Q cuadradas de orden m, verificando las siguientes propiedades

1) $\mathsf{A} = \mathsf{BP}$

2) $\mathsf{B} = \mathsf{AQ}$

3) Tanto P como Q son productos de matrices elementales por columnas.

4) $\mathsf{PQ} = \mathsf{QP} = \mathrm{I}_m$. Escribiremos $\mathsf{P} = \mathsf{Q}^{-1}$ y $\mathsf{Q} = \mathsf{P}^{-1}$

Demostración:
Como A y B son equivalentes por columnas, por 6.5.27 A^t y B^t son equivalentes por filas. Luego por 6.5.17 existen P_1 y Q_1 verificando

1) $\mathsf{A} = \mathsf{P}_1\mathsf{B}$

2) $\mathsf{B} = \mathsf{Q}_1\mathsf{A}$

3) Tanto P_1 como Q_1 son productos de matrices elementales por filas..

4) $\mathsf{P}_1\mathsf{Q}_1 = \mathsf{Q}_1\mathsf{P}_1 = \mathrm{I}_m$.

Llamando $\mathsf{P} = \mathsf{P}_1^t$ y $\mathsf{Q} = \mathsf{Q}_1^t$, se infiere con facilidad lo que queremos demostrar. $\triangleleft$

Definición 6.5.34 Diremos que dos matrices son *equivalentes* si una resulta de la otra tras realizar una cantidad finita de operaciones elementales por filas y otra cantidad finita de operaciones elementales por columnas. $\triangleleft$

Las matrices equivalentes verifican las mismas propiedades que las matrices equivalentes por filas o columnas.

Proposición 6.5.35 Si A y B son dos matrices $n \times m$ equivalentes , existen dos matrices P_1 y Q_1 cuadradas de orden n y dos matrices cuadradas de orden m, P_2 Q_2, verificando las siguientes propiedades

1) $\mathsf{A} = \mathsf{P}_1\mathsf{B}\mathsf{P}_2$

2) $\mathsf{B} = \mathsf{Q}_1\mathsf{A}\mathsf{Q}_2$

3) Tanto P_1 como Q_1 son productos de matrices elementales por filas.

4) Tanto P_2 como Q_2 son productos de matrices elementales por columnas.

5) $\mathsf{P}_1\mathsf{Q}_1 = \mathsf{Q}_1\mathsf{P}_= \mathrm{I}_n$.

6) $\mathsf{P}_2\mathsf{Q}_2 = \mathsf{Q}_2\mathsf{P}_2 = \mathrm{I}_m$.

Demostración:
Se sigue fácilmente de 6.5.17 y 6.5.33. $\triangleleft$

6.6 Forma escalonada

Vamos ahora a estudiar un tipo de matrices con una estructura muy simple, sobre las que fundamentaremos gran parte de la materia que trataremos.

Definición 6.6.1 Diremos que una matriz $\mathsf{A} = \left(a_{ij}\right)_{n\times m}$ es *escalonada por filas* si es la matriz nula o bien verifica

1) Existe un índice de fila $p \leq n$ tal que

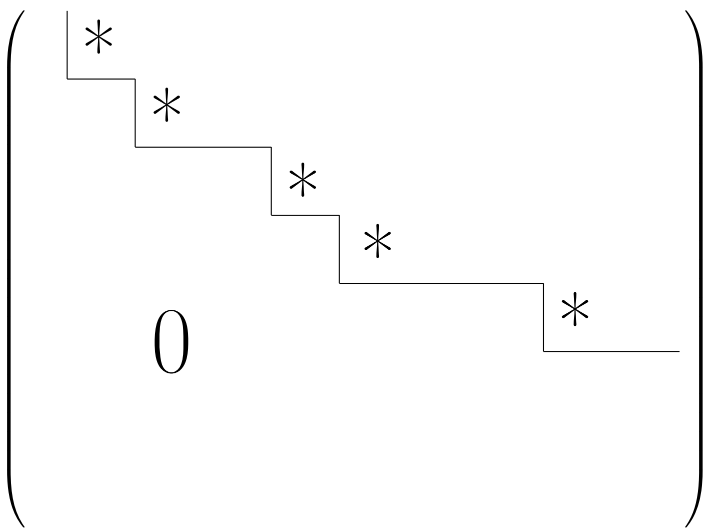
- Si $i \leq p$, la fila i-ésima de A es no nula.
- Si $i > p$, la fila i-ésima de A es nula.

2) Existen p índices de columna $k_1 < k_2 < \cdots < k_p$ tales que para cada $i = 1, \ldots, p$ se tiene

- $a_{ik_i} \neq 0$.
- Si $j < k_i$, $a_{ij} = 0$.

A los elementos $a_{1k_1}, \ldots, a_{pk_p}$ se les llama *pivotes* de la matriz escalonada A, y a las columnas $k_1, \ldots, k_p$, *columnas pivotales* de A. $\triangleleft$

Nota 6.6.2 El nombre de matriz escalonada viene del hecho de que para toda matriz de este tipo se puede trazar un dibujo en forma de *escalera* invertida entre ciertas filas y columnas de la matriz, de forma que en la cabecera de cada escalón hay un pivote, los escalones tienen todos altura exactamente 1 (solo saltan 1 fila) y longitud ≥ 1 (se extienden a lo largo de 1 o más columnas), y además en toda la zona de la matriz *bajo* la escalera sólo hay ceros. Poniendo $*$ es las posiciones donde hay un pivote, podemos representar esquemáticamente una matriz escalonada por filas de la siguiente manera



.

◁

Ejemplo 6.6.3 Las siguientes matrices son escalonadas por filas

$$\begin{pmatrix} -1 & -9 & 5 & 8 \\ 0 & 4 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}. \qquad \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & -5 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 9 & -7 & -7 & -3 \\ 0 & -7 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad \begin{pmatrix} 9 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & 6 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 9 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad \begin{pmatrix} 7 & -8 & -2 & 5 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & -9 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & -9 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -8 & 4 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

◁

Observemos que el numero de filas no nulas en una matriz escalonada por filas coincide con el número de pivotes y por tanto con el número de columnas pivotales. De este hecho se sigue inmediatamente que

Proposición 6.6.4 Si $E_{m\times n}$ es una matriz escalonada por filas, y p es su número de pivotes, se tiene que

$$p \leq n \text{ y } p \leq m.$$

◁

Definición 6.6.5 Diremos que una matriz es *escalonada por columnas* si su traspuesta es escalonada por filas. ◁

Proposición 6.6.6 Si $E_{m\times n}$ es una matriz escalonada por columnas, y p es su número de pivotes, se tiene que

$$p \leq n \text{ y } p \leq m.$$

◁

Ejemplo 6.6.7 Las siguientes son matrices escalonadas por columnas

$$\begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 0 \\ -3 & -9 & 0 \end{pmatrix}. \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 9 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ -1 & 9 & 0 \\ -7 & -6 & 9 \\ 7 & -9 & 6 \\ -6 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ -7 & 6 & 0 & 0 \\ -2 & 9 & -9 & 0 \\ -1 & -8 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

◁

La definición 6.6.5 hace que todo lo que se diga para matrices escalonadas por filas sea válido para matrices escalonadas por columnas, cambiando filas por columnas. En lo que sigue procuraremos en la medida de lo posible, enunciar todas las definiciones y resultados en términos de filas y columnas, pero cuando realicemos una demostración nos centraremos en los resultados por filas.

Definición 6.6.8 Llamaremos *forma escalonada* por filas (resp. por columnas) de una matriz A a toda matriz E que sea escalonada por filas (resp. por columnas) y equivalente por filas (resp. por columnas) a la matriz A. ◁

Es decir, si mediante operaciones elementales por filas (resp. por columnas) podemos pasar de la matriz A a una matriz escalonada por filas (resp. por columnas) E, entonces E es una forma escalonada por filas (resp. por columnas) de A.

6.6.1 Construcción de una forma escalonada

Veamos como construir una forma escalonada de una matriz mediante operaciones elementales

Algoritmo 6.6.9 El siguiente algoritmo permite obtener una matriz escalonada por filas, realizando una cantidad finita de operaciones elementales a una matriz $\mathsf{A} = \left(a_{ij}\right)_{n\times m}$.

```
i=1;j=1;
while i<n and j≤m {
    h=i;
    while a_hj = 0 and h<n {
        h=h+1;
    }
    if a_hj ≠0 then {
        Hacer f_ih;
        for k from i+1 to n {
            Hacer f_ki^(-a_kj/a_ij);
        }
        i=i+1;
    }
    j=j+1;
}
```

◁

Algoritmo 6.6.10 Para obtener una matriz escalonada por columnas equivalente a $\mathsf{A} = \left(a_{ij}\right)_{n\times m}$, aplicar el algoritmo 6.6.9 a A^t y trasponer la matriz obtenida a la salida de dicho algoritmo. ◁

Corolario 6.6.11 Toda matriz tiene forma escalonada por filas (resp. por columnas). ◁

Ejemplo 6.6.12 Aplicaremos el algoritmo 6.6.9 a la siguiente matriz

$$\begin{pmatrix} 8 & -8 & -10 & 10 & 8 & 17 \\ 12 & -12 & -15 & 15 & 12 & 24 \\ 4 & -4 & -5 & 5 & 4 & 1 \\ 8 & -8 & -10 & 8 & 7 & 11 \\ -8 & 8 & 10 & -8 & -4 & -10 \end{pmatrix}.$$

Empezaríamos con $i = 1$ y $j = 1$. Como el elemento $1,1$ es no nulo, podemos aplicar las siguientes operaciones elementales para hacer ceros debajo de él

$$f_{21}^{-12/8}, f_{31}^{-4/8}, f_{41}^{-1}, f_{51}^{1}.$$

Se obtiene

$$\begin{pmatrix} 8 & -8 & -10 & 10 & 8 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -15/2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Incrementamos $i = 2$ y $j = 2$. Como el elemento $2, 2$ y todos los que están bajo él son cero, incrementamos $j = 3$. Como debajo el elemento $2, 3$ y todos bajo él son cero, incrementamos $j = 4$. El elemento $2, 4$ es cero pero bajo él está el $4, 4$ que vale $-2 \neq 0$. Así pues intercambiamos las filas 2 y 4 mediante

$$f_{24}.$$

Obtenemos

$$\begin{pmatrix} 8 & -8 & -10 & 10 & 8 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -15/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Ahora hacemos cero bajo el elemento $2, 4$, para lo cual basta con realizar

$$f_{52}^{1}.$$

y se tiene

$$\begin{pmatrix} 8 & -8 & -10 & 10 & 8 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -15/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

ahora se incrementa $i = 3$ y $j = 5$. El elemento $3, 5$ es cero, pero bajo él está el $5, 5$ que es distinto de cero. Por tanto intercambiamos las filas 3 y 5 con

$$f_{35},$$

para obtener

$$\begin{pmatrix} 8 & -8 & -10 & 10 & 8 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -15/2 \end{pmatrix}.$$

Como bajo el elemento $3, 5$ sólo hay ceros, no hay que hacer nada así que incrementamos $j = 6$ e $i = 4$. El elemento $4, 6$ es distinto de cero. Hacemos ceros bajo él mediante

$$f_{54}^{-15/3},$$

y obtenemos

$$\begin{pmatrix} 8 & -8 & -10 & 10 & 8 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

y ya hemos alcanzado un forma escalonada. De hecho si quisiéramos seguir el algoritmo deberíamos incrementar $j = 7$, que es mayor que el número de columnas y por tanto una condición de parada para el algoritmo. $\triangleleft$

Nota 6.6.13 No siempre hay que seguir el algoritmo estrictamente. A veces realizando alguna operación elemental adicional, el proceso de obtención de la forma escalonada se hace más simple. $\triangleleft$

Ejemplo 6.6.14 En la matriz

$$\begin{pmatrix} -6 & -50 & -23 \\ -1 & -9 & -4 \\ 4 & 36 & 16 \end{pmatrix},$$

si en vez de seguir el método estándar que indica el algoritmo 6.6.9, primero se hace la operación elemental f_{12} para obtener

$$\begin{pmatrix} -1 & -9 & -4 \\ -6 & -50 & -23 \\ 4 & 36 & 16 \end{pmatrix},$$

se simplifican mucho las operaciones. $\triangleleft$

6.6.2 Forma escalonada reducida

Definición 6.6.15 Diremos que una matriz es una *matriz escalonada reducida por filas* si es una matriz escalonada por filas y además verifica las siguientes propiedades

1) Todos los pivotes son 1.

2) El único elemento distinto de cero en cada columna pivotal es el propio pivote.

$\triangleleft$

Ejemplo 6.6.16 La siguiente matriz es escalonada reducida por filas

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$\triangleleft$

Definición 6.6.17 Diremos que una matriz es una *matriz escalonada reducida por columnas* si su traspuesta es una matriz escalonada reducida por filas. $\triangleleft$

Definición 6.6.18 Diremos que una matriz escalonada reducida por filas (resp. por columnas) E es una *forma escalonada reducida* por filas (resp. por columnas) de una matriz A si son equivalentes por filas (resp. por columnas). ◁

El siguiente algoritmo nos permite pasar de una matriz escalonada por filas a una matriz escalonada reducida por filas equivalente a ella por filas.

Algoritmo 6.6.19 Sea $\mathsf{E} = \left(e_{ij}\right)$ una matriz escalonada por filas. Sea p su número de filas no nulas (o dicho de otra forma su número de columnas pivotales). Sean $k_1, \ldots, k_p$ sus índices de columna pivotales. Por tanto $e_{1k_1}, \ldots, e_{pk_p}$ son sus pivotes, todos ellos distintos de cero por definición. Realizaremos sobre E las siguientes operaciones elementales por filas

```
for i from 1 to p {
    Hacer f_i^{1/e_{ik_i}};
    for j from 1 to i-1 {
        Hacer f_{ji}^{-e_{jk_i}};
    }
}
```

◁

Algoritmo 6.6.20 Sea $\mathsf{E} = \left(e_{ij}\right)$ una matriz escalonada por columnas. Para obtener una matriz escalonada reducida por columnas equivalente a ella, aplicar el algoritmo 6.6.19 a E^t y trasponer el resultado que se obtenga. ◁

Corolario 6.6.21 Toda matriz A tiene forma escalonada reducida por filas (resp. por columnas).
Demostración:
Por 6.6.11 existe una matriz escalonada por filas (resp. por columnas) E equivalente a A. Ahora por 6.6.19 (resp. por 6.6.20) E es equivalente a una matriz R escalonada reducida por filas (resp. por columnas). Por las propiedades de las matrices equivalentes por filas 6.5.10 (resp. por columnas 6.5.26), A es equivalente por filas (resp. por columnas) a R, y se tiene el resultado. ◁

Teorema 6.6.22 La forma escalonada reducida por filas (resp. por columnas) de una matriz, es única. ◁

Así el teorema 6.6.22 nos permite hablar de *la forma escalonada reducida* por filas (resp. por columnas) de una matriz

Corolario 6.6.23 El número de pivotes en cualquier forma escalonada por filas (resp. por columnas) de una matriz dada es siempre el mismo.
Demostración:
Un estudio detallado del algoritmo 6.6.19 permite ver que no cambia el número de filas no nulas, y este coincide con el número de pivotes. Ahora bien, este algoritmo permite pasar de cualquier forma escalonada por filas de una matriz su forma escalonada reducida por filas, que por 6.6.22 es única. Luego todas las formas escalonadas por filas de dicha matriz tienen el mismo número de pivotes que la forma escalonada reducida por filas.
Para formas por columnas se aplica trasposición y se tiene el resultado. $\triangleleft$

Ejemplo 6.6.24 Obtengamos la forma escalonada reducida de la matriz del ejemplo 6.6.12 a partir de la forma escalonada obtenida:

$$\begin{pmatrix} 8 & -8 & -10 & 10 & 8 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Hacemos las operaciones elementales por filas

$$f_1^{1/8}, f_2^{-1/2}, f_3^{1/3}, f_4^{-2/3}$$

y se tiene

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -5/4 & 5/4 & 1 & 17/8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ahora aplicamos

$$f_{12}^{-5/4}$$

y tenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -5/4 & 0 & 3/8 & -13/8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se aplica

$$f_{23}^{-1/2}, f_{13}^{-3/8}$$

y tenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -5/4 & 0 & 0 & -7/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 17/6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Finalmente hacemos

$$f_{34}^{-1/3}, f_{24}^{-17/6}, f_{14}^{7/4}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -5/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

que ya es la forma escalonada reducida por filas. $\triangleleft$

Nota 6.6.25 El teorema 6.6.22, así como los algoritmos 6.6.19 y 6.6.20 van a ser fundamentales para poder establecer la noción crucial de rango. La demostración de 6.6.22 no es trivial y será incluida como material complementario. $\triangleleft$

6.7 Rango

Definición 6.7.1 Dada una matriz A se define el *rango por filas* de A como el número de pivotes (o lo que es lo mismo el número de filas no nulas) de su forma escalonada reducida por filas. Se denotará por

$$\mathrm{rg}_F(\mathsf{A}).$$

$\triangleleft$

Definición 6.7.2 Dada una matriz A se define el *rango por columnas* de A como el número de pivotes (o lo que es lo mismo el número de columnas no nulas) de su forma escalonada reducida por columnas. Se denotará por

$$\mathrm{rg}_C(\mathsf{A}).$$

$\triangleleft$

Proposición 6.7.3 Si A es una matriz $\mathrm{rg}_F(\mathsf{A})$ (resp. $\mathrm{rg}_C(\mathsf{A})$) es el número de pivotes o filas (resp. columnas) no nulas de cualquier forma escalonada por filas (resp. por columnas) de A.
Demostración:
Es inmediata a partir de 6.6.23. $\triangleleft$

Así para calcular el rango por filas (resp. por columnas) de una matriz basta con calcular una forma escalonada por filas (resp. por columnas) y contar el número de filas (resp. columnas) no nulas que aparecen.

Ejemplo 6.7.4 Para calcular el rango por filas de la matriz

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 8 & -8 & -10 & 10 & 8 & 17 \\ 12 & -12 & -15 & 15 & 12 & 24 \\ 4 & -4 & -5 & 5 & 4 & 1 \\ 8 & -8 & -10 & 8 & 7 & 11 \\ -8 & 8 & 10 & -8 & -4 & -10 \end{pmatrix},$$

que aparecía en el ejemplo 6.6.12, basta con una forma escalonada por filas de ella y contar su número de filas no nulas o su número de pivotes. En el ejemplo 6.6.12 se calculó una forma escalonada por filas suya como

$$\begin{pmatrix} 8 & -8 & -10 & 10 & 8 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Su número de filas no nulas es 4, luego

$$\mathrm{rg}_F(\mathsf{A}) = 4.$$

$\triangleleft$

Proposición 6.7.5 Si $\mathsf{A}_{n\times m}$ se tiene

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}_F(\mathsf{A}) &\leq n \\ \mathrm{rg}_F(\mathsf{A}) &\leq m \end{aligned}$$

Demostración:
Se sigue de forma inmediata de 6.6.4. $\triangleleft$

Proposición 6.7.6 Si $\mathsf{A}_{n\times m}$ se tiene

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}_C(\mathsf{A}) &\leq n \\ \mathrm{rg}_C(\mathsf{A}) &\leq m \end{aligned}$$

Demostración:
Se sigue de forma inmediata de 6.6.6. $\triangleleft$

Proposición 6.7.7 Dos matrices equivalentes por filas (resp. por columnas) tiene el mismo rango por filas (resp. por columnas). $\triangleleft$

Proposición 6.7.8 Sea $\mathsf{A}_{n\times m}$. Si A tiene k filas (resp. columnas) nulas, entonces el rango por filas (resp. columnas) de A es menor o igual que $n-k$.
Demostración:
Lo demostramos por filas y por columnas se obtiene por trasposición.

Primero hacemos operaciones elementales del tipo f_{ij}, de forma que obtengamos una matriz B donde las k filas nulas están todas al final. Luego aplicamos a B el algoritmo 6.6.9. Un estudio detallado de ese algoritmo lleva a afirmar que tras aplicarlo a B para obtener una forma escalonada E de B, y por tanto de A, no se ha realizado ningún cambio sobre las últimas filas nulas de B. Por tanto E tiene al menos k filas nulas, y de ahí se deduce el resultado. $\triangleleft$

El siguiente teorema es quizá el más importante de este capítulo. Su demostración se incluye como material complementario y se recomienda su lectura a aquellos que deseen tener un conocimiento cabal de los conocimientos aquí expuestos.

Teorema 6.7.9 Dada una matriz A se tiene que

$$\mathrm{rg}_F(\mathsf{A}) = \mathrm{rg}_C(\mathsf{A}).$$

$\triangleleft$

Definición 6.7.10 Dada una matriz A llamaremos *rango* de A a su rango por filas o por columnas y lo denotaremos por

$$\mathrm{rg}(\mathsf{A}).$$

$\triangleleft$

Corolario 6.7.11 Dos matrices equivalentes tienen el mismo rango. $\triangleleft$

Corolario 6.7.12 Si A es una matriz, entonces

$$\mathrm{rg}(\mathsf{A}) = \mathrm{rg}(\mathsf{A}^t).$$

$\triangleleft$

Ejemplo 6.7.13 En el ejemplo 6.7.4 veíamos que el rango por filas de

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 8 & -8 & -10 & 10 & 8 & 17 \\ 12 & -12 & -15 & 15 & 12 & 24 \\ 4 & -4 & -5 & 5 & 4 & 1 \\ 8 & -8 & -10 & 8 & 7 & 11 \\ -8 & 8 & 10 & -8 & -4 & -10 \end{pmatrix},$$

era 4.
Calculemos ahora su rango por columnas lo cual equivale a calcular el rango por filas de

$$\mathsf{A}^t = \begin{pmatrix} 8 & 12 & 4 & 8 & -8 \\ -8 & -12 & -4 & -8 & 8 \\ -10 & -15 & -5 & -10 & 10 \\ 10 & 15 & 5 & 8 & -8 \\ 8 & 12 & 4 & 7 & -4 \\ 17 & 24 & 1 & 11 & -10 \end{pmatrix}.$$

Para ello debemos calcular una forma escalonada por filas

$$\begin{pmatrix} 8 & 12 & 4 & 8 & -8 \\ -8 & -12 & -4 & -8 & 8 \\ -10 & -15 & -5 & -10 & 10 \\ 10 & 15 & 5 & 8 & -8 \\ 8 & 12 & 4 & 7 & -4 \\ 17 & 24 & 1 & 11 & -10 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_{21}^{1},f_{31}^{5/4},f_{41}^{-5/4},f_{51}^{-1},f_{61}^{-17/8}}$$

$$\begin{pmatrix} 8 & 12 & 4 & 8 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{15}{2} & -6 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_{26}} \begin{pmatrix} 8 & 12 & 4 & 8 & -8 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{15}{2} & -6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_{35}}$$

$$\begin{pmatrix} 8 & 12 & 4 & 8 & -8 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{15}{2} & -6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_{43}^{-2}} \begin{pmatrix} 8 & 12 & 4 & 8 & -8 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{15}{2} & -6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

que es una forma escalonada por filas de A^t. Tiene cuatro filas no nulas, luego

$$\mathrm{rg}_C(\mathsf{A}) = 4,$$

como corresponde a su rango por filas. $\triangleleft$

6.8 Inversión

Vamos ahora a precisar una noción que en realidad ya hemos manejado al estudiar las matrices elementales y los productos de ellas.

Definición 6.8.1 Diremos que una matriz cuadrada A de orden n es *inversible* si existe otra matriz $\mathsf{B}_{n\times n}$ tal que

$$\mathsf{AB} = \mathsf{BA} = \mathrm{I}_n.$$

Diremos que B es una inversa de A. $\triangleleft$

Proposición 6.8.2 La inversa de una matriz, si existe, es única.
Demostración:
Sea $\mathsf{A}_{n\times n}$ y supongamos que tiene dos inversas B_1 y B_2. Se verifica que

$$\mathsf{AB}_1 = \mathsf{B}_1\mathsf{A} = \mathsf{AB}_2 = \mathsf{B}_2\mathsf{A} = \mathrm{I}_n.$$

Por tanto

$$\mathsf{B}_1 = \mathsf{B}_1\mathrm{I}_n = \mathsf{B}_1(\mathsf{AB}_2) = (\mathsf{B}_1\mathsf{A})\mathsf{B}_2 = \mathrm{I}_n\mathsf{B}_2 = \mathsf{B}_2.$$

Luego si una matriz tiene dos inversas, han de ser iguales. De aquí se deduce la unicidad de la inversa. $\triangleleft$

Si una matriz es inversible, a su única inversa la denotaremos por A^{-1}. Se tiene entonces

$$\mathsf{AA}^{-1} = \mathsf{A}^{-1}\mathsf{A} = \mathrm{I}_n.$$

Ejemplo 6.8.3 Sea

$$\mathsf{A} := \begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 & -4 \\ 5 & 1 & 4 & 11 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Probaremos que A es inversible y que

$$\mathsf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 & -6 \\ -5 & -4 & 2 & 6 \\ 3 & 3 & -2 & -5 \\ -2 & -2 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$

utilizando la definición. Para ello multiplicamos

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 & -4 \\ 5 & 1 & 4 & 11 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 & -6 \\ -5 & -4 & 2 & 6 \\ 3 & 3 & -2 & -5 \\ -2 & -2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

y

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 & -6 \\ -5 & -4 & 2 & 6 \\ 3 & 3 & -2 & -5 \\ -2 & -2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 & -4 \\ 5 & 1 & 4 & 11 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

◁

Proposición 6.8.4 Si $A_{n\times n}$ es inversible entonces A^{-1} es inversible y

$$(A^{-1})^{-1} = A.$$

◁

Proposición 6.8.5 Sean A y B dos matrices cuadradas de orden n inversibles. Entonces AB es inversible y su inversa es

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Demostración:
Es muy sencilla

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n.$$

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}I_nB = B^{-1}B = I_n.$$

◁

Ejemplo 6.8.6 Sean

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 & -4 \\ 5 & 1 & 4 & 11 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Se tiene que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 & -6 \\ -5 & -4 & 2 & 6 \\ 3 & 3 & -2 & -5 \\ -2 & -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -4 & 3 \\ -1 & -2 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

y que

$$AB = \begin{pmatrix} 6 & -4 & 9 & -21 \\ -15 & 14 & -29 & 55 \\ -3 & 5 & -10 & 12 \\ -4 & 4 & -8 & 15 \end{pmatrix}, \quad B^{-1}A^{-1} = \begin{pmatrix} -27 & -27 & 14 & 50 \\ 17 & 15 & -9 & -24 \\ 7 & 6 & -4 & -9 \\ -8 & -8 & 4 & 15 \end{pmatrix}.$$

Ahora

$$(\mathsf{AB})(\mathsf{B}^{-1}\mathsf{A}^{-1}) = \begin{pmatrix} 6 & -4 & 9 & -21 \\ -15 & 14 & -29 & 55 \\ -3 & 5 & -10 & 12 \\ -4 & 4 & -8 & 15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -27 & -27 & 14 & 50 \\ 17 & 15 & -9 & -24 \\ 7 & 6 & -4 & -9 \\ -8 & -8 & 4 & 15 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

y

$$(\mathsf{B}^{-1}\mathsf{A}^{-1})(\mathsf{AB}) = \begin{pmatrix} -27 & -27 & 14 & 50 \\ 17 & 15 & -9 & -24 \\ 7 & 6 & -4 & -9 \\ -8 & -8 & 4 & 15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & -4 & 9 & -21 \\ -15 & 14 & -29 & 55 \\ -3 & 5 & -10 & 12 \\ -4 & 4 & -8 & 15 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

◁

Corolario 6.8.7 Si $\mathsf{A}_1, \dots, \mathsf{A}_s$ son matrices de orden n inversibles, entonces el producto

$$\mathsf{A}_1 \cdots \mathsf{A}_s,$$

es inversible y su inversa es

$$\mathsf{A}_s^{-1} \cdots \mathsf{A}_1^{-1}.$$

◁

Proposición 6.8.8 Si A es una matriz inversible, A^t también lo es. Además

$$(\mathsf{A}^t)^{-1} = (\mathsf{A}^{-1})^t.$$

Demostración:
El resultado se obtiene por simple comprobación de las fórmulas

$$\mathsf{A}^t(\mathsf{A}^{-1})^t = (\mathsf{A}^{-1}\mathsf{A})^t = \mathrm{I}_n^t = \mathrm{I}_n,$$

y

$$(\mathsf{A}^{-1})^t\mathsf{A}^t = (\mathsf{A}\mathsf{A}^{-1})^t = \mathrm{I}_n^t = \mathrm{I}_n.$$

◁

Ejemplo 6.8.9 Tenemos

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 & -4 \\ 5 & 1 & 4 & 11 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 & -6 \\ -5 & -4 & 2 & 6 \\ 3 & 3 & -2 & -5 \\ -2 & -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\mathsf{A}^t(\mathsf{A}^{-1})^t = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 0 & 1 \\ -4 & 11 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -5 & 3 & -2 \\ 3 & -4 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \\ -6 & 6 & -5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

y

$$(\mathsf{A}^{-1})^t\mathsf{A}^t = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 3 & -2 \\ 3 & -4 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \\ -6 & 6 & -5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 5 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 0 & 1 \\ -4 & 11 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Luego

$$(\mathsf{A}^{-1})^t = (\mathsf{A}^t)^{-1}.$$

$\triangleleft$

Corolario 6.8.10 Se tiene

1) Toda matriz elemental por filas (resp. por columnas) es inversible.

2) Cualquier producto de matrices elementales por filas (resp. por columnas) es inversible.

$\triangleleft$

Lema 6.8.11 La única matriz escalonada reducida por filas (resp. por columnas) cuadrada de orden n que es inversible, es I_n.

Demostración:

Demostraremos el resultado por filas, y por columnas se obtiene por trasposición.

Sea R una forma escalonada reducida por filas cuadrada de orden n e inversible. Sea p su número de pivotes. Si $p < n$, entonces R al menos su última fila nula. Luego Si $\mathsf{A}_{n\times n}$ es otra matriz de orden n, por definición del producto de matrices RA tiene su última columna nula. Pero como R es inversible se tiene que $\mathsf{RR}^{-1} = \mathrm{I}_n$, y por tanto I_n tendría su última columna nula, lo que es absurdo.

Luego hemos llegado a contradicción por suponer que $p < n$. Como siempre $p \leq n$, ha de darse forzosamente

$$p = n.$$

Luego $\mathrm{rg}_F(\mathsf{R}) = n$. Pero es fácil ver que por construcción la única forma escalonada reducida por filas cuadrada de orden n que puede tener tal rango n por filas es I_n. $\triangleleft$

Lema 6.8.12 Una matriz $\mathsf{A}_{n\times n}$ matriz es inversible $\iff$ su forma escalonada reducida por filas (resp. por columnas) es I_n
Demostración:
Demostraremos el resultado por filas, y por columnas se obtiene por trasposición.

Probemos primero $\Longleftarrow$.
Como I_n es la forma escalonada reducida por filas de A, se tiene que por 6.5.17, existe una matriz P que es producto de matrices elementales por filas (por tanto inversible), tal que

$$\mathrm{I}_n = \mathsf{PA}.$$

Como P es inversible, operando

$$\mathrm{I}_n = \mathsf{PA} \Longrightarrow \mathsf{P}^{-1}\mathrm{I}_n = \mathsf{P}^{-1}\mathsf{PA} \Longrightarrow \mathsf{P}^{-1} = \mathrm{I}_n\mathsf{A} \Longrightarrow \mathsf{P}^{-1} = \mathsf{A}.$$

Pero por 6.8.4, P^{-1} es inversible, luego lo es A.

Probemos ahora $\Longrightarrow$.
Sea R la forma escalonada reducida por filas de A. Por 6.5.17, existe una matriz P inversible tal que

$$\mathsf{R} = \mathsf{PA}.$$

Como P y A son inversibles, por 6.8.5, PA lo es y por tanto R es inversible. Pero también es una forma escalonada reducida por filas cuadrada de orden n, luego por el lema 6.8.11 se tiene que

$$\mathsf{R} = \mathrm{I}_n,$$

y así concluimos la demostración. $\triangleleft$

Corolario 6.8.13 Una matriz $\mathsf{A}_{n\times n}$ es inversible $\iff \mathrm{rg}(\mathsf{A}) = n$. $\triangleleft$

Teorema 6.8.14 Una matriz es inversible $\iff$ se puede expresar mediante un producto de matrices elementales por filas (resp. por columnas).
Demostración:
Probaremos el resultado para filas. Para columnas se deduce por trasposición a partir del de filas.

La implicación $\Longleftarrow$ es el resultado 6.8.10 de demostración trivial a partir de 6.8.7 y de las propiedades de las matrices elementales.

Probemos la implicación $\Longrightarrow$

Sea $A_{n\times n}$ inversible. Por el lema 6.8.12 la forma escalonada reducida por filas de A es I_n. Por 6.5.17, existe una matriz P que es producto de matrices elementales por filas (por tanto inversible), tal que

$$I_n = PA.$$

Si ahora examinamos la demostración del lema 6.8.12 se ve que esta última igualdad conduce a que

$$A = P^{-1}.$$

Pero P^{-1} es también producto de operaciones elementales por filas, luego A lo es.
◁

Corolario 6.8.15 Como consecuencia de 6.8.14, se verifican las siguientes propiedades. Sean $A_{n\times m}$, $P_{n\times n}$ inversible y $Q_{m\times m}$ inversible.

1) A es equivalente por filas a PA.

2) A y PA tienen el mismo rango por filas, y por tanto el mismo rango.

3) A es equivalente por columnas a AQ.

4) A y AQ tienen el mismo rango por columnas, y por tanto el mismo rango.

5) A es equivalente a PAQ.

6) A y PAQ tienen el mismo rango.

◁

Corolario 6.8.16 Sea $A_{n\times n}$. Se verifican

1) Si existe $B_{n\times n}$ tal que $AB = I_n$, entonces A es inversible y $A^{-1} = B$.

2) Si existe $B_{n\times n}$ tal que $BA = I_n$, entonces A es inversible y $A^{-1} = B$.

Demostración:
Probaremos sólo el primer punto. Para el segundo se razona análogamente.

Sea R la forma escalonada reducida de A. Por 6.5.17 existe una matriz inversible P tal que $PA{=}R$. Entonces

$$AB = I_n \Longrightarrow PAB = P \Longrightarrow RB = P.$$

Como P es inversible, por 6.8.13 tiene rango por filas n. Supongamos que $\operatorname{rg}_F(\mathsf{A}) < n$. Como $\operatorname{rg}_F(\mathsf{A}) = \operatorname{rg}_F(\mathsf{R})$ y R es escalonada por filas, ha de tener la última fila nula. Pero entonces RB también la tiene, luego P tiene su última fila nula. Entonces por 6.7.8, $\operatorname{rg}_F(\mathsf{P}) \leq n-1$, lo que es absurdo. Por tanto ha de suceder que

$$\operatorname{rg}(\mathsf{A}) = n,$$

y por 6.8.13 A es inversible. De la unicidad de la inversa se sigue que $\mathsf{A}^{-1} = \mathsf{B}$. $\triangleleft$

Gracias a este corolario para comprobar si dos matrices son inversas una de la otra, sólo es necesario multiplicarlas en una sola dirección y ver si sale I_n.

Ejemplo 6.8.17 Para probar que

$$\mathsf{A} := \begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 & -4 \\ 5 & 1 & 4 & 11 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

es inversible y que su inversa es

$$\mathsf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 & -6 \\ -5 & -4 & 2 & 6 \\ 3 & 3 & -2 & -5 \\ -2 & -2 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$

bastaría con hacer el producto

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 & -4 \\ 5 & 1 & 4 & 11 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 & -6 \\ -5 & -4 & 2 & 6 \\ 3 & 3 & -2 & -5 \\ -2 & -2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

y no el otro producto también como en 6.8.3. $\triangleleft$

6.8.1 Cálculo de la inversa

Algunos de los resultados anteriores tienen una gran relevancia práctica, pues proporcionan un método para calcular inversas utilizando operaciones elementales por filas (resp. columnas). Veamos por qué.

Algoritmo 6.8.18 Sea $\mathsf{A}_{n\times n}$ una matriz inversible. Aplicar el algoritmo 6.6.9 a A y luego el algoritmo 6.6.19. Con ello, tras realizar ciertas operaciones elementales por filas $f_1, \dots, f_k$ se obtiene como forma escalonada reducida por filas de A la matriz

I_n (por 6.8.11). Sean $\mathsf{F}_1, \ldots, \mathsf{F}_k$ las matrices elementales por filas correspondientes a las operaciones elementales por filas anteriores. Por la interpretación matricial de las operaciones elementales por filas, se tiene que

$$\mathsf{F}_k \cdots \mathsf{F}_1 \mathsf{A} = \mathrm{I}_n.$$

Entonces por el corolario 6.8.16, se tiene que

$$\mathsf{F}_k \cdots \mathsf{F}_1 = \mathsf{A}^{-1}.$$

Pero por la propia definición de las matrices elementales, podemos pues aplicar $f_1, \ldots, f_k$ a I_n en el mismo orden que a A y el resultado final será la inversa buscada. $\triangleleft$

Nota 6.8.19 Respecto del algoritmo 6.8.18 hay que tener en cuenta

1) Que sólo se pueden realizar operaciones elementales por filas, no mezclarlas con operaciones elementales por columnas.

2) Que es posible describir un algoritmo similar sólo haciendo operaciones elementales por columnas, sin mezclarlas con operaciones elementales por filas.

3) Que las operaciones elementales por filas conducentes a obtener la forma escalonada reducida por filas de A se aplican de manera simultánea a A y a I_n

4) Que no es necesario partir de una matriz inversible para empezar a aplicar el algoritmo. Si partimos de una matriz cuadrada cualquiera, al calcular su forma escalonada reducida por filas, si ésta es I_n, la matriz será inversible y la transformada de I_n será la inversa. En caso de no llegar a I_n, entonces A no era inversible.

5) Nótese además que si durante el proceso de reducción a forma escalonada por filas de una matriz cuadrada aparece un pivote fuera de la diagonal principal, su forma escalonada reducida por filas no puede ser la identidad, y por tanto podemos concluir ya que la matriz no era inversible.

$\triangleleft$

Ejemplo 6.8.20 Vamos a calcular la inversa de

$$\mathsf{A} := \begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 & -4 \\ 5 & 1 & 4 & 11 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

utilizando las ideas expuestas. Lo primero que haremos se construir una matriz 4×8 por bloques, añadiendo a A por la derecha I_4, y luego realizaremos operaciones elementales a esa nueva matriz de manera que busquemos la forma escalonada reducida por filas del bloque en el que está A.

$$\left(\begin{array}{rrrr|rrrr} -2 & -1 & -2 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 4 & 11 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{f_{14}} \left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 4 & 11 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & -2 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{f_{21}^{-5}, f_{31}^{-2}, f_{41}^{2}} \left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -4 & 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & -2 & -3 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{f_{42}^{1}}$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -4 & 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & -2 & -3 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 1 & 0 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{f_{34}} \left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -4 & 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & -3 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{f_{43}^{-2}} \left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -4 & 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{f_{3}^{-1}}$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -4 & 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{f_{23}^{1}, f_{13}^{-1}}$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{f_{34}^{-2}, f_{24}^{2}, f_{14}^{-1}}$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & -1 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 & -4 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 3 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

Como hemos obtenido I_4 en el bloque de la izquierda, el bloque de la derecha es A^{-1}. $\triangleleft$

6.9 Determinantes

La teoría de determinantes es importante por sí misma. Sin embargo nosotros sólo los utilizaremos como una herramienta auxiliar. Por esa razón elegimos su definición recursiva

Definición 6.9.1 Sea $\mathsf{A} = \left(a_{ij}\right)_{n\times n}$ un matriz cuadrada. Se define el *determinante* de A, y se denotará por $\det(\mathsf{A})$ o por $|\mathsf{A}|$ a un número definido recursivamente de la siguiente forma

1) Si $n = 1$, se define
$$\det(\mathsf{A}) := a_{11}.$$

2) Si $n > 1$, se define
$$\det(\mathsf{A}) := \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}a_{i1}\det(\mathsf{A}_{i1}),$$
donde A_{ij} es la submatriz cuadrada de orden $n-1$ de A que se obtiene suprimiendo la fila i y la columna j de A.

◁

Nota 6.9.2 Es fácil ver que para $n = 2$ y $n = 3$, la definición desarrollada proporciona las siguientes fórmulas
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$
$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =& a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} \\ & - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.\end{aligned}$$
◁

Ejemplo 6.9.3
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1\times 4 - 2\times 3 = -2.$$
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1\times 5\times 9 + 3\times 4\times 8 + 2\times 6\times 7 - 7\times 5\times 3 - 1\times 6\times 8 - 9\times 4\times 2 = 0.$$
◁

Proposición 6.9.4 Sean A y B matrices cuadradas de orden n. Se verifican las siguientes propiedades

1) $\det(\mathrm{I}_n) = 1$.

2) $\det(\mathsf{A}^t) = \det(\mathsf{A})$.

3) $\det(\mathsf{AB}) = \det(\mathsf{A})\det(\mathsf{B}) = \det(\mathsf{BA})$.

4) $\det(\mathsf{A}) \neq 0 \iff \mathsf{A}$ inversible. Además si A es inversible

$$\det(\mathsf{A}^{-1}) = \frac{1}{\det(\mathsf{A})}.$$

5) $\det(\mathsf{A}) \neq 0 \iff \mathrm{rg}(\mathsf{A}) = n$.

$\triangleleft$

La definición del determinante no sirve para calcularlo de manera eficiente cuando el orden de la matriz es grande. Para proporcionar un método efectivo para el cálculo de determinantes hemos de estudiar como les afectan las operaciones elementales así como algunas propiedades adicionales.

Proposición 6.9.5 Sean $n \in \mathbb{N}$, $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ con $i \neq j$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ con $\lambda \neq 0$. Se tiene

1) $\det(\mathsf{F}_{ij}^{\lambda}) = 1$.

2) $\det(\mathsf{F}_{i}^{\lambda}) = \lambda$.

3) $\det(\mathsf{F}_{ij}) = -1$.

4) $\det(\mathsf{C}_{ij}^{\lambda}) = 1$.

5) $\det(\mathsf{C}_{i}^{\lambda}) = \lambda$.

6) $\det(\mathsf{C}_{ij}) = -1$.

$\triangleleft$

Corolario 6.9.6 Sean $n \in \mathbb{N}$, $\mathsf{A}_{n\times n}$, $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ con $i \neq j$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ con $\lambda \neq 0$. Se tiene

1) Si

$$\mathsf{A} \xrightarrow{f_{ij}^{\lambda}} \mathsf{B}_1 \text{ y } \mathsf{A} \xrightarrow{c_{ij}^{\lambda}} \mathsf{B}_2,$$

entonces se tiene que

$$\det(\mathsf{A}) = \det(\mathsf{B}_1) = \det(\mathsf{B}_2).$$

2) Si

$$\mathsf{A} \xrightarrow{f_i^\lambda} \mathsf{B}_1 \text{ y } \mathsf{A} \xrightarrow{c_i^\lambda} \mathsf{B}_2,$$

entonces se tiene que

$$\det(\mathsf{A}) = \frac{1}{\lambda}\det(\mathsf{B}_1) = \frac{1}{\lambda}\det(\mathsf{B}_2).$$

3) Si

$$\mathsf{A} \xrightarrow{f_{ij}} \mathsf{B}_1 \text{ y } \mathsf{A} \xrightarrow{c_{ij}} \mathsf{B}_2,$$

entonces se tiene que

$$\det(\mathsf{A}) = -\det(\mathsf{B}_1) = -\det(\mathsf{B}_2).$$

Demostración:
Se sigue de 6.9.4, de 6.9.5 y de la interpretación matricial de las operaciones elementales. ◁

Corolario 6.9.7 Sea $\mathsf{A} = \left(a_{ij}\right)_{n\times n}$ se tiene que

- Para cada $i = 1, \ldots, n$, se verifica que

$$\det(\mathsf{A}) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\det(\mathsf{A}_{ij}).$$

- Para cada $j = 1, \ldots, n$, se verifica que

$$\det(\mathsf{A}) = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\det(\mathsf{A}_{ij}).$$

Demostración:
Se sigue de la definición de determinante, de 6.9.6 y de 6.9.4. ◁

Corolario 6.9.8 Sea $\mathsf{A}_{n\times n}$

1) Si A tiene una fila o una columna nula, su determinante es 0.

2) Si A tiene dos filas proporcionales o dos columnas proporcionales, su determinante es 0.

◁

Corolario 6.9.9 El determinante de una matriz triangular es el producto de los elementos de la diagonal principal. ◁

Algoritmo 6.9.10 Los resultados 6.9.6 y 6.9.7 nos proporcionan un método efectivo para calcular el determinante de una matriz no nula $\mathsf{A} = \left(a_{ij}\right)_{n\times n}$. Basta con tomar un elemento a_{ij} no nulo de A. Entonces, mediante a lo sumo $n-1$ operaciones elementales $f_{ki}^{-a_{kj}/a_{ij}}$, con $k = 1,\ldots,n$ y $k \neq i$ (resp. $c_{kj}^{-a_{ik}/a_{ij}}$, con $k = 1,\ldots,n$ y $k \neq j$) se consigue una matriz B que tiene ceros en todas las posiciones de la columna j (resp. de la fila i), salvo a_{ij}. Además

$$\det(\mathsf{A}) = (-1)^{i+j} a_{ij} \det(\mathsf{B}_{ij}).$$

Ahora se procede recursivamente con B_{ij} realizando el mismo proceso. En cada etapa, la matriz cuyo determinante hay que calcular reduce en una unidad su orden, luego el algoritmo acaba, pues o bien se llega a una matriz de orden 1 cuyo determinante se obtiene directamente, o bien en un paso del proceso la matriz que queda es nula, en cuyo caso, por 6.9.8, su determinante es cero.

El número de operaciones elementales que hay que realizar se puede reducir drásticamente si en cada paso se selecciona un elemento que pertenezca en una fila o columna que posea la mayor cantidad posible de ceros. ◁

Ejemplo 6.9.11 Vamos a utilizar el algoritmo 6.9.10 para calcular el siguiente determinante de la matriz

$$\begin{pmatrix} -10 & -5 & 4 & -18 & -4 & -22 \\ -5 & -2 & 0 & -9 & -12 & -15 \\ -5 & -1 & -4 & -5 & -23 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -4 & -4 \\ 0 & -1 & 5 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Como todos los elemento de la última fila salvo el $6,6$ son cero, desarrollamos por los elementos de esa fila

$$\det(\mathsf{A}) = (-1)^{6+6}(-1) \begin{vmatrix} -10 & -5 & 4 & -18 & -4 \\ -5 & -2 & 0 & -9 & -12 \\ -5 & -1 & -4 & -5 & -23 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & -1 & 5 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

en el determinante que queda, hay muchos ceros en la fila 4. Haciendo la operación elemental c_{54}^{-1} dejamos un sólo el elemento $4,4$ no nulo en dicha fila.

$$\det(\mathsf{A}) = -\begin{vmatrix} -10 & -5 & 4 & -18 & 14 \\ -5 & -2 & 0 & -9 & -3 \\ -5 & -1 & -4 & -5 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Ahora desarrollamos por los elementos de la cuarta fila

$$\det(\mathsf{A}) = -(-1)^{4+4}(-4)\begin{vmatrix} -10 & -5 & 4 & 14 \\ -5 & -2 & 0 & -3 \\ -5 & -1 & -4 & -18 \\ 0 & -1 & 5 & 1 \end{vmatrix}.$$

Hacemos las operaciones elementales f_{12}^{-2} y f_{12}^{-1}

$$\det(\mathsf{A}) = 4\begin{vmatrix} 0 & -1 & 4 & 20 \\ -5 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -4 & -15 \\ 0 & -1 & 5 & 1 \end{vmatrix},$$

y desarrollamos por la primera columna

$$\det(\mathsf{A}) = 4(-1)^{1+2}(-5)\begin{vmatrix} -1 & 4 & 20 \\ 1 & -4 & -15 \\ -1 & 5 & 1 \end{vmatrix}.$$

Ahora hacemos las operaciones elementales f_{12}^{1} y f_{32}^{1}

$$\det(\mathsf{A}) = 20\begin{vmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 1 & -4 & -15 \\ 0 & 1 & -14 \end{vmatrix},$$

y desarrollamos de nuevo por la primera columna

$$\det(\mathsf{A}) = 20(-1)^{1+2}1\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 1 & -14 \end{vmatrix}.$$

Pero el determinante que queda es de orden 2 y se calcula fácilmente. Su valor es -5, luego

$$\det(\mathsf{A}) = 100.$$

$\triangleleft$

Nota 6.9.12 Un método alternativo para calcular el determinante de una matriz $A_{n\times n}$ es reducir A a forma escalonada por filas (resp. por columnas), ya que las formas escalonadas por filas (resp. por columnas) de matrices cuadradas son triangulares superiores (resp. inferiores). Entonces aplicando 6.9.9, y llevando cuenta de cómo modifican el determinante las operaciones elementales realizadas, se tendría calculado el determinante de A.

Nótese además que si durante el proceso de reducción aparece un pivote que no está en la diagonal principal, ya se puede concluir que el determinante es cero. $\triangleleft$

6.9.1 Menores

Definición 6.9.13 Sea $A_{n\times m}$. Un *menor* de A de orden $s \in \mathbb{N}$ con $s < n$ y $s < m$, es un determinante de una submatriz cuadrada de A de orden $s \times s$. $\triangleleft$

Ejemplo 6.9.14 Sea

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 8 & -14 & 11 & 2 \\ -2 & -6 & 12 & -17 & -6 \\ -6 & -6 & 11 & -35 & -16 \\ -6 & -10 & 18 & -40 & -15 \end{pmatrix}.$$

El menor de orden 3 que se obtiene seleccionando las filas 1, 2 y 4 y las columnas 2, 4 y 5 de A es

$$\begin{vmatrix} -14 & 11 & 2 \\ 12 & -17 & -6 \\ 18 & -40 & -15 \end{vmatrix} = 234.$$

$\triangleleft$

Definición 6.9.15 Sea $A_{n\times n}$. Para cada $s = 1, \ldots, n$, el *menor principal* de A de orden s es el determinante de la submatriz de A resultante de fijar las filas $1, \ldots, s$ y las columnas $1, \ldots, s$. Se suele denotar por $\Delta_s(A)$. $\triangleleft$

Ejemplo 6.9.16 Sea

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 & -4 \\ -5 & -2 & 3 & 14 & -16 \\ 10 & 9 & -11 & -4 & 15 \\ 15 & 6 & -6 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Sus menores principales son

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -5 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -5 & -2 & 3 \\ 10 & 9 & -11 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ -5 & -2 & 3 & 14 \\ 10 & 9 & -11 & -4 \\ 15 & 6 & -6 & 4 \end{vmatrix} = 300.$$

$$\Delta_5 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 & -4 \\ -5 & -2 & 3 & 14 & -16 \\ 10 & 9 & -11 & -4 & 15 \\ 15 & 6 & -6 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

$\triangleleft$

Definición 6.9.17 Sea $\mathsf{A}_{n\times m}$. Sea $s \in \mathbb{N}$ con $s > 1$, $s < n$ y $s < m$. Diremos que un menor de A de orden $s-1$, *es orlado* por otro menor de A de orden s, si el menor de orden s se construye fijando una columna y una fila adicional de A sobre las filas y columnas de A que se fijaban para construir el menor de orden $s-1$. $\triangleleft$

Ejemplo 6.9.18 Sea

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -5 & -3 & 2 \\ -9 & 15 & 4 & -8 \\ -6 & 10 & -4 & -8 \\ -3 & 5 & 3 & 1 \\ -6 & 7 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Sea M el menor de orden 2 resultante de tomar las filas 2 y 4 y las columnas 1 y 3

$$M = \begin{vmatrix} -9 & 4 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} = -15.$$

El menor de orden 3 resultante de tomar las filas 1, 2 y 4 y las columnas 1, 2 y 3

$$\begin{vmatrix} 3 & -5 & -3 \\ -9 & 15 & 4 \\ -3 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 0,$$

orla a M. $\triangleleft$

Proposición 6.9.19 El rango de una matriz $\mathsf{A}_{n\times m}$ es r si y sólo si existe un menor M de orden r de A no nulo y, o bien $r = n$, o bien $r = m$ o bien todos todos los menores de orden $r + 1$ de A que orlan a M son cero. ◁

Ejemplo 6.9.20 La matriz

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 8 & 6 \\ 0 & -2 & -5 & -3 \\ -5 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix},$$

tiene rango 2 porque existe un menor de orden 2

$$\begin{vmatrix} -5 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -10,$$

distinto de 0, y todos los de orden 3 que le orlan

$$\begin{vmatrix} -5 & 3 & 8 \\ 0 & -2 & -5 \\ -5 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} -5 & 3 & 6 \\ 0 & -2 & -3 \\ -5 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0,$$

se anulan. ◁

Nota 6.9.21 Una observación importante respecto del cálculo del rango de una matriz es la siguiente. Como se ha visto el rango es invariante por operaciones elementales. Luego si sólo estamos interesados en el cálculo del rango de una matriz, la combinación de operaciones elementales por filas y columnas con la propiedad de orlado de menores, proporcionan un método rápido y eficiente para el cálculo del rango.

Lo que sucede a menudo es que además de calcular el rango de una matriz es necesario otro tipo de información que se extrae de la matriz, para cuya obtención pudiera no ser lícito la realización de operaciones elementales por filas y columnas mezcladas. Por ejemplo, si por alguna razón es preciso efectuar una reducción a forma escalonada por filas o por columnas. En este caso, como efecto colateral, obtenemos ya el rango. Por tanto la combinación de técnicas a la que aludíamos en el párrafo anterior en la práctica no es tan útil como pudiera parecer. ◁

6.10 Ejercicios

Ejercicio 6.1 Para cada una de las siguientes matrices, obtener su orden y decir de cuáles de los siguientes tipos son: matriz fila, matriz columna, matriz constante, matriz cero, matriz cuadrada. Escribir sus filas y columnas, y en el caso de matriz cuadrada obtener su diagonal y su traza. Calcular también la traspuesta.

a) $\begin{pmatrix} 5 & 6 & -3 & 1 & -5 & 3 \\ 4 & 4 & -4 & -1 & 1 & 8 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ 6 \\ 1 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} -4 & 7 & 2 & 5 & 7 & 9 & 0 \\ 8 & 8 & -4 & -3 & 3 & 5 & -5 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 8 & -2 & -4 \\ -9 & 2 & -7 \\ 4 & 8 & 3 \\ 1 & -6 & 2 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -4 \\ -8 \\ -7 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} -8 & -2 \\ -7 & 4 \\ 6 & 6 \\ 9 & 9 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} 1 \\ -9 \\ -9 \\ -5 \\ -5 \\ -8 \\ -5 \end{pmatrix}$

h) $\begin{pmatrix} -3 & 8 & -7 \\ -5 & 9 & -3 \\ 0 & -9 & -1 \end{pmatrix}$

i) $\begin{pmatrix} -5 & 0 & -5 & -8 & 2 & -8 & -5 \\ 8 & 1 & 0 & -1 & 8 & 7 & -1 \\ -5 & 1 & 3 & -4 & 5 & -4 & -4 \\ 5 & -2 & -5 & -1 & 1 & 6 & 2 \\ -4 & 7 & 8 & -1 & -7 & 7 & -6 \\ 9 & -6 & -9 & 1 & 9 & 6 & -1 \\ 4 & -1 & 0 & 3 & 4 & 5 & -5 \end{pmatrix}$

j) $\begin{pmatrix} -7 & -5 & 1 \\ -8 & 3 & -3 \\ -1 & 4 & -3 \\ -7 & 1 & -5 \\ -7 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

k) $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 9 & 1 & -2 & 1 & -2 \\ 8 & -4 & 9 & 4 & -3 & 2 & 1 \\ -4 & 8 & -9 & -6 & -3 & 7 & -6 \\ 5 & -2 & 0 & 2 & -3 & -5 & 8 \\ -8 & -2 & 8 & 6 & -5 & 9 & 0 \\ -3 & -9 & 6 & 4 & -5 & -2 & 7 \end{pmatrix}$

l) $\begin{pmatrix} -6 & -2 \\ -4 & 1 \\ 3 & 1 \\ -4 & 2 \\ 1 & 4 \\ 9 & 2 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}$

m) $\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

n) $\begin{pmatrix} -6 & 6 & 6 & 1 & 7 \\ 5 & 1 & -4 & 9 & 6 \\ -3 & 9 & -6 & -7 & -6 \\ -8 & -9 & -4 & -9 & 0 \\ 3 & 4 & -5 & -5 & 1 \\ 8 & -1 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

o) $\begin{pmatrix} -6 & 8 & -1 & 4 & -8 & -6 \\ 4 & -8 & 8 & -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

p) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 5 & -7 & -9 & 5 \end{pmatrix}$

q) $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 7 & -5 & -1 \\ 9 & 5 & 1 & -8 & 0 \end{pmatrix}$

r) $\begin{pmatrix} -8 & 6 & 7 & 9 & 8 \\ 1 & -7 & -7 & -9 & 3 \\ 8 & -6 & 4 & 4 & 3 \\ 6 & -5 & -2 & -9 & -5 \\ 5 & 6 & 3 & 8 & 2 \\ 9 & -1 & 0 & -9 & 9 \\ -6 & -3 & -7 & -5 & 0 \end{pmatrix}$

s) $\begin{pmatrix} -7 & -3 & 5 & -1 \\ 0 & -9 & -5 & -8 \\ 3 & 7 & 7 & -8 \\ 3 & 7 & 6 & -6 \end{pmatrix}$

t) $\begin{pmatrix} -4 & -8 & -6 \\ -6 & -1 & -7 \\ -5 & -8 & 4 \\ 7 & 3 & -2 \\ 0 & -6 & -8 \\ 6 & -3 & -4 \\ 5 & 7 & -7 \end{pmatrix}$

u) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 6 & -7 \\ -7 & -6 & -6 & -1 \end{pmatrix}$

v) $\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 & -2 & 8 & 8 \\ 2 & -1 & 9 & -3 & -4 & -1 \end{pmatrix}$

w) $\begin{pmatrix} 5 & -6 & 4 \\ -4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

x) $\begin{pmatrix} -8 & -7 & 8 \\ -3 & -4 & 3 \\ -4 & -1 & -6 \\ -6 & 1 & -4 \\ -3 & 5 & 4 \\ 9 & -2 & -2 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

y) $\begin{pmatrix} -9 & -6 & 2 & -7 & 4 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 9 & 3 & -4 & -9 & -2 \end{pmatrix}$

z) $\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}$

aa) $\begin{pmatrix} -7 & 1 & -1 & 8 & 7 \\ -7 & -8 & -3 & 9 & 7 \\ 2 & 1 & 6 & 1 & 2 \\ -7 & -9 & -1 & 3 & 5 \\ -2 & 4 & 1 & -3 & -9 \\ 8 & 4 & 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

Ejercicio 6.2 Decir a qué tipos de entre simétricas, antisimétricas, triangulares superiores, triangulares inferiores, diagonales, escalares, constantes, pertenecen cada una de las siguientes matrices. Obtener sus diagonales y su traza.

a) $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -2 & 8 & 2 & -6 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & -3 & -6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 & 7 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & 1 & -3 & -9 & 1 \\ 6 & 1 & 0 & 3 & -5 & -9 \\ 7 & -3 & 3 & 1 & 3 & -6 \\ -1 & -9 & -5 & 3 & -4 & -5 \\ 2 & 1 & -9 & -6 & -5 & -6 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} -7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -7 & -9 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & -3 & 5 & -7 & 0 \\ -3 & -1 & -8 & -9 & -9 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ -9 & -9 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & -4 & 0 \\ -4 & -8 & -5 & 2 \end{pmatrix}$

h) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

i) $\begin{pmatrix} 4 & -7 & 4 & 4 \\ -7 & -6 & -7 & -2 \\ 4 & -7 & 1 & 6 \\ 4 & -2 & 6 & -5 \end{pmatrix}$

j) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -9 & -3 & 0 & 0 \\ -3 & -9 & -1 & 0 \\ 7 & 3 & -8 & 9 \end{pmatrix}$

k) $\begin{pmatrix} 0 & 5 & -1 \\ -5 & 0 & -9 \\ 1 & 9 & 0 \end{pmatrix}$

l) $\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & -7 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & -2 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ -7 & -9 & 4 & 3 & -2 & 0 \\ 5 & -7 & -8 & -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

m) $\begin{pmatrix} 0 & -9 & 8 & -9 \\ -9 & 0 & -9 & 5 \\ 8 & -9 & -8 & 4 \\ -9 & 5 & 4 & -3 \end{pmatrix}$

n) $\begin{pmatrix} -8 & -6 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$

o) $\begin{pmatrix} -1 & 5 & -8 \\ 0 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}$

p) $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

q) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & -9 & 5 & 3 & 3 & -4 \\ 0 & 9 & -3 & 5 & -7 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & 6 & -8 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 2 & -9 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$

r) $\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & -5 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & 0 & -7 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 3 & 0 & -7 & 6 & 0 & 0 \\ 7 & 3 & -3 & -1 & 8 & -2 & 0 \\ -4 & 3 & -6 & -8 & -9 & -9 & -4 \end{pmatrix}$

s) $\begin{pmatrix} 0 & 5 & 4 & -5 \\ -5 & 0 & -1 & 9 \\ -4 & 1 & 0 & -1 \\ 5 & -9 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

t) $\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 7 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & -6 & -9 & -9 & 0 & 0 & 0 \\ -9 & 9 & 2 & 8 & 3 & 0 & 0 \\ 6 & 9 & -9 & -7 & 8 & -8 & 0 \\ 3 & 7 & -2 & -8 & -6 & -8 & -9 \end{pmatrix}$

u) $\begin{pmatrix} -8 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & 0 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

v) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

w) $\begin{pmatrix} 0 & -7 & -7 & 1 & -8 \\ 7 & 0 & -8 & -8 & -2 \\ 7 & 8 & 0 & 4 & 6 \\ -1 & 8 & -4 & 0 & 2 \\ 8 & 2 & -6 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

x) $\begin{pmatrix} 8 & 9 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

y) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -6 \\ 1 & 6 & -3 \\ -6 & -3 & -9 \end{pmatrix}$

z) $\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

aa) $\begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$

Ejercicio 6.3 Obtener la submatriz tomando las filas $1, 2, 4, 6$ y las columnas $3, 5, 6, 7, 9$ de la siguiente matriz

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 14 & 10 & -2 & 12 & 11 & -14 & -8 \\ 2 & -19 & -12 & 3 & -15 & -18 & 18 & 17 & 9 \\ 10 & 18 & 0 & 0 & -6 & 3 & -13 & -9 & -14 \\ -17 & -16 & 3 & -7 & 9 & -11 & 13 & 5 & -5 \\ -17 & 5 & -20 & 19 & 14 & 14 & -1 & -2 & 20 \\ -16 & -15 & -11 & 15 & 19 & 13 & 4 & 4 & 0 \\ -2 & -5 & 4 & 15 & 5 & -5 & 10 & -19 & -17 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 6.4 Calcular las siguientes operaciones matriciales

a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -8 & -5 & 3 \\ 9 & -1 & -8 & 9 & 2 \\ 8 & 0 & 4 & 2 & -7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 & 4 & -3 & -4 & -7 \\ 9 & 7 & -4 & -6 & -9 \\ -4 & 6 & -4 & -2 & 9 \end{pmatrix}$

b) $3\begin{pmatrix} 9 & 6 & -9 \\ -4 & -3 & -5 \\ 7 & -4 & 0 \\ -6 & -8 & -3 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} -2 & -8 & 3 \\ -6 & -5 & 3 \\ 5 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} -1 & -8 & 9 \\ -2 & 9 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -9 \\ -6 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} -3 & -3 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

e) $2\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

Ejercicio 6.5 Construir la forma escalonada por filas, la forma escalonada reducida por filas y calcular el rango de las siguientes matrices

a) $\begin{pmatrix} -5 & 7 & -6 \\ 5 & -8 & 6 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -26 & 3 & -16 \\ 2 & 1 & -15 & 1 & -9 \\ 2 & -4 & -8 & 3 & -7 \\ 6 & -7 & -27 & 8 & -21 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} -9 & 0 & 5 & -16 & 7 & -4 \\ -3 & 4 & 6 & -10 & 7 & -5 \\ 9 & 8 & 3 & 7 & 1 & -2 \\ -12 & -12 & -7 & -7 & -6 & 7 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 8 & 5 & 6 & -9 \\ -4 & -2 & -2 & 2 \\ 12 & 7 & 3 & -12 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 4 & -4 & 1 & 0 \\ -8 & 8 & -2 & 0 \\ -16 & 16 & -4 & 3 \\ -20 & 20 & -5 & 6 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} -4 & 18 & -14 & -7 \\ 1 & -4 & 5 & 6 \\ 4 & -18 & 13 & -2 \\ 3 & -14 & 9 & -3 \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & -5 & -3 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 10 & 7 \\ 1 & -3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

h) $\begin{pmatrix} -8 & 2 & 3 & 7 & -12 & 3 \\ -4 & 1 & 3 & 3 & -8 & 2 \\ -4 & 3 & 5 & 6 & -11 & 2 \\ 4 & 3 & 7 & 1 & -6 & 0 \end{pmatrix}$

i) $\begin{pmatrix} 5 & -3 & -6 & 4 & -7 \\ 0 & -4 & 11 & 4 & 7 \\ 10 & -14 & 15 & 12 & 5 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

j) $\begin{pmatrix} 2 & -17 & -22 \\ 2 & -19 & -25 \\ -2 & 15 & 20 \\ 2 & -5 & -5 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

k) $\begin{pmatrix} 8 & 5 & -1 & 34 \\ 12 & 7 & -3 & 50 \\ -20 & -12 & 4 & -82 \end{pmatrix}$

l) $\begin{pmatrix} 20 & -9 & 35 & -12 \\ -4 & 3 & -4 & 0 \\ 4 & 1 & 14 & -8 \end{pmatrix}$

m) $\begin{pmatrix} -2 & -24 \\ 6 & 57 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

n) $\begin{pmatrix} 5 & -3 & -2 & 1 \\ -25 & 15 & 10 & -5 \\ 15 & -9 & -6 & 3 \\ 5 & 2 & -5 & 1 \end{pmatrix}$

o) $\begin{pmatrix} -8 & 14 & 33 & -6 & 35 & 21 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & 8 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & 2 & -5 & -4 \\ 4 & -4 & -3 & -6 & -7 & 6 \\ 4 & -3 & 3 & -6 & 1 & 7 \end{pmatrix}$

p) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 14 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & 16 & 5 \\ -2 & -1 & -4 & -8 & 5 \\ 3 & 5 & -6 & 31 & 16 \end{pmatrix}$

q) $\begin{pmatrix} 6 & -6 & 8 \\ -21 & 21 & -29 \\ 36 & -36 & 50 \\ 6 & -6 & 10 \\ 3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$

r) $\begin{pmatrix} 0 & -3 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -8 & 4 \\ -3 & -2 & 7 & 1 \\ 3 & -4 & 1 & -5 \end{pmatrix}$

s) $\begin{pmatrix} -4 & -5 & 0 & 2 \\ 20 & 21 & -2 & 6 \\ -8 & -8 & 2 & -8 \\ 8 & 8 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

t) $\begin{pmatrix} 6 & 14 & 0 \\ -3 & -7 & 0 \\ 3 & 11 & 5 \\ 6 & 14 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

u) $\begin{pmatrix} -9 & -19 & 7 \\ -3 & -9 & 0 \\ 12 & 40 & 5 \end{pmatrix}$

v) $\begin{pmatrix} 9 & -19 & -5 & 15 & -4 & 13 \\ 3 & -11 & 9 & 6 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & -2 & -5 & 4 & 1 \\ 12 & -28 & -2 & 17 & 0 & 19 \end{pmatrix}$ **y)** $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 & 3 & -4 \\ 2 & -5 & -2 & -6 & -1 \\ 2 & 0 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 5 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

w) $\begin{pmatrix} 6 & 10 & 1 & 18 & 7 & 9 \\ 6 & 8 & -5 & 19 & -1 & 6 \\ -3 & -7 & -5 & -10 & -10 & -8 \end{pmatrix}$ **z)** $\begin{pmatrix} 8 & -4 & 17 & 8 \\ -4 & 3 & -13 & 1 \\ -8 & 2 & -12 & -12 \\ 0 & -2 & 5 & -4 \\ 8 & 0 & 5 & 17 \end{pmatrix}$

x) $\begin{pmatrix} -2 & 5 & -7 & 5 \\ 4 & 0 & -11 & -2 \\ -2 & 0 & 3 & 3 \\ -6 & 5 & 9 & 3 \\ -2 & 0 & 8 & -1 \end{pmatrix}$ **aa)** $\begin{pmatrix} -6 & -3 & 6 & -3 & 6 \\ -8 & -9 & 8 & -6 & 6 \\ 4 & 7 & -4 & 4 & -2 \end{pmatrix}$

Ejercicio 6.6 Construir la forma escalonada por filas, la forma escalonada reducida por filas y calcular el rango de las siguientes matrices

a) $\begin{pmatrix} -1/5 & 1/4 & -25/6 & -38/3 & -1 \\ -1/5 & 1/4 & -8/3 & -26/3 & -2/5 \\ 0 & 0 & 0 & -4/5 & 3 \\ 1/5 & -1/4 & -1/3 & 22/15 & -53/10 \\ 0 & -1/2 & 3/4 & -3 & -1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -6 & 9/2 & 7/5 \\ -13 & 10 & 16/5 \\ 1 & -1/2 & 3/5 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} 1/5 & 0 \\ 2/5 & 3/4 \\ -2/5 & -1/2 \\ 1/5 & 3/4 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 4/3 & -72/5 & 56/3 & -2 & 4/3 \\ -2 & 108/5 & -28 & 3 & -2 \\ -2/3 & 38/5 & -26/3 & 15/4 & 8/3 \\ -1/3 & 18/5 & -14/3 & 1/2 & -1/3 \\ -1/3 & 22/5 & -10/3 & 5 & 16/3 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} -3/5 & 2/3 & 1 & 15/4 & 1 & -11/20 \\ -6/5 & 4/3 & 2 & 7/2 & 3/2 & -27/10 \\ -6/5 & 4/3 & 2 & 7/2 & 2 & -19/10 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} -2 & 25/12 & -5/2 \\ 1 & 1/12 & -5/4 \\ -2 & 4/3 & -3/4 \end{pmatrix}$ **g)** $\begin{pmatrix} -3/2 & -1/5 & -7 & 1 & -4/5 \\ 3/2 & 1/5 & 3 & 1 & -6/5 \\ -9/2 & -3/5 & -9 & -3 & 4 \\ 0 & -2 & 9/2 & -11/4 & 4/5 \end{pmatrix}$

h) $\begin{pmatrix} 0 & -3 & -13/2 & -7/15 & 27/4 \\ 0 & -1 & -2 & -4/15 & 5/2 \\ 0 & -2 & -9/2 & -1/5 & 17/4 \\ 0 & -2 & -9/2 & -1/5 & 17/4 \end{pmatrix}$ **i)** $\begin{pmatrix} 6 & -8/5 & 6 & -19/4 \\ -4 & 6/5 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3/2 \\ -4 & 0 & 4 & 1/2 \\ -2 & 0 & 2 & 1/4 \end{pmatrix}$

j) $\begin{pmatrix} 6 & -2 & 9/4 & -3/5 & 39/10 & 7/4 \\ -8 & 8/3 & -3 & 4/5 & -26/5 & -7/3 \\ 8 & -8/3 & 9/4 & -2/5 & 22/5 & 2 \end{pmatrix}$

k) $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/4 & -3/2 & -1/10 & -11/5 & 6/5 \\ -1/2 & 3/4 & 5/2 & -9/10 & 31/5 & 2/5 \\ -1/2 & 3/4 & 1 & 3/5 & 1/5 & -2 \end{pmatrix}$

l) $\begin{pmatrix} -4 & 7 & -24/5 & -8 & 27/5 & -3 \\ -8/3 & 14/3 & -16/5 & -16/3 & 18/5 & -2 \\ -2 & 4 & 2/5 & 1/6 & 13/10 & -29/5 \\ -2 & 4 & -13/5 & -23/6 & 14/5 & -9/5 \end{pmatrix}$

m) $\begin{pmatrix} -1/2 & 2/3 & 4/5 & -17/3 & -46/15 \\ 2 & -8/3 & -16/5 & 68/3 & 184/15 \\ -3/2 & 2 & 12/5 & -17 & -46/5 \\ -1/2 & 0 & 0 & 1/3 & -2/5 \\ 1/2 & -1 & -6/5 & 26/3 & 22/5 \end{pmatrix}$

n) $\begin{pmatrix} 1 & -2/5 & -4/3 & 1 & -1/2 \\ 1 & -19/10 & -1/3 & -3 & -5/2 \\ 4 & -23/5 & -10/3 & -4 & -6 \end{pmatrix}$

o) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & -11/2 & 14/5 & -28/5 \\ 1/5 & 0 & 19/20 & -4/5 & 7/5 \\ -2/5 & 0 & -43/20 & 6/5 & -12/5 \\ -1/5 & -1 & -1/5 & 1 & -1 \\ -1/5 & 0 & -6/5 & 2/5 & -3/5 \end{pmatrix}$

p) $\begin{pmatrix} 1 & 20/3 & 5 & 13/3 & -13/2 & 3 \\ -6 & -20 & -63/2 & -11/3 & 3 & -191/10 \\ -1 & -20/3 & -9 & -10/3 & 9/2 & -14/5 \\ -2 & -28/3 & -19/2 & -5 & 7 & -63/10 \end{pmatrix}$

q) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -3/2 & 1/3 & -1 \\ -16/5 & -9 & 7 & 14/5 & 47/2 \\ -12/5 & -20/3 & 5 & 29/15 & 15 \\ 4/5 & 2 & 1/2 & -1/30 & 1/4 \\ -4/5 & -2 & -1/2 & 8/15 & -1 \end{pmatrix}$

r) $\begin{pmatrix} -1 & 2/3 & -1 & -3/4 & 3/4 & 109/30 \\ 0 & 0 & -1 & 5/4 & -1/4 & 3/10 \\ -1 & 2/3 & 0 & -2 & 1 & 10/3 \\ -1 & 2/3 & 0 & -11/4 & 5/4 & -1/6 \\ 1 & -2/3 & -1 & 13/4 & -5/4 & -31/30 \end{pmatrix}$

s) $\begin{pmatrix} -4 & 19/4 & -13/10 & 13 \\ 4/3 & -7/4 & 3/10 & -15/2 \\ 4/3 & -3/2 & 1/2 & -11/4 \\ -8/3 & 13/4 & -4/5 & 41/4 \\ 8/3 & -13/4 & 4/5 & -11 \end{pmatrix}$

t) $\begin{pmatrix} -4 & -15/4 & 9/4 & -2 & -21/20 & 0 \\ -12/5 & -9/4 & 3/4 & -3/5 & -3/4 & 0 \\ 12/5 & 9/4 & -7/4 & 8/5 & 11/20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -8/5 & -3/2 & 3/2 & -7/5 & -3/10 & 0 \end{pmatrix}$

u) $\begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 13/4 & -14/3 \\ -1/2 & 1/2 & -13/4 & 14/3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1/2 & -1/2 & 5/4 & -2/3 \\ -1/2 & -1 & 7/2 & -10/3 \end{pmatrix}$

w) $\begin{pmatrix} -2 & 1/4 & 7/2 & 8/5 \\ -8/3 & 3/5 & 3 & 2 \\ 4/3 & -3/10 & 1/2 & -6/5 \\ -8 & 7/5 & 23/2 & 32/5 \end{pmatrix}$

v) $\begin{pmatrix} 1 & 3/5 & -5/3 & -4 \\ 3 & 6/5 & 7/3 & -13 \\ -3 & -6/5 & -13/3 & 14 \end{pmatrix}$

x) $\begin{pmatrix} 14 & -13/15 & -19/6 \\ 4 & -2/15 & -2/3 \\ -2 & 7/15 & -5/6 \\ 2 & 1/3 & -3/2 \end{pmatrix}$

y) $\begin{pmatrix} 0 & -3/4 & -3/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 3/5 & -1 & 1/2 & 1/5 \\ -3/2 & 33/10 & 0 & 3/2 & 3/5 \\ -1/2 & 27/20 & 1/2 & 1/2 & 1/5 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -3/2 \end{pmatrix}$

z) $\begin{pmatrix} 0 & -3 & 1/2 & -1/2 & -5/12 & -3/2 \\ -1/4 & -2 & 1/2 & 1/2 & -5/3 & 31/10 \\ 1/4 & 14 & -5/2 & 5/2 & 37/12 & 49/10 \\ 0 & 12 & -2 & 3 & 65/12 & 41/5 \\ 1/4 & -1 & 0 & -1 & 5/4 & -8/5 \end{pmatrix}$

aa) $\begin{pmatrix} -6 & -13/2 & 21/5 & 22 & -13/2 & 31/3 \\ -4 & -3 & 13/5 & 12 & -5 & 20/3 \\ -2 & -3/2 & 4/5 & 7 & -1/2 & 7/3 \\ -2 & 5/2 & -4/5 & 1 & 3/2 & -1/3 \end{pmatrix}$

Ejercicio 6.7 Calcular una forma escalonada por filas y el rango de las siguientes matrices dependiendo de los parámetros.

a) $\begin{pmatrix} -2a+4 & -a(-1+a) & 1 & 2a+4 \\ a-2 & a(-1+a) & 0 & -2a-3 \\ -4a+8 & -2a(-1+a) & 2 & 8+3a \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -6b & -6b(b+1) & 4a^2-2+a \\ 3b & 3b(b+1) & -3a-3a^2+1 \\ -4b & -4b(b+1) & (1+a)(3a-1) \\ -3b & -3b(b+1) & 2a^2-1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} a & a(b-c) & -c \\ 6a & 6a(b-c)+5b & -4c \\ a & a(b-c)+2b & 0 \end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix} b & -2 & 0 & -a^2+b & -1 \\ 0 & 1 & -a & -a+1 & 0 \\ b & 0 & a & a+2 & 0 \\ b & 2 & -2a & -2a+4 & 0 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} a & a^2 & (1+a)(-1+2a) & 1 \\ a & (-1+a)(1+a) & -1+2a & -2 \\ -2a & -2a^2+1 & 2-4a & 3 \\ -3a & -3(-1+a)(1+a) & 3-6a & 6 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & c(a+b) \\ b-a & c-b & a-c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ac \\ 0 & -1 & 1 & -2ac-bc+ab \\ b-a & -1+c-b & 1+a-c & -c(a+b) \end{pmatrix}$

Ejercicio 6.8 Calcular la forma escalonada reducida por filas y el rango de las siguientes matrices. Calcular la inversa de aquellas que sean inversibles.

a) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 & -2 & 1 & -5 \\ -4 & 5 & -4 & 10 & -8 & 10 \\ 0 & -1 & 14 & -7 & 4 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 5 \\ -8 & 8 & 10 & 15 & -4 & -5 \\ 4 & -4 & -5 & -10 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 15 & -13 & 35 & -16 & 23 \\ 0 & -1 & 5 & -2 & 2 \\ -5 & 4 & -10 & 4 & -7 \\ 5 & -4 & 9 & -5 & 6 \\ -5 & 2 & -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & -2 \\ 8 & 24 & -5 \\ -10 & -29 & 8 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -4 & -16 & -20 \\ -2 & -8 & -9 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 6 & 7 & 7 & -14 & 12 \\ 9 & 6 & 7 & -7 & 10 \\ 9 & 9 & 9 & -18 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 7 & -6 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} -9 & -6 & -11 & -13 & -6 \\ 3 & 2 & 5 & 11 & 2 \\ -3 & 1 & -1 & -12 & 6 \\ -9 & -6 & -12 & -18 & -6 \\ -3 & 1 & 0 & -7 & 2 \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} 3 & 9 & 2 & -12 & -2 & 11 \\ -4 & -12 & -1 & 16 & 4 & -14 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 4 & 2 \\ -3 & -9 & 3 & 12 & 6 & -9 \\ -6 & -18 & 1 & 24 & 8 & -20 \\ 1 & 3 & -1 & -4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

h) $\begin{pmatrix} 3 & -6 & -6 & -12 \\ -12 & 20 & 21 & 38 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ -6 & 8 & 9 & 17 \end{pmatrix}$

i) $\begin{pmatrix} 0 & -2 & -8 & -10 \\ 8 & 20 & 9 & 7 \\ 10 & 21 & -4 & -11 \\ -8 & -18 & -1 & 6 \end{pmatrix}$

j) $\begin{pmatrix} -5 & 2 & -14 \\ 15 & -6 & 28 \\ -25 & 10 & -18 \end{pmatrix}$

k) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & -3 & -1 & 12 & 4 \\ 0 & -4 & 0 & 17 & 8 \\ -2 & 0 & -1 & 3 & -5 \\ 2 & 0 & 1 & -3 & 5 \end{pmatrix}$

l) $\begin{pmatrix} 5 & 5 & -6 & 12 \\ -1 & -7 & 2 & 9 \\ -2 & -9 & 4 & 4 \\ -1 & 8 & 0 & -17 \end{pmatrix}$

m) $\begin{pmatrix} 5 & -2 & -5 & 0 & 8 & -8 \\ 10 & 6 & -12 & 4 & 12 & -21 \\ -5 & 7 & 5 & 0 & -7 & 7 \\ -5 & -3 & 5 & -2 & 0 & 11 \\ -5 & -3 & 5 & -1 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 6 & 1 \end{pmatrix}$

n) $\begin{pmatrix} -2 & 4 & 3 & 7 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 5 & 3 & 5 & 3 & 5 & -3 \\ 0 & -2 & 0 & 4 & -6 & -10 & 8 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & -3 & -5 & 4 \\ 0 & -3 & 0 & 6 & -9 & -15 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

o) $\begin{pmatrix} -4 & -3 & 5 & -1 & 4 & -4 \\ -4 & -1 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & -4 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

p) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ -8 & -2 & -21 \\ -2 & 0 & -6 \end{pmatrix}$

q) $\begin{pmatrix} 10 & 7 & -2 & 7 \\ -10 & -7 & 2 & -12 \\ -5 & -3 & 1 & -4 \\ -10 & -6 & 2 & -8 \end{pmatrix}$

r) $\begin{pmatrix} 10 & 4 & -2 & 3 & -10 & -14 \\ 15 & 12 & 6 & -6 & -2 & -15 \\ 20 & 16 & 8 & -7 & 0 & -20 \\ 10 & 6 & 1 & -1 & -7 & -11 \\ 5 & 4 & 2 & -1 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & -2 \end{pmatrix}$

s) $\begin{pmatrix} -4 & 31 & 18 \\ 0 & 20 & 12 \\ 0 & -16 & -10 \end{pmatrix}$

t) $\begin{pmatrix} -3 & -2 & -4 & -1 & -1 & -6 \\ -6 & -4 & -11 & -8 & -6 & -8 \\ 0 & 0 & -3 & -6 & -4 & 4 \\ -9 & -7 & -13 & -8 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & -4 \\ -3 & -2 & -4 & -4 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

aa) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & -1 & -5 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -8 & 6 & 10 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & -2 & -10 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & -2 & -10 & 6 & -7 \\ 1 & -4 & 0 & 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & -9 & 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

u) $\begin{pmatrix} 15 & 9 & 12 \\ 5 & 4 & 4 \\ 20 & 13 & 16 \end{pmatrix}$

v) $\begin{pmatrix} -10 & -7 & 0 & 6 & -6 & 20 \\ 10 & 6 & -3 & 0 & 0 & -14 \\ 20 & 10 & -7 & 12 & -10 & -4 \\ 10 & 4 & -4 & 14 & -11 & 11 \\ -5 & -3 & -1 & -2 & -5 & 2 \\ 5 & 3 & 1 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

w) $\begin{pmatrix} 9 & 8 & -4 & -2 & 11 \\ 0 & 0 & -2 & 5 & -3 \\ 3 & 3 & -3 & -4 & 4 \\ 9 & 8 & -4 & -7 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$

x) $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -5 & 2 & -1 & 0 & 7 \\ 0 & 2 & -5 & 2 & -1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 2 & -4 \\ 3 & 0 & 9 & -2 & 6 & -1 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 6 & 0 & 14 & -5 & 10 & 3 & -13 \end{pmatrix}$

y) $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 8 & -1 \\ 0 & 5 & -1 & 6 \\ 2 & 5 & 1 & 9 \\ 2 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

z) $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 5 & -7 \\ -1 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & -2 & 10 & -2 \\ -1 & 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}$

Ejercicio 6.9 Calcular los siguientes determinantes

a) $\begin{vmatrix} -9 & -8 & -16 & 3 \\ 3 & 3 & 7 & 0 \\ -3 & -2 & -3 & 1 \\ -3 & -3 & -8 & -4 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} -21 & -36 & -32 & -47 \\ -24 & -42 & -37 & -55 \\ 9 & 16 & 14 & 21 \\ 51 & 88 & 78 & 115 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} -3 & -4 & -4 & -4 & -6 & -1 \\ -3 & -8 & -8 & -8 & -11 & -2 \\ 0 & -4 & -4 & -4 & -5 & -1 \\ 3 & 8 & 6 & 8 & 7 & -1 \\ 0 & -4 & -6 & -5 & -10 & -3 \\ 0 & 4 & 2 & 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & -2 \\ -5 & -3 & -5 \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 7 & 15 \end{vmatrix}$

f) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 6 & 14 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -19 & -9 \\ 2 & 2 & 1 & 8 & 12 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 7 & 6 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & -2 & -4 \end{vmatrix}$

g) $\begin{vmatrix} -7 & -35 & -10 & 0 \\ -16 & -80 & -23 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 5 & 25 & 6 & 0 \end{vmatrix}$

h) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

i) $\begin{vmatrix} 0 & -2 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & -5 & -4 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & -3 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

j) $\begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & -2 & 0 & -5 \\ 4 & -11 & -3 & 0 & -3 \\ -2 & 5 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$

k) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 4 \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & 8 \end{vmatrix}$

l) $\begin{vmatrix} 9 & 15 & 7 & 14 & 7 \\ -12 & -20 & -9 & -20 & -10 \\ -3 & -10 & -5 & -8 & -8 \\ -3 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}$

m) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 & 41 & 9 & 27 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -2 & -2 \\ -1 & -2 & -4 & -10 & -4 & -9 \\ 1 & 4 & 5 & 10 & -2 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 18 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$

n) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 9 \\ -4 & -8 & -32 \\ -2 & -4 & -14 \end{vmatrix}$

o) $\begin{vmatrix} -1 & 4 & 21 & -2 \\ -1 & -5 & -3 & -5 \\ 2 & 1 & -15 & 5 \\ 3 & -6 & -41 & 5 \end{vmatrix}$

p) $\begin{vmatrix} 0 & -5 & 1 & -3 & -2 & -2 \\ -12 & -15 & -12 & -15 & -9 & -9 \\ -4 & 5 & -6 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 1 & -3 & -2 & -2 \\ -4 & -5 & -4 & -5 & -3 & -3 \\ 16 & 20 & 14 & 18 & 10 & 9 \end{vmatrix}$ **r)** $\begin{vmatrix} 8 & -2 & 0 & -15 \\ -16 & 3 & -4 & 18 \\ 4 & -1 & 0 & -7 \\ 8 & -1 & 3 & -6 \end{vmatrix}$

q) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 4 & 7 \\ -2 & -10 & -9 & -8 \\ 2 & 10 & 8 & 3 \\ -5 & -24 & -21 & -17 \end{vmatrix}$ **s)** $\begin{vmatrix} 3 & 6 & 4 & 5 \\ 6 & 12 & 9 & 18 \\ 9 & 20 & 15 & 26 \\ 9 & 20 & 16 & 32 \end{vmatrix}$

t) $\begin{vmatrix} 3 & -8 & -5 & -2 & -6 & -7 \\ 0 & 5 & 5 & 3 & 5 & 5 \\ 0 & -10 & -10 & -6 & -10 & -13 \\ 6 & -11 & -5 & -1 & -7 & -9 \\ -3 & 13 & 14 & 9 & 14 & 13 \\ 3 & -3 & 0 & 1 & -1 & -2 \end{vmatrix}$

Ejercicio 6.10 Calcular los siguientes determinantes

a) (Determinante de Vandermonde) Sean $n \in \mathbb{N}$ y $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

b) Sea $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

c) Sea $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{vmatrix} \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \binom{n-2}{0} & \binom{n-2}{1} & \binom{n-2}{2} & \cdots & \binom{n-2}{n-2} & 0 \\ \binom{n-1}{0} & \binom{n-1}{1} & \binom{n-1}{2} & \cdots & \binom{n-1}{n-2} & \binom{n-1}{n-1} \\ \binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \cdots & \binom{n}{n-2} & \binom{n}{n-1} \end{vmatrix}$$

d) Sea $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{vmatrix} 1 & n & n & \cdots & n \\ n & 2 & n & \cdots & n \\ n & n & 3 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n \end{vmatrix}$$

e) Sean $n \in \mathbb{N}$ y $x, c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$.

$$\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & x & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & x & -1 \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_{n-3} & c_{n-2} & c_{n-1} & x + c_n \end{vmatrix}$$

Ejercicio 6.11 Sea A una matriz cuadrada tal que $\mathsf{A}^t = \mathsf{A}^{-1}$ (matriz ortogonal). Probar que entonces que o bien $\det(\mathsf{A}) = 1$ o bien $\det(\mathsf{A}) = -1$.

Ejercicio 6.12 Sea A una matriz cuadrada. Probar que si existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\mathsf{A}^m = \mathsf{0}$, entonces $\det(\mathsf{A}) = 0$. ¿Es cierto el recíproco?

Ejercicio 6.13 Sean A y B dos matrices inversibles. Probar que

$$\det(\mathsf{A}^{-1} + \mathsf{B}^{-1}) = \frac{\det(\mathsf{A} + \mathsf{B})}{\det(\mathsf{AB})}.$$

Ejercicio 6.14 Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$. Definimos el determinante de Vandermonde de a, b, c como

$$V(a, b, c) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}.$$

Sean $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ no nulos y distintos entre si y sean $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{R}$ cualesquiera. Probar

a)

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{\beta_i}{\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{3}(\alpha_i-\alpha_j)} = \frac{1}{V(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}.$$

b)

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{\alpha_i^k}{\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{3}(\alpha_i-\alpha_j)} = \begin{cases} 1, & \text{si } k=2 \\ 0, & \text{si } k=0,1 \\ \dfrac{1}{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}, & \text{si } k=-1 \end{cases}.$$

Ejercicio 6.15 Calcular el rango de las siguientes matrices

a) $$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 & -13 \\ 0 & -9 & 2 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ -1 & -2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

b) $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & 6 & 8 \\ 9 & 6 & 9 & 12 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & -4 & -6 & -8 \end{pmatrix}$$

c) $$\begin{pmatrix} 10 & 8 & 3 & 2 & 11 \\ -5 & -3 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 15 & 11 & 4 & 11 & 8 \end{pmatrix}$$

d) $$\begin{pmatrix} 3 & -8 & 66 & 30 & 46 \\ 0 & 20 & -83 & -39 & -61 \\ 3 & -8 & 78 & 36 & 55 \\ 0 & 8 & -22 & -10 & -16 \end{pmatrix}$$

e) $$\begin{pmatrix} 10 & 8 & 10 & 2 \\ 5 & 4 & 5 & 1 \\ -5 & -4 & -5 & -1 \\ 10 & 8 & 10 & 2 \\ 5 & 4 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

f) $$\begin{pmatrix} 0 & 8 & 16 & 40 & 40 \\ 0 & -7 & -14 & -35 & -35 \\ 0 & -6 & -12 & -30 & -30 \end{pmatrix}$$

g) $$\begin{pmatrix} -1 & -4 & -5 & -7 & -6 \\ 2 & 8 & 10 & 14 & 12 \\ -1 & -4 & -2 & -4 & -3 \\ -8 & -24 & -17 & -27 & -19 \\ -4 & -12 & -7 & -12 & -8 \end{pmatrix}$$

h) $$\begin{pmatrix} 8 & 15 & 16 & 7 & 14 \\ -4 & -9 & -9 & -4 & -9 \end{pmatrix}$$

i) $$\begin{pmatrix} 0 & -10 & -2 & -54 & -30 \\ 0 & 5 & 1 & 22 & 13 \\ 0 & 5 & 1 & 27 & 15 \end{pmatrix}$$

j) $$\begin{pmatrix} 6 & 10 & -18 & -22 & -6 & -20 \\ 3 & 5 & -9 & -11 & -3 & -10 \\ 0 & -10 & 2 & 2 & -6 & 3 \\ 0 & 5 & 4 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & -5 & 1 & 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 6.16 Probar que si A es una matriz cuadrada e inversible verificando $A^2 = A$, entonces A es la matriz identidad.

Capítulo 7

Sistemas de ecuaciones lineales

7.1 Introducción

En 6.4.6 definíamos qué era una combinación lineal de matrices. Para poder tener tal noción era preciso contar con una suma y un producto por escalares. Pues bien, podemos considerar *combinaciones lineales* para otro tipo de objetos, siempre que *tenga sentido*. En el Capítulo 10 precisaremos de manera rigurosa bajo qué condiciones *tiene sentido* una combinación lineal. Por lo que respecta a la materia que nos ocupa en este momento, sea $n \in \mathbb{N}$, sean $x_1, \ldots, x_n$ indeterminadas, variables o *incógnitas*, y sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Podemos considerar la *combinación lineal* de indeterminadas

$$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n,$$

que *tiene sentido* al menos como polinomio. Si ahora tenemos $b \in \mathbb{R}$, podemos construir

$$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = b,$$

a lo que llamaremos *ecuación lineal* con n incógnitas. Si agrupamos varias de estas ecuaciones tendremos un *sistema de ecuaciones lineales*.

Definición 7.1.1 Sean $n, m \in \mathbb{N}$, sean $x_1, \ldots, x_n$ indeterminadas, sea $\mathsf{A} = \left(\alpha_{ij}\right)_{m\times n}$ una matriz y $b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{R}$. Un sistema de ecuaciones lineales con m ecuaciones y n incógnitas es una expresión de la forma

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} \alpha_{11}x_1 & + & \alpha_{12}x_2 & + & \cdots & + & \alpha_{1n}x_n & = & b_1 \\ \alpha_{21}x_1 & + & \alpha_{22}x_2 & + & \cdots & + & \alpha_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1}x_1 & + & \alpha_{m2}x_2 & + & \cdots & + & \alpha_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right. . \tag{7.1}$$

A las variables $x_1, \ldots, x_n$ se les llama las *incógnitas del sistema*, a la matriz A la *matriz del sistema* o *matriz de coeficientes del sistema*, a los elementos de A los *coeficientes del sistema* y a

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

el *término independiente* del sistema. ◁

Ejemplo 7.1.2 El siguiente ejemplo tiene 6 ecuaciones y 6 incógnitas

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcrcr} 3x_1 & + & 4x_2 & - & 7x_3 & - & x_4 & + & 2x_5 & + & x_6 & = & -1 \\ & & 3x_2 & & & + & x_4 & + & 4x_5 & & & = & 3 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 5x_4 & & & & & = & 0 \\ x_1 & - & 7x_2 & & & & & - & 3x_5 & - & x_6 & = & 4 \\ -2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & - & 3x_4 & + & x_5 & + & 2x_6 & = & -2 \\ & & 3x_2 & - & x_3 & + & x_4 & & & + & x_6 & = & -7 \end{array}\right. . \tag{7.2}$$

El siguiente ejemplo tiene 5 ecuaciones y 3 incógnitas

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & 2z & = & 0 \\ -x & + & 3y & + & 3z & = & 2 \\ & & y & + & z & = & -1 \\ -2x & + & y & - & 2z & = & -2 \\ 3x & & & + & 5z & = & 3 \end{array}\right. . \tag{7.3}$$

El siguiente ejemplo tiene 2 ecuaciones y 5 incógnitas

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 2x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & - & 2x_4 & + & x_5 & = & 3 \\ x_1 & & & & & - & x_4 & - & x_5 & = & 4 \end{array}\right. . \tag{7.4}$$

◁

Definición 7.1.3 Un sistema de ecuaciones lineales como (7.1) se dice que es *homogéneo* si el término independiente es nulo, es decir si

$$b_1 = \cdots = b_m = 0.$$

◁

Definición 7.1.4 Si en un sistema de ecuaciones lineales se sustituyen el término independiente por ceros, se obtiene un sistema homogéneo que se llama sistema homogéneo asociado al primero. ◁

Ejemplo 7.1.5 Los siguientes sistemas de ecuaciones lineales son homogéneos.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcrcl} 3x_1 & + & 4x_2 & - & 7x_3 & - & x_4 & + & 2x_5 & + & x_6 & = & 0 \\ & & 3x_2 & & & + & x_4 & + & 4x_5 & & & = & 0 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 5x_4 & & & & & = & 0 \\ x_1 & - & 7x_2 & & & & & - & 3x_5 & - & x_6 & = & 0 \\ -2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & - & 3x_4 & + & x_5 & + & 2x_6 & = & 0 \\ & & 3x_2 & - & x_3 & + & x_4 & & & + & x_6 & = & 0 \end{array}\right. . \tag{7.5}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & 2z & = & 0 \\ -x & + & 3y & + & 3z & = & 0 \\ & & y & + & z & = & 0 \\ -2x & + & y & - & 2z & = & 0 \\ 3x & & & + & 5z & = & 0 \end{array}\right. . \tag{7.6}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcl} 2x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & - & 2x_4 & + & x_5 & = & 0 \\ x_1 & & & & & - & x_4 & - & x_5 & = & 0 \end{array}\right. . \tag{7.7}$$

◁

Definición 7.1.6 Una *solución* del sistema (7.1) consiste en n números $s_1, \dots, s_n \in \mathbb{R}$, tal que haciendo la sustitución de $x_1, \dots, x_n$ por $s_1, \dots, s_n$ respectivamente, se verifican todas las ecuaciones del sistema. ◁

Ejemplo 7.1.7 Para el sistema (7.4) del ejemplo 7.1.2, los valores

$$x_1 = 4, x_2 = 0, x_3 = -1, x_4 = 1, x_5 = -1,$$

son una solución, como se puede comprobar fácilmente por sustitución en las ecuaciones de (7.4). ◁

Un sistema de ecuaciones lineales puede tener solución o no tenerla. Discutir si un sistema tiene o no solución es el primer problema interesante. El segundo problema que tiene interés es calcular la(s) solución(es) en caso de tenerla(s).

Definición 7.1.8

- Diremos que un sistema de ecuaciones lineales es *incompatible* si no tiene soluciones.
- Diremos que es *compatible* si las tiene.
  - En caso de tener una única solución, diremos que es *compatible determinado*.
  - En caso de tener más de una diremos que es *compatible indeterminado*.

◁

7.2 Representación matricial

Un sistema de ecuaciones lineales siempre se puede representar mediante una fórmula matricial. Para el sistema (7.1), sea A la matriz del sistema, sea

$$\mathsf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

y sea

$$\mathsf{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

La ecuación matricial

$$\mathsf{AX} = \mathsf{B},$$

se verifica si y sólo si se verifica el sistema (7.1), ya que realizando el producto AX queda

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11}x_1 & + & \alpha_{12}x_2 & + & \cdots & + & \alpha_{1n}x_n \\ \alpha_{21}x_1 & + & \alpha_{22}x_2 & + & \cdots & + & \alpha_{2n}x_n \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\ \alpha_{m1}x_1 & + & \alpha_{m2}x_2 & + & \cdots & + & \alpha_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Puesto que dos matrices del mismo orden son iguales si y sólo coinciden término a término, nuestra afirmación es cierta.

Ejemplo 7.2.1 Las representaciones matriciales de los sistemas del ejemplo 7.1.2 son respectivamente

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -7 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & -7 & 0 & 0 & -3 & -1 \\ -2 & 3 & 1 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 4 \\ -2 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

◁

Definición 7.2.2 Sea el sistema (7.1), llamaremos *matriz ampliada* del sistema a la matriz por bloques A' formada al añadir el término independiente por la derecha a la matriz del sistema. Es decir, a la matriz

$$\mathsf{A}' = \left(\begin{array}{cccc|c} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} & b_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} & b_m \end{array}\right) \tag{7.8}$$

◁

Ejemplo 7.2.3 Las matrices ampliadas de los sistemas del ejemplo 7.1.2 son respectivamente

$$\left(\begin{array}{rrrrrr|r} 3 & 4 & -7 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 4 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -7 & 0 & 0 & -3 & -1 & 4 \\ -2 & 3 & 1 & -3 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & 0 & 1 & -7 \end{array}\right).$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -2 & -2 \\ 3 & 0 & 5 & 3 \end{array}\right).$$

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 2 & 3 & 2 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 4 \end{array}\right).$$

◁

La matriz ampliada de un sistema contiene toda la información relevante relativa a un sistema de ecuaciones lineales, ya que con ella podemos reconstruir el sistema, bien en su expresión como ecuaciones, bien en su expresión matricial. La ventaja que tiene la matriz ampliada es que constituye una representación más compacta de un sistema. Además realizaremos ciertas transformaciones sobre los sistemas de ecuaciones lineales, que al verlas sobre la matriz ampliada corresponden a operaciones ya conocidas sobre matrices.

7.3 Sistemas equivalentes

Definición 7.3.1 Diremos que dos sistemas de ecuaciones lineales son *equivalentes* si sus matrices ampliadas tienen el mismo número de columnas y añadiendo filas nulas a la matriz que tenga menos filas hasta completar el numero de filas de aquella que tenga más filas, se obtienen dos matrices equivalentes por filas. $\triangleleft$

Ejemplo 7.3.2 Sea el sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Su matriz ampliada es

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 7 & 0 \end{array}\right).$$

Si realizamos las operaciones elementales f_{41}^{-1}, f_{42}^{-1} y f_{43}^{-2} sobre ella, obtenemos

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Eliminando la última fila de ceros se tiene

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

correspondiente al sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

que es equivalente al primero. $\triangleleft$

Nota 7.3.3 Dos sistemas equivalentes han de tener el mismo número de incógnitas, pero pueden tener distinta cantidad de ecuaciones

Las operaciones permitidas para sistemas equivalentes son las operaciones elementales sobre las filas de las matrices ampliadas, así como la supresión o concatenación de filas nulas

$\triangleleft$

Proposición 7.3.4 Las matrices de coeficientes de dos sistemas equivalentes también son equivalentes por filas si se añaden filas nulas a la más pequeña hasta completar el número de filas de la mayor $\triangleleft$

Proposición 7.3.5

1. El rango de las matrices ampliadas de dos sistemas equivalentes coincide.

2. El rango de las matrices de coeficientes de dos sistemas equivalentes coincide.

$\triangleleft$

Proposición 7.3.6 Sean dos sistemas equivalentes. El primero es compatible si y sólo si lo es el segundo. Además si son compatibles, tienen exactamente las mismas soluciones. $\triangleleft$

Definición 7.3.7 Diremos que un sistema de ecuaciones lineales es o está *escalonado*, si su matriz ampliada es escalonada por filas y no tiene filas nulas. Diremos que un sistema de ecuaciones lineales es o está *reducido* si su matriz ampliada es escalonada reducida por filas y no tiene filas nulas. $\triangleleft$

Nota 7.3.8 Si $\mathsf{A}'_{m\times(n+1)}$ es la matriz de un sistema escalonado o reducido, entonces $m \leq n+1$. Se tiene que $\operatorname{rg}\mathsf{A}' = m$, y por tanto A' tiene exactamente m columnas pivotales. Además $\operatorname{rg}\mathsf{A}' - 1 \leq \operatorname{rg}\mathsf{A} \leq \operatorname{rg}\mathsf{A}'$. $\triangleleft$

Ejemplo 7.3.9 Los sistemas correspondientes a las siguientes matrices ampliadas, son escalonados

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 2 & 3 & -1 & 0 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right). \tag{7.9}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 2 & 3 & -1 & 0 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & -2 \end{array}\right). \tag{7.10}$$

Los siguientes sistemas son reducidos

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right). \tag{7.11}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right). \tag{7.12}$$

◁

Nota 7.3.10 Dado un sistema, siempre se puede obtener otro equivalente escalonado o reducido aplicando operaciones elementales por filas a su matriz ampliada. Los sistemas escalonados son muy sencillos de estudiar y en su caso resolver, con lo que gracias a 7.3.6 podremos estudiar fácilmente la compatibilidad y en su caso resolver cualquier sistema de ecuaciones lineales, como veremos a continuación. ◁

7.4 Discusión y resolución

Discutir un sistema es averiguar si es incompatible o compatible determinado o indeterminado. Resolverlo es encontrar todas sus soluciones en caso de ser compatible. Por lo dicho en la Nota 7.3.10, basta con que discutamos y resolvamos sistemas reducidos. Esto es justo lo que haremos a continuación.

Algoritmo 7.4.1 Sea $\mathsf{A}'_{m\times(n+1)}$ la matriz ampliada de un sistema reducido

$$\mathsf{A}\mathsf{X} = \mathsf{B}.$$

de forma que no tenga ningún pivote en su última columna (la $(n+1)$-ésima). En este caso es obvio que $m \leq n$ y que $\operatorname{rg}\mathsf{A} = \operatorname{rg}\mathsf{A}'$.

1) Sean $i_1, \ldots, i_m$ las columnas pivotales de la matriz de coeficientes A. A las incógnitas $x_{i_1}, \ldots, x_{i_m}$ se las llama *incógnitas principales* del sistema.

2) Sean $j_1, \ldots, j_{n-m}$ las columnas no pivotales de A.

3) **3.1)** Si $m < n$, sea $\mathsf{C}_{m\times(n-m)}$ la matriz que se obtiene tomando la submatriz de A que contiene a todas sus filas y a las columnas no pivotales $j_1, \ldots, j_{n-m}$. Se verifica:

$$\begin{pmatrix} x_{i_1} \\ \vdots \\ x_{i_m} \end{pmatrix} = \mathsf{B} - \mathsf{C}\begin{pmatrix} x_{j_1} \\ \vdots \\ x_{j_{n-m}} \end{pmatrix}$$

3.2) Si $n = m$, no se construye la matriz C, y se verifica

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathsf{B},$$

pues en este caso, $\mathsf{A} = \mathrm{I}_n$.

4) 4.1) Si $m < n$, sea $\mathsf{D}_{n\times(n-m)}$ la matriz cuyas filas $i_1, \dots, i_m$ son respectivamente las filas $1, \dots, m$ de la matriz $-\mathsf{C}$ y cuyas filas $j_1, \dots, j_{n-m}$ son respectivamente las filas $1, \dots, m-n$ de la identidad de orden $n-m$, I_{n-m}. Es claro que la matriz D tiene rango exactamente $n-m$. Sea E una matriz columna $n \times 1$ tal que sus filas $i_1, \dots, i_m$ son respectivamente las filas $1, \dots, m$ de B, y el resto ceros. Se verifica que

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathsf{E} + \mathsf{D} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_{n-m} \end{pmatrix},$$

son las soluciones del sistema para cada $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-m} \in \mathbb{R}$

4.2) Si $n = m$, no se construye la matriz D, y se verifica

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathsf{B},$$

siendo ésta la única solución del sistema.

◁

Teorema 7.4.2 Rouché-Frobenius. Un sistema es compatible si y sólo si el rango de su matriz ampliada coincide con el de su matriz de coeficientes.
Demostración:
por la proposición 7.3.6 y por la nota 7.3.10 basta con probar el resultado para sistemas reducidos. Así que sea un sistema reducido

$$\mathsf{AX} = \mathsf{B},$$

con matriz ampliada A'.
$\Longrightarrow$

Si el sistema es compatible y el rango de A' fuese mayor que el de A, tendría que aparecer un pivote en la última columna de A', por lo que la última fila de A', sería

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \,|\, 1 \end{pmatrix},$$

que corresponde a la ecuación

$$0 = 1,$$

que evidentemente no tiene solución, lo cual contradice que el sistema es compatible. Por tanto

$$\operatorname{rg}\mathsf{A} = \operatorname{rg}\mathsf{A}'.$$

$\Longleftarrow$

Si
$$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A',$$
entonces A' no tiene pivote en su última columna y por tanto el algoritmo 7.4.1 nos permite calcular las soluciones, y por tanto el sistema es compatible. $\triangleleft$

Proposición 7.4.3 Un sistema compatible es determinado si y sólo si el rango de la matriz ampliada coincide con el número de incógnitas.
Demostración:
Es inmediato a partir del algoritmo 7.4.1. $\triangleleft$

Veamos cómo discutir y resolver cualquier sistema

Ejemplo 7.4.4 Sea el sistema correspondiente a la matriz ampliada
$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$
Como es reducido y tiene un pivote en la última columna, no es compatible. Obsérvese que el rango de la matriz ampliada es 5, mientras que el de la matriz de coeficientes es 4

Consideremos ahora el sistema cuya matriz ampliada es
$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 2 & 3 & -1 & 0 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right).$$
El sistema es escalonado pero no reducido. Aun así podemos deducir que es incompatible, pues el rango de la matriz ampliada es 4, mientras que la del sistema es 3. Obsérvese que cuando en un sistema escalonado aparezca un pivote en la última columna, es incompatible y no es necesario calcular su forma reducida

El sistema cuya matriz ampliada corresponde a
$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

es reducido y compatible, pues no tiene pivote en la última columna. Procedemos a aplicar el algoritmo 7.4.1. Las columnas pivotales de la matriz de coeficientes son 1, 3, 5, 6, y las no pivotales 2 y 4. Construimos la matriz C tomando las columnas no pivotales de la matriz de coeficientes

$$\mathsf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matriz que podríamos formar tomando las columnas pivotales de la matriz del sistema es I_4. Por tanto, se verifica

$$\mathrm{I}_4 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

por lo que despejando

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} - \mathsf{C} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

Sea D la matriz cuyas filas 1, 3, 5 y 6 son respectivamente las filas es la fila 1, 2, 3 y 4 de $-\mathsf{C}$ y cuyas filas 2 y 4 son respectivamente las filas 1 y 2 de I_2:

$$\mathsf{D} = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 0 \\ 0 & -2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

que es de rango 2. Sea ahora la matriz columna E cuyas filas 1, 3, 5 y 6 son respectivamente las filas 1, 2, 3 y 4 del término independiente y el resto ceros.

$$\mathsf{E} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Las soluciones del sistema son

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 0 \\ 0 & -2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \; / \; \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

◁

Algoritmo 7.4.5 Sea una sistema de ecuaciones lineales con m ecuaciones y n incógnitas

$$\mathsf{A}\mathsf{X} = \mathsf{B},$$

con matriz ampliada $\mathsf{A}'_{m\times(n+1)}$.

1) Aplicar operaciones elementales por filas a A' y eliminación de filas nulas para obtener un sistema reducido equivalente con matriz ampliada A''

2) Si aparece un pivote en la última columna de A'', entonces el sistema es incompatible

3) En caso contrario el sistema es compatible. Si el número de filas de A'' coincide con n el sistema es determinado. Si no, es indeterminado. Aplicar a A'' el algoritmo 7.4.1 para encontrar las soluciones.

◁

Ejemplo 7.4.6

1) Sea el sistema correspondiente a la matriz ampliada

$$\left(\begin{array}{rrrrrr|r} 1 & 0 & 0 & 4 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & -2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & -1 \end{array}\right),$$

Haciendo las operaciones elementales por filas

$$f_{31}^{-1}, f_{41}^{1}, f_{51}^{-1}, f_{61}^{1}, f_{25}, f_{43}^{1}, f_{53}^{-1}, f_{63}^{1}, f_{54}^{-1}, f_{65}^{1},$$

se obtiene

$$\left(\begin{array}{rrrrrr|r} 1 & 0 & 0 & 4 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -3 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

que está en forma escalonada. Suprimimos la última fila de ceros y obtenemos una matriz ampliada

$$\left(\begin{array}{rrrrrr|r} 1 & 0 & 0 & 4 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -3 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right),$$

que corresponde a un sistema escalonado. Como aparece un pivote en la última columna, el sistema es incompatible.

2) Sea el sistema cuya matriz ampliada es

$$\left(\begin{array}{rr|r} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 6 \\ -1 & 2 & 3 \end{array}\right).$$

Realizando operaciones elementales sobre las filas, se llega a la matriz reducida

$$\left(\begin{array}{rr|r} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

y suprimiendo la última fila se obtiene

$$\left(\begin{array}{rr|r} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right),$$

correspondiente a la matriz ampliada de un sistema reducido equivalente al dado. Es sencillo ver que el sistema es compatible determinado, y el algoritmo 7.4.1 nos da directamente la solución

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

3) Se considera el sistema cuya matriz ampliada es

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 0 & 3 & 9 & 9 & -6 & -9 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right).$$

Mediante operaciones elementales por filas y supresión de filas nulas, se llega a un sistema reducido equivalente con matriz ampliada

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 0 & 1 & 3 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right),$$

que es compatible e indeterminado. Las columnas pivotales son la 3 y la 6. Construimos las matrices C, D y E del algoritmo 7.4.1.

$$\mathsf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\mathsf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\mathsf{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

las soluciones son

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix},$$

con $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$.

◁

7.5 Sistemas homogéneos

Los resultados de la sección precedente tienen las siguientes consecuencias para sistemas homogéneos. Téngase en cuenta que la última columna de la matriz ampliada de cualquier sistema homogéneo es nula, y que si un sistema es homogéneo, cualquiera equivalente a él también lo es.

Corolario 7.5.1 Todo sistema homogéneo es compatible, y

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

siempre es solución (la solución nula o trivial). $\triangleleft$

Corolario 7.5.2 **1)** Si un sistema homogéneo es compatible determinado su única solución es la nula.

2) Si un sistema homogéneo es compatible indeterminado, sus soluciones son de la forma

$$\mathsf{D}\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_{n-r} \end{pmatrix},$$

para cada $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-r} \in \mathbb{R}$, donde n es el número de incógnitas, r es el rango de la matriz del sistema y D es una matriz de orden $n \times (n-r)$ de rango $n-r$.

$\triangleleft$

Ejemplo 7.5.3 **1)** Sea el sistema cuya matriz ampliada es

$$\left(\begin{array}{rr|r} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{array}\right).$$

Realizando operaciones elementales sobre las filas, se llega a la matriz reducida

$$\left(\begin{array}{rr|r} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

y suprimiendo la última fila se obtiene

$$\left(\begin{array}{rr|r} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right),$$

correspondiente a la matriz ampliada de un sistema reducido equivalente al dado. Es sencillo ver que la única solución de este sistema es la nula

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2) Se considera el sistema cuya matriz ampliada es

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 0 & 3 & 9 & 9 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

Mediante operaciones elementales por filas y supresión de filas nulas, se llega a un sistema reducido equivalente con matriz ampliada

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

que es compatible y determinado. Las columnas pivotales son la 3 y la 6. Construimos las matrices C, y D del algoritmo 7.4.1. Como el sistema es homogéneo no hace falta construir E, pues es una matriz nula.

$$\mathsf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\mathsf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

las soluciones son

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix},$$

con $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$.

$\triangleleft$

Corolario 7.5.4 Las soluciones de un sistema de ecuaciones lineales compatible se obtienen sumando a una solución particular del sistema, todas las soluciones del sistema homogéneo asociado.

Demostración:

Sólo hay que ver qué forma tienen las soluciones en el algoritmo 7.4.1. $\triangleleft$

7.6 Ejercicios

Ejercicio 7.1 Discutir y resolver en su caso los sistemas de ecuaciones lineales cuyas matrices ampliadas son:

a) $$\left(\begin{array}{rrr|r} 0 & -2 & -5 & -6 \\ 2 & 6 & -6 & 1 \\ -1 & -6 & -5 & -10 \\ 2 & 10 & 5 & 14 \end{array}\right)$$

b) $$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 12 & 18 & 14 & 21 & 31 & 27 \\ 4 & 7 & 6 & 9 & 13 & 12 \\ 4 & 4 & 2 & 3 & 5 & 3 \\ 4 & 7 & 9 & 10 & 16 & 17 \end{array}\right)$$

c) $$\left(\begin{array}{rrr|r} 0 & -5 & -5 & -7 \\ 0 & 15 & 12 & 20 \\ 0 & -10 & -10 & -16 \end{array}\right)$$

d) $$\left(\begin{array}{rrrr|r} 0 & 0 & 10 & 4 & 8 \\ 4 & 3 & -17 & -5 & -14 \\ 0 & 0 & -25 & -10 & -20 \end{array}\right)$$

e) $$\left(\begin{array}{rrrr|r} 8 & 15 & -4 & 4 & 10 \\ -4 & -8 & 3 & -1 & -5 \\ -4 & -7 & -4 & -8 & -7 \\ 6 & 10 & -3 & 3 & 6 \end{array}\right)$$

f) $$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 4 & 8 & 18 & 12 & 17 & 18 \\ 0 & 2 & 5 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 9 & 8 & 10 & 11 \\ -2 & 2 & 6 & 5 & 2 & 5 \\ 4 & 0 & -2 & 0 & 10 & 4 \\ -2 & 2 & 6 & 5 & 2 & 5 \end{array}\right)$$

g) $$\left(\begin{array}{rr|r} 24 & 12 & 20 \\ 4 & 2 & 6 \\ -4 & -2 & 0 \\ -16 & -8 & -16 \end{array}\right)$$

h) $$\left(\begin{array}{rrrr|r} 10 & -1 & 2 & 9 & 7 \\ -5 & 3 & -4 & -18 & -19 \\ -15 & 4 & -5 & -23 & -21 \end{array}\right)$$

i) $$\left(\begin{array}{rrrr|r} 10 & 9 & 6 & 8 & 12 \\ -5 & -4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -8 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ -5 & -4 & -4 & -10 & -14 \\ -5 & -5 & -5 & -9 & -7 \end{array}\right)$$

j) $$\left(\begin{array}{rr|r} 1 & -3 & -1 \\ 2 & 18 & 18 \\ 0 & -4 & -3 \\ 1 & -7 & -5 \end{array}\right)$$

k) $$\left(\begin{array}{rrrrrr|r} -6 & -4 & 4 & 2 & 12 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -6 & -4 & -5 \\ -9 & -6 & 8 & 2 & 19 & 0 & -2 \\ -3 & -2 & 2 & 1 & 5 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

l) $$\left(\begin{array}{rrrr|r} 15 & 15 & 12 & 12 & 15 \\ -10 & -10 & -8 & -8 & -10 \\ -20 & -20 & -16 & -16 & -20 \\ -5 & -5 & -4 & -4 & -5 \\ -15 & -15 & -12 & -12 & -15 \\ -5 & -5 & -4 & -4 & -5 \end{array}\right)$$

m) $$\left(\begin{array}{rrrrrr|r} 2 & 2 & 2 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & -4 & -3 \end{array}\right)$$

n) $$\left(\begin{array}{rr|r} 4 & 20 & 36 \\ -1 & -5 & -10 \\ -2 & -12 & -22 \\ 3 & 9 & 16 \\ 2 & 8 & 14 \\ -1 & -5 & -10 \end{array}\right)$$

o) $\left(\begin{array}{rrrrr|r} -8 & -2 & 10 & 12 & 3 & 6 \\ 8 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -3 & -4 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -8 & -8 & -2 & -4 \end{array}\right)$ **q)** $\left(\begin{array}{rrr|r} -2 & -1 & 3 & -4 \\ 6 & 3 & -9 & 9 \\ 0 & -4 & -2 & -2 \\ 2 & 9 & 4 & 7 \\ -4 & -2 & 6 & -4 \end{array}\right)$

p) $\left(\begin{array}{rrrrrr|r} 0 & 0 & 0 & 4 & 9 & 6 & 9 \\ -4 & -8 & -4 & 18 & 23 & 14 & 9 \\ -2 & -4 & -2 & 19 & 35 & 27 & 32 \\ -2 & -4 & -2 & 7 & 6 & 3 & -2 \end{array}\right)$ **r)** $\left(\begin{array}{rrrrr|r} 3 & 5 & 2 & 5 & 5 & 1 \\ -3 & -5 & -5 & -21 & -17 & -17 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -5 & -3 & -9 & -8 & -5 \end{array}\right)$

s) $\left(\begin{array}{rrrrrr|r} 0 & -1 & -5 & -3 & -4 & -6 & -10 \\ 1 & 3 & -7 & -3 & -3 & -5 & -10 \\ 0 & -1 & -5 & -3 & -4 & -6 & -10 \\ -1 & -4 & 2 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ -2 & -8 & 0 & -2 & -3 & -6 & -5 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right)$

t) $\left(\begin{array}{rrrrrr|r} 15 & 12 & 11 & 20 & 14 & 7 & 8 \\ 5 & 4 & 2 & 5 & 3 & 2 & 1 \\ -25 & -20 & -15 & -30 & -20 & -11 & -10 \end{array}\right)$

u) $\left(\begin{array}{rrrrr|r} 39 & 65 & -11 & 28 & -3 & 33 \\ -15 & -25 & 4 & -11 & 1 & -13 \end{array}\right)$

v) $\left(\begin{array}{rrrrrr|r} 9 & 9 & 3 & -3 & 9 & 0 & -2 \\ 3 & 3 & 1 & 1 & 4 & 6 & 6 \\ 6 & 6 & 2 & 12 & 13 & 41 & 41 \\ -9 & -9 & -3 & -13 & -17 & -44 & -39 \end{array}\right)$

w) $\left(\begin{array}{rrrrrr|r} 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & -4 & -3 \\ -55 & -11 & -44 & -88 & -63 & -84 & -96 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -5 & -6 & -3 \\ -20 & -4 & -16 & -32 & -24 & -32 & -36 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 4 & 3 \end{array}\right)$

x) $\left(\begin{array}{rrrrrr|r} -8 & -30 & -45 & -29 & -15 & -12 & -8 \\ 4 & 13 & 20 & 13 & 7 & 7 & 5 \\ 8 & 30 & 45 & 29 & 15 & 16 & 13 \end{array}\right)$

y) $\left(\begin{array}{rrrrr|r} 20 & 16 & 18 & 12 & 10 & 14 \\ 40 & 32 & 36 & 24 & 20 & 28 \\ -10 & -8 & -9 & -6 & -5 & -7 \\ 5 & 4 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ -30 & -24 & -24 & -14 & -12 & -18 \end{array}\right)$

z) $\left(\begin{array}{rrrrrr|r} 0 & -2 & -5 & -6 & -8 & -8 & -11 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 4 & 2 & 5 \\ -2 & -5 & 2 & 2 & 0 & -3 & 7 \\ -2 & -3 & -2 & -1 & -4 & -3 & -7 \\ 2 & 5 & 4 & 4 & 8 & 9 & 9 \end{array}\right)$

aa) $\left(\begin{array}{rrrrrr|r} 35 & 7 & 14 & 35 & 28 & 21 & 28 \\ -25 & -5 & -10 & -25 & -20 & -15 & -20 \end{array}\right)$

Ejercicio 7.2 Discutir y resolver en su caso según los valores de los parámetros los sistemas de ecuaciones lineales cuyas matrices ampliadas son:

a) $\left(\begin{array}{rrcccr|c} -1 & -4 & -2+a^2 & a^2-4 & -1 & -1 & a(a-1)-6 \\ -1 & -4 & -2+a^2 & a^2-4 & -1 & -1 & a(a-1)-6 \\ -4 & -16 & -4 & -12 & -4 & -5 & -29 \\ 2 & 8 & 3a^2-1 & 3+3a^2 & 2 & 3 & 17+3a(a-1) \end{array}\right)$

b) $\left(\begin{array}{crrcr|c} 4 & 8 & -2 & -3a+3b & 2 & -b(b+2)c \\ 3 & 6 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & -8 & 2 & 2a-2b & -1 & b(b+2)c \\ 2 & 4 & -1 & b-a & 1 & 0 \\ 1+b & 2 & -1 & a-b & -1 & 1 \\ -6 & -12 & 3 & a-b & -1 & b(b+2)c \end{array}\right)$

c) $\left(\begin{array}{rcrrcr|c} -1 & 1-ba & 2 & 3 & -1-a+b & 6 & 5 \\ 1 & ba-1 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & ba-1 & -1 & -1 & 2-a+b & -1 & 0 \\ -2 & 2-2ba & 3 & 4 & -3 & 7 & a+b+5 \end{array}\right)$

d) $\left(\begin{array}{cccc|c} -a-2 & 2a-2 & -a & 0 & 2 \\ a+2 & 3-3a & 0 & 3(a-1)(a+2) & 3a-7 \\ -2a-4 & 6a-6 & -a & -6(a-1)(a+2) & 13-6a \\ 0 & a-1 & 0 & 2(1-a)(a+2) & 4-2a \end{array}\right)$

e) $\left(\begin{array}{cccc|c} 4a-4b & -4a-4b-1 & 4(a+b)(a-b)-5 & a+b & b-11-a \\ 3a-3b & -3a-3b & 3(a+b)(a-b) & a+b & b-6-a \\ 2b-2a & 2a+2b+1 & 2(a+b)(b-a)+5 & 0 & 7 \end{array}\right)$

f) $\left(\begin{array}{ccccc|c} 6a & 6a^2+5 & 30-a & 41-a & 23 & 16 \\ 2a & 2a^2+2 & 11-a & 16-a & 8 & 6 \\ -4a & -4a^2-3 & -19 & -25 & a-18 & (a+1)a-10 \\ -3a & -3a^2-2 & -14 & -18 & -11 & -7 \\ -2a & -2a^2-2 & a-11 & 2a-18 & -8 & -6 \end{array}\right)$

g) $\left(\begin{array}{cccc|c} -a-a^2(2-b) & -1 & b-5 & -3 & -5-b \\ -2a-2a^2(2-b) & -4 & 4b-14 & -10 & -16-b \\ a+a^2(2-b) & 2 & 7-2b & 5 & 8+b \end{array}\right)$

h) $\left(\begin{array}{ccccc|c} -a & 0 & 0 & -2 & -5 & -a \\ -3a & 2a^2 & a^3 & 4+a^3 & 2a^2-12 & 15-3a \\ a & -a^2 & -a^3 & -3-a^3 & 2-a^2 & a-10 \end{array}\right)$

i) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1-a & 2a+1 & 2a+2 & a \\ a & a & 0 & 2a+2 \\ 2 & a+a & a-1 & a^2-2a+9 \end{array}\right)$

j) $\left(\begin{array}{ccccc|c} 2b & c & 0 & -c & c & 2b \\ 2c & b-c & -2c & c-b & b+c & 0 \\ 0 & c & 2b & -c & c & 2b \\ 0 & -c & 0 & c & c & 0 \\ 2c & b & -2c & -b & b & 0 \end{array}\right)$

k) $\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & a & 1 & 0 & 7 \\ 1 & a & 1 & 1 & b \\ 1 & 2a & 0 & 1 & -1 \\ b & a & 0 & 0 & b \end{array}\right)$

m) $\left(\begin{array}{cccc|c} a & b & \cdots & b & 1 \\ b & a & \cdots & b & 1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ b & b & \cdots & a & 1 \end{array}\right)$

l) $\left(\begin{array}{ccc|c} a & b & 2 & 1 \\ a & 2b-1 & 3 & 1 \\ a & b & b+3 & 1 \end{array}\right)$

Capítulo 8

Vectores

8.1 Vectores en $\mathbb{R}^n$

8.1.1 Introducción

Cuando hablamos de vectores, solemos visualizar vectores en $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ utilizados habitualmente en Física elemental. Tales objetos están determinados por las siguientes características

- Punto de aplicación.
- Módulo o magnitud.
- Dirección.
- Sentido.

Un vector queda así determinado por dos puntos del espacio que se considere, el punto de aplicación y el punto final del vector. Para nosotros tales vectores van a estar ligados al estudio de la geometría, que no es objeto de esta asignatura.

También de la Física proviene la noción de *vector libre*. Un vector libre es un conjunto de vectores con el mismo módulo, dirección y sentido. Es decir un vector libre puede entenderse como un vector sin punto de aplicación, que se puede *deslizar* libremente por $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$. Cada vector libre tendrá un único representante cuyo punto de aplicación esté en el punto $(0,0)$ si se trata de $\mathbb{R}^2$ o $(0,0,0)$ si estamos en $\mathbb{R}^3$. Entonces tomando todos los vectores cuyo punto de aplicación sea $\mathbf{0}$, tendremos representados a todos los vectores libres.

Precisamente esta noción es la que interesa desde el punto de vista del Álgebra Lineal. Así dado un $n \in \mathbb{N}$, consideraremos los puntos de $\mathbb{R}^n$ como *vectores generalizados* cuyo punto de aplicación es $(0,\ldots,0) \in \mathbb{R}^n$. Sobre ellos consideraremos unas operaciones que nos proporcionarán el marco en el que se construye el álgebra lineal.

8.1.1.1 Notaciones

Sea $n \in \mathbb{N}$. Consideramos $\mathbb{R}^n$. Como acabamos de decir a sus elementos los llamaremos *vectores* (de $\mathbb{R}^n$). Denotaremos a los vectores de $\mathbb{R}^n$ mediante letras latinas minúsculas en negrita. Así un vector genérico de $\mathbb{R}^n$ será denotado por

$$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Las *componentes* de un vector son cada uno de los números reales que lo forman. Se considera un orden en las componentes. Aclaremos esto con unos ejemplos

Ejemplo 8.1.1 Sea

$$\boldsymbol{x} = (-3, 4, 0, 2, 3) \in \mathbb{R}^5.$$

La primera componente de $\boldsymbol{x}$ es -3, la segunda es 4, la tercera es 0, la cuarta es 2 y la quinta es 3. $\triangleleft$

Si representamos un vector genérico por sus componentes, emplearemos la misma letra latina minúscula para denotar a sus componentes, acompañada de un subíndice que indica de qué componente se trata

Ejemplo 8.1.2 Un vector genérico $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ se denotará en términos de sus componentes (también genéricas)

$$\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n).$$

Así por ejemplo, un vector genérico $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^6$, se representará como

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (x_1, \ldots, x_6).$$

$\triangleleft$

Para vectores de $\mathbb{R}^n$ con n *pequeño*, a veces es útil representar las componentes de un vector genérico con letras distintas, sin subíndices.

Ejemplo 8.1.3 Un vector genérico de $\mathbb{R}^2$ puede representarse como

$$(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,$$

o como

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Un vector genérico de $\mathbb{R}^3$ puede representarse como

$$(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3,$$

o como

$$(x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Un vector genérico de $\mathbb{R}^4$ puede representarse como

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4,$$

o como

$$(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4.$$

◁

Un vector especial es el vector *cero*, $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$. Tal vector se define como el vector de $\mathbb{R}^n$ con todas sus componentes 0.

Ejemplo 8.1.4

$$\mathbf{0} = (0, 0) \in \mathbb{R}^2.$$

$$\mathbf{0} = (0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3.$$

$$\mathbf{0} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) \in \mathbb{R}^7.$$

◁

8.1.2 Operaciones

Definiremos dos operaciones que se podrán realizar con los vectores de $\mathbb{R}^n$.

Definición 8.1.5 Sea $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ un vector de $\mathbb{R}^n$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ un escalar. Se define el *producto* de λ por $\boldsymbol{x}$ como el vector de $\mathbb{R}^n$ cuyas componentes son las correspondientes de $\boldsymbol{x}$ multiplicadas por λ, es decir

$$\lambda \boldsymbol{x} := (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n).$$

◁

Ejemplo 8.1.6 Consideramos los siguientes productos de escalares por vectores

$$3\,(1, 2, -3) = (3, 6, -9).$$

$$-2\,(3, 1) = (-6, -2).$$

$$-\,(1, -1, 3, 4, -2, 0) = (-1, 1, -3, -4, 2, 0).$$

$$1/3\,(5, -2, 2, -6) = (5/3, -2/3, 2/3, -2).$$

◁

Observemos que el vector $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ multiplicado por cualquier escalar es $\mathbf{0}$, y que el escalar 0 multiplicado por cualquier vector de $\mathbb{R}^n$ es $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$.

Definición 8.1.7 Sean $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ e $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ dos vectores de $\mathbb{R}^n$. Se define la *suma* de $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ como el vector cuyas componentes son la suma de las componentes correspondientes de $\boldsymbol{x}$ y de $\boldsymbol{y}$, es decir

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} := (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)\,.$$

$\triangleleft$

Ejemplo 8.1.8

$$\begin{aligned}
(1,2,4,2) + (-1,2,3,-6) &= (0,4,7,-4) \\
(3,4) + (0,1) &= (3,5)\,. \\
(1,0,3,2,5,-1) + (2,3,4,1,-5,7) &= (3,3,7,3,0,6)\,. \\
(1,0,1,-2) + (0,0,0,0) &= (1,0,1,-2)\,.
\end{aligned}$$

En realidad podemos sumar cualquier cantidad finita de vectores de $\mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned}
&(1,2,3,-1) + (3,2,1,0) + (-1,2,2,0) + (0,1,3,1) + (-3,-5,8,-2) \\
&= (0,2,17,-2)\,.
\end{aligned}$$

$\triangleleft$

Tengamos en cuenta que no tiene sentido sumar dos vectores de distinta longitud.

8.1.3 Vectores y matrices

A cada vector

$$\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,$$

podremos asociarle una matriz fila

$$\begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_n \end{pmatrix}_{1\times n},$$

o una matriz columna

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{n\times 1},$$

y recíprocamente.

Ejemplo 8.1.9 El vector $(1, 3, -2, 0, 6) \in \mathbb{R}^n$, tiene como matriz asociada por filas a

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 6 \end{pmatrix},$$

y como matriz asociada por columnas a

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Así mismo, la matriz fila

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 1 & 5 & 7 \end{pmatrix},$$

tiene como vector de $\mathbb{R}^6$ asociado a

$$(2, -2, 0, 1, 5, 7),$$

y la matriz columna

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix},$$

tiene como vector de $\mathbb{R}^4$ asociado a

$$(3, 5, 6, -1).$$

$\triangleleft$

En lo sucesivo identificaremos los vectores con sus matrices columna y fila asociadas según convenga en cada caso, y no será necesario casi nunca a la conversión explícita entre vectores y sus matrices asociadas y viceversa.

Ejemplo 8.1.10 Sea $\mathsf{A}_{m\times n}$ una matriz. Si $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ e $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^m$, la expresión

$$\mathsf{A}\boldsymbol{x} \quad \text{significa} \quad \mathsf{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

y la matriz columna resultante del producto de matrices, puede interpretarse a su vez como un vector de $\mathbb{R}^n$, sin necesidad de decirlo explícitamente.

La expresión

$$\boldsymbol{y}\mathsf{A} \quad \text{significa} \quad \begin{pmatrix} y_1 & \ldots & y_m \end{pmatrix}\mathsf{A},$$

y la matriz fila resultante del producto de matrices, puede interpretarse a su vez como un vector de $\mathbb{R}^m$, sin necesidad de decirlo explícitamente. $\triangleleft$

8.2 Sistemas de vectores

Definición 8.2.1 Un *sistema de vectores* de $\mathbb{R}^n$, o simplemente un *sistema* de $\mathbb{R}^n$ es una colección finita y ordenada de vectores de $\mathbb{R}^n$. Los representaremos separando sus vectores por comas, en el orden en que se consideren y rodeándolos con corchetes. Cuando queramos representar a todo el sistema con un símbolo emplearemos letras latinas mayúsculas en negrita.

$$\boldsymbol{S} = [\boldsymbol{x_1}, \ldots, \boldsymbol{x_t}].$$

$\triangleleft$

Ejemplo 8.2.2 Un ejemplo de un sistema de 3 vectores de $\mathbb{R}^4$ es

$$\boldsymbol{S} = [(2, 1, 2, 3), (-1, 4, 3, 1), (0, 1, 3, 0)].$$

El primer vector de $\boldsymbol{S}$ es $(2, 1, 2, 3)$, el segundo es $(-1, 4, 3, 1)$ y el tercero es $(0, 1, 3, 0)$. $\triangleleft$

En un sistema de vectores importa el orden así el sistema de $\mathbb{R}^3$

$$[(0, 1, 2), (2, -1, 0), (4, 0, 1), (1, 1, 1)],$$

es distinto del sistema

$$[(0, 1, 2), (4, 0, 1), (2, -1, 0), (1, 1, 1)].$$

Otra característica que hay que tener en cuenta es que los sistemas pueden tener vectores repetidos, como por ejemplo el siguiente sistema de $\mathbb{R}^5$

$$[(1, 0, -1, 2, 3), (4, 0, 2, 1, -1), (6, 3, 1, -7, 1, 2), (4, 0, 2, 1, -1), (1, 0, -1, 3, 0)].$$

Finalmente hagamos notar que no se pueden mezclar vectores con distinto número de componentes en un mismo sistema.

Definición 8.2.3 El *sistema vacío* de $\mathbb{R}^n$ es aquel que no contiene ningún vector. Lo representaremos por $[]$. $\triangleleft$

Definición 8.2.4 Diremos que un sistema de $\mathbb{R}^n$ es *trivial* si es el sistema vacío o sólo contiene copias del vector $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$. $\triangleleft$

8.2.1 Combinaciones lineales

En la misma línea que lo mencionado en la Subsección 7.1, con las dos operaciones que acabamos de definir, *tiene sentido* considerar *combinaciones lineales* de vectores de $\mathbb{R}^n$

Definición 8.2.5 Sea $\boldsymbol{S} = [\boldsymbol{x_1}, \ldots, \boldsymbol{x_t}]$ un sistema no vacío de vectores de $\mathbb{R}^n$, y $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_t \in \mathbb{R}$ escalares. Llamaremos *combinación lineal* del sistema S con escalares $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_t$ a

$$\lambda_1 \boldsymbol{x_1} + \lambda_2 \boldsymbol{x_2} + \cdots + \lambda_t \boldsymbol{x_t}.$$

◁

Una combinación lineal de un sistema de $\mathbb{R}^n$ proporciona otro vector de $\mathbb{R}^n$

Ejemplo 8.2.6 Sea el sistema de $\mathbb{R}^4$

$$\boldsymbol{S} = [(0,1,1,-1), (1,2,3,0), (4,1,2,-1)].$$

Tomemos los escalares $3, -2, 1$. Con ellos podemos formar la combinación lineal de $\boldsymbol{S}$, dada por

$$3(0,1,1,-1) - 2(1,2,3,0) + (4,1,2,-1) = (2,0,-1,-4).$$

◁

8.2.2 Matriz de un sistema

Definición 8.2.7 Sea $\boldsymbol{S} = [\boldsymbol{x_1}, \ldots, \boldsymbol{x_t}]$ un sistema no vacío de vectores de $\mathbb{R}^n$.

1) Llamaremos *matriz por filas* asociada a $\boldsymbol{S}$ a la matriz de orden $t \times n$ cuya fila i-ésima es la matriz fila asociada al vector $\boldsymbol{x_i}$ del sistema, $i = 1, \ldots, t$. Dicha matriz, será denotada por $\boldsymbol{S}_F$.

2) Llamaremos *matriz por columnas* asociada a $\boldsymbol{S}$ a la matriz de orden $n \times t$ cuya fila i-ésima es la matriz columna asociada al vector $\boldsymbol{x_i}$ del sistema, $i = 1, \ldots, t$. Dicha matriz, será denotada por $\boldsymbol{S}_C$.

◁

Nota 8.2.8 Sea $\boldsymbol{S} = [\boldsymbol{x_1}, \ldots, \boldsymbol{x_t}]$ un sistema no vacío de vectores de $\mathbb{R}^n$. Pongamos que

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x_1} &= (x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n}), \\
\boldsymbol{x_2} &= (x_{21}, x_{21}, \ldots, x_{2n}), \\
&\cdots\cdots \\
\boldsymbol{x_t} &= (x_{t1}, x_{t2}, \ldots, x_{tn}),
\end{aligned}$$

entonces

$$\boldsymbol{S}_F = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{t1} & x_{t2} & \cdots & x_{tn} \end{pmatrix},$$

y

$$\boldsymbol{S}_C = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} & \vdots & x_{t1} \\ x_{12} & x_{22} & \vdots & x_{t1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{1n} & x_{2n} & \vdots & x_{tn} \end{pmatrix},$$

◁

Ejemplo 8.2.9 En $\mathbb{R}^4$ consideramos el sistema

$$\boldsymbol{S} = [(2,3,1,5)\,,(0,-3,4,7)\,,(1,2,-2,-1)].$$

Se tiene que

$$\boldsymbol{S}_F = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & 4 & 7 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \end{pmatrix},$$

y que

$$\boldsymbol{S}_C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -3 & 2 \\ 1 & 4 & -2 \\ 5 & 7 & -1 \end{pmatrix}.$$

◁

Proposición 8.2.10 Sea $\boldsymbol{S} = [\boldsymbol{x_1}, \dots, \boldsymbol{x_t}]$ un sistema de vectores de $\mathbb{R}^n$. Se verifican las siguientes propiedades

1) $(\boldsymbol{S}_F)^t = \boldsymbol{S}_C$.

2) $(\boldsymbol{S}_C)^t = \boldsymbol{S}_F$.

3) Si $\alpha_1, \dots, \alpha_t \in \mathbb{R}$, y tenemos la combinación lineal de $\boldsymbol{S}$

$$\boldsymbol{y} = \alpha_1 \boldsymbol{x_1} + \cdots + \alpha_t \boldsymbol{x_t},$$

con las identificaciones entre vectores y matrices que hemos propuesto, podemos expresarla matricialmente como

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{S}_C \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \dots & \alpha_t \end{pmatrix} \boldsymbol{S}_F.$$

◁

Ejemplo 8.2.11 Sea el sistema de $\mathbb{R}^5$

$$\boldsymbol{S} = [(1,3,1,5,1)\,,(2,4,1,-1,-2)\,,(1,0,0,-2,0)].$$

Sea la combinación lineal de $\boldsymbol{S}$

$$\boldsymbol{x} = 3\,(1,3,1,5,1) - 2\,(2,4,1,-1,-2) + (1,0,0,-2,0) = (0,1,1,15,7)\,.$$

Es sencillo ver que

$$\boldsymbol{x} = (0,1,1,15,7) = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{S}_F = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix},$$

y que

$$\boldsymbol{x} = (0,1,1,15,7) = \boldsymbol{S}_C \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

◁

Definición 8.2.12 Dado un sistema no trivial de vectores de $\mathbb{R}^n$.

1) Diremos que es *escalonado*, si su matriz asociada por filas es escalonada por filas y no tiene filas nulas.

2) Diremos que es *reducido* si su matriz asociada por filas es escalonada reducida por filas y no tiene filas nulas.

◁

Ejemplo 8.2.13 El siguiente sistema de $\mathbb{R}^4$

$$\boldsymbol{S} = [(2,4,1,2)\,,(0,4,4,1)\,,(0,0,0,5)],$$

es escalonado, pues si construimos su matriz escalonada por filas

$$\boldsymbol{S}_F = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix},$$

vemos que es una matriz escalonada por filas y que no tiene ninguna fila nula.

El sistema de $\mathbb{R}^5$

$$\boldsymbol{T} = [(1,0,0,1,0)\,,(0,1,0,1,0)\,,(0,0,1,5,0)\,,(0,0,0,0,1)],$$

es escalonado reducido, pues su matriz por filas es

$$\boldsymbol{T}_F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

que es escalonada reducida por filas y no tiene filas nulas. $\triangleleft$

8.2.3 Rango de un sistema

Definición 8.2.14 Sea $\boldsymbol{S}$ un sistema no vacío de vectores de $\mathbb{R}^n$. Definiremos el *rango* de $\boldsymbol{S}$ y lo denotaremos por $\operatorname{rg} \boldsymbol{S}$, como el rango de la matriz $\boldsymbol{S}_F$, o equivalentemente, como el rango de $\boldsymbol{S}_C$.
Por convenio, diremos que el sistema vacío tiene rango 0. $\triangleleft$

Nota 8.2.15 Para calcular el rango de un sistema no vacío, sólo hemos de construir su matriz asociada por filas y calcular su rango, por ejemplo reduciéndola a forma escalonada por filas y contando el número de filas no nulas que quedan. $\triangleleft$

Ejemplo 8.2.16 Sea el sistema de $\mathbb{R}^5$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{S} = [\,&(0,0,1,2,2)\,,(-2,-10,0,-4,-4)\,,(2,10,-1,2,2)\,,\\ &(3,15,-2,2,2)\,,(5,25,-3,4,4)].\end{aligned}$$

Para calcular su rango, lo único que necesitamos hacer es construir su matriz por filas

$$\boldsymbol{S}_F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ -2 & -10 & 0 & -4 & -4 \\ 2 & 10 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & 15 & -2 & 2 & 2 \\ 5 & 25 & -3 & 4 & 4 \end{pmatrix},$$

y mediante operaciones elementales por filas llegar a una forma escalonada. No detallaremos aquí las operaciones elementales realizadas, pero se obtiene

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

que como tiene dos filas no nulas nos dice que el rango es 2. Luego

$$\operatorname{rg} \boldsymbol{S} = 2.$$

Obsérvese que aunque en este ejemplo se ha obtenido la forma escalonada reducida, en general para calcular el rango basta con llegar a una forma escalonada cualquiera. $\triangleleft$

Definición 8.2.17 Diremos que un sistema de $\mathbb{R}^n$ es

1) *Libre* si su número de vectores coincide con su rango (es decir con la dimensión del subespacio que genera).

2) *Ligado* en caso contrario.

$\triangleleft$

Ejemplo 8.2.18 El siguiente sistema de $\mathbb{R}^3$

$$\boldsymbol{S} = [(1, 0, 1), (1, 1, 0)],$$

es libre, porque su rango es 2, como puede deducirse del cálculo del menor de $\boldsymbol{S}_F$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

y 2 es exactamente el número de vectores que tiene.

El sistema de $\mathbb{R}^4$

$$\boldsymbol{T} = [(1, 1, 1, 1), (1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1)],$$

tiene 3 vectores y se puede demostrar fácilmente (por ejemplo construyendo un sistema escalonado equivalente) que su rango es $2 < 3$. Por tanto es ligado. $\triangleleft$

8.2.4 Equivalencia de sistemas

Definición 8.2.19 Sean $\boldsymbol{S}$ y $\boldsymbol{T}$ dos sistemas de $\mathbb{R}^n$. Diremos que $\boldsymbol{S}$ *es equivalente* a $\boldsymbol{T}$ si, o bien los dos son triviales, o bien los dos son no triviales y se puede obtener $\boldsymbol{T}_F$ a partir de $\boldsymbol{S}_F$ mediante

- La realización de operaciones elementales por filas.
- La supresión o añadido de filas nulas.

$\triangleleft$

Proposición 8.2.20 La equivalencia de sistemas es una relación de equivalencia, es decir, se verifican

1) Todo sistema es equivalente a sí mismo.

2) Si $\boldsymbol{S}$ es equivalente a $\boldsymbol{T}$, entonces $\boldsymbol{T}$ es equivalente a $\boldsymbol{S}$.

3) Si $\boldsymbol{S}$ es equivalente a $\boldsymbol{T}$ y $\boldsymbol{T}$ es equivalente a $\boldsymbol{Y}$, entonces $\boldsymbol{S}$ es equivalente a $\boldsymbol{Y}$.

Demostración:
Para sistema triviales es trivial. Para sistemas no triviales es inmediata a partir de la posibilidad de revertir y encadenar el tipo de operaciones que se realizan en las matrices asociadas a los sistemas por filas. $\triangleleft$

Ejemplo 8.2.21 Consideremos el sistema de $\mathbb{R}^4$

$$\boldsymbol{S} = [(1,0,0,3),(0,1,-1,-2),(-2,-8,8,10),(1,0,1,6),(-1,-3,3,3)],$$

y el sistema

$$\boldsymbol{T} = [\,(-2,-11,11,16),(0,1,-1,-2),(1,4,-4,-5),(-2,0,-2,-12),\\ (-1,-3,3,3)].$$

Son equivalentes, porque si sobre la matriz por filas de $\boldsymbol{S}$

$$\boldsymbol{S}_F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ -2 & -8 & 8 & 10 \\ 1 & 0 & 1 & 6 \\ -1 & -3 & 3 & 3 \end{pmatrix},$$

realizamos las operaciones elementales por filas

$$f_{32}^{-3}, f_{12}^{4}, f_{13}, f_{4}^{-2},$$

obtenemos la matriz por filas de $\boldsymbol{T}$

$$\boldsymbol{T}_F = \begin{pmatrix} -2 & -11 & 11 & 16 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 4 & -4 & -5 \\ -2 & 0 & -2 & -12 \\ -1 & -3 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

$\triangleleft$

Proposición 8.2.22 La equivalencia de sistemas verifica las siguientes propiedades

1) Dos sistemas equivalentes tienen el mismo rango.

2) Todo sistema no trivial es equivalente a un sistema escalonado.

3) Todo sistema no trivial es equivalente a un único sistema reducido.

Demostración:
Es inmediata a partir de las propiedades correspondientes para matrices. $\triangleleft$

Nota 8.2.23 En la Proposición 8.2.22 se establece que dos sistemas equivalentes tienen el mismo rango. El recíproco no es cierto, como podemos ver en el Ejemplo 8.2.24, de forma que el rango no caracteriza la equivalencia de sistemas. $\triangleleft$

Ejemplo 8.2.24 Consideremos los sistemas de $\mathbb{R}^2$

$$\boldsymbol{S} = [(0,1)] \text{ y } \boldsymbol{T} = [(1,0)].$$

Es muy sencillo ver que ambos tienen rango uno y que no pueden ser equivalentes. $\triangleleft$

Definición 8.2.25 Dado un sistema no trivial $\boldsymbol{S}$ de $\mathbb{R}^n$, llamaremos *sistema reducido asociado* a $\boldsymbol{S}$ al único sistema reducido que es equivalente a él. $\triangleleft$

Proposición 8.2.26 Dos sistemas no triviales de $\mathbb{R}^n$ son equivalentes si y sólo si sus sistemas reducidos asociados coinciden.
Demostración:
Es inmediata a partir de la Proposición 8.2.22. $\triangleleft$

Nota 8.2.27 Podemos decir que la propiedad que caracteriza la equivalencia de sistemas (no triviales) es la igualdad del sistema reducido asociado. $\triangleleft$

Ejemplo 8.2.28 Consideremos el sistema de $\mathbb{R}^5$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{S} = [\,&(-2,-2,-3,-5,-4)\,, (-2,-6,-6,-6,-5)\,, (5,11,12,14,13)\,,\\ &(-1,5,3,-1,1)\,, (3,1,3,7,6)].\end{aligned}$$

Obtendremos un sistema escalonado equivalente a $\boldsymbol{S}$. Para ello debemos primero construir la matriz de $\boldsymbol{S}$ por filas

$$\boldsymbol{S}_F = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -3 & -5 & -4 \\ -2 & -6 & -6 & -6 & -5 \\ 5 & 11 & 12 & 14 & 13 \\ -1 & 5 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 7 & 6 \end{pmatrix}.$$

Ahora hacemos operaciones elementales por filas para pasar a forma escalonada

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & -3 & -5 & -4 \\ -2 & -6 & -6 & -6 & -5 \\ 5 & 11 & 12 & 14 & 13 \\ -1 & 5 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 7 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_{14}} \begin{pmatrix} -1 & 5 & 3 & -1 & 1 \\ -2 & -6 & -6 & -6 & -5 \\ 5 & 11 & 12 & 14 & 13 \\ -2 & -2 & -3 & -5 & -4 \\ 3 & 1 & 3 & 7 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_{21}^{-2}, f_{31}^{5}, f_{41}^{-2}, f_{51}^{3}}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 5 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -16 & -12 & -4 & -7 \\ 0 & 36 & 27 & 9 & 18 \\ 0 & -12 & -9 & -3 & -6 \\ 0 & 16 & 12 & 4 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_{3}^{1/9}, f_{4}^{1/3}} \begin{pmatrix} -1 & 5 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -16 & -12 & -4 & -7 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -3 & -1 & -2 \\ 0 & 16 & 12 & 4 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_{23}}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 5 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -16 & -12 & -4 & -7 \\ 0 & -4 & -3 & -1 & -2 \\ 0 & 16 & 12 & 4 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_{32}^{4}, f_{42}^{1}, f_{52}^{-4}} \begin{pmatrix} -1 & 5 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_{53}^{-1}}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 5 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

que está en forma escalonada. Ahora quitamos las filas nulas

$$\begin{pmatrix} -1 & 5 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

y tomando el sistema formado por las filas de esta matriz

$$\boldsymbol{T} = [(-1, 5, 3, -1, 1), (0, 4, 3, 1, 2), (0, 0, 0, 0, 1)],$$

obtenemos un sistema escalonado equivalente a $\boldsymbol{S}$. Para obtener el sistema escalonado reducido asociado a $\boldsymbol{S}$, partimos de la matriz por filas de $\boldsymbol{T}$ y realizamos sobre ellas operaciones elementales por filas con objeto de llegar a su forma reducida

$$\boldsymbol{T}_F = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_{2}^{1/4}, f_{1}^{-1}} \begin{pmatrix} 1 & -5 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3/4 & 1/4 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_{23}^{-1/2}, f_{13}^{1}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_{12}^{5}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3/4 & 9/4 & 0 \\ 0 & 1 & 3/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

que es una matriz reducida. Tomando sus filas como vectores se obtiene el sistema

$$\boldsymbol{R} = [(1,0,3/4,9/4,0)\,,(0,0,1,3/4,1/4,0)\,,(0,0,0,0,1)],$$

que es el sistema reducido asociado a $\boldsymbol{S}$ (y a $\boldsymbol{T}$). ◁

8.3 Subespacios

8.3.1 Subespacios y sistemas

Definición 8.3.1 Sea $\boldsymbol{S}$ un sistema de $\mathbb{R}^n$. Llamaremos *clausura lineal* de $\boldsymbol{S}$ y lo denotaremos por $\langle \boldsymbol{S} \rangle$ al conjunto de $\mathbb{R}^n$ formado por todas las posibles combinaciones lineales del sistema $\boldsymbol{S}$. ◁

Definición 8.3.2 Sea $\mathcal{G}$ un subconjunto de $\mathbb{R}^n$.

1) Diremos que $\mathcal{G}$ es un *subespacio* de $\mathbb{R}^n$, si existe un sistema $\boldsymbol{S}$ de $\mathbb{R}^n$ tal que

$$\mathcal{G} = \langle \boldsymbol{S} \rangle\,.$$

2) Diremos entonces que $\mathcal{G}$ es el *subespacio generado* por $\boldsymbol{S}$.

3) Diremos también que $\boldsymbol{S}$ es un sistema generador de $\mathcal{G}$.

◁

Ejemplo 8.3.3 Consideremos el sistema de $\mathbb{R}^5$.

$$\boldsymbol{S} = [(5,5,4,1)\,,(5,1,2,-7)\,,(-5,1,-1,11)],$$

Sea $\mathcal{G} = \langle \boldsymbol{S} \rangle$. Como $\mathcal{G}$ es el conjunto de vectores de $\mathbb{R}^5$ que son combinación lineal del sistema $\boldsymbol{S}$, se tiene

$$\begin{aligned}\mathcal{G} &= \{\alpha_1\,(5,5,4,1) + \alpha_2\,(5,1,2,-7) + \alpha_3\,(-5,1,-1,11)\,/\,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3 \in \mathbb{R}\}\\ &= \{(5\alpha_1 + 5\alpha_2 - 5\alpha_3, 5\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, 4\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3, \alpha_1 - 7\alpha_2 + 11\alpha_3)\,/\\ &\qquad \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3 \in \mathbb{R}\}\,.\end{aligned}$$

El sistema $\boldsymbol{S}$ es un sistema generador de $\mathcal{G}$, pero no es el único. Todos los subespacios de $\mathbb{R}^n$ tienen de hecho infinitos sistemas generadores. ◁

Proposición 8.3.4 Sea $\mathcal{G}$ un subespacio de $\mathbb{R}^n$ y sea $\boldsymbol{S}$ un sistema generador de $\mathcal{G}$. Se tienen las siguientes propiedades

1) Sea el vector $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$. El conjunto $\{\mathbf{0}\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^n$. Lo llamaremos el subespacio cero o nulo de $\mathbb{R}^n$.

2) $\mathbb{R}^n$ es un subespacio de $\mathbb{R}^n$. Lo llamaremos el subespacio total de $\mathbb{R}^n$.

3) Todos los vectores del sistema $\boldsymbol{S}$ están en el subespacio $\mathcal{G} = \langle \boldsymbol{S} \rangle$.

4) $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ está en cualquier subespacio de $\mathbb{R}^n$.

5) Si $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathcal{G}$, entonces $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in \mathcal{G}$.

6) Si $\boldsymbol{x} \in \mathcal{G}$, y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $\lambda \boldsymbol{x} \in \mathcal{G}$.

7) Cualquier combinación lineal de cualquier sistema de $\mathcal{G}$ es un vector de $\mathcal{G}$.

Demostración:

1) Es inmediato ver que el sistema $[\mathbf{0}]$ genera el conjunto $\{\mathbf{0}\}$, luego es un subespacio.

2) Por definición es inmediato que cualquier combinación lineal de vectores de $\mathbb{R}^n$ está en $\mathbb{R}^n$. Sea ahora $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Se tiene que

$$\begin{aligned}(x_1, \ldots, x_n) = {} & x_1 (1, 0, \ldots, 0) + x_2 (0, 1, 0, \ldots, 0) + \cdots \\ & + x_{n-1} (0, \ldots, 0, 1, 0) + x_n (0, \ldots, 0, 1) .\end{aligned}$$

Por tanto el sistema

$$[(1, 0, \ldots, 0), (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, 0, 1, 0), (0, \ldots, 0, 1)],$$

es un sistema generador de $\mathbb{R}^n$, y por tanto es subespacio.

3) Supongamos que $\boldsymbol{S} = [\boldsymbol{x_1}, \ldots, \boldsymbol{x_t}]$. Entonces para cada $i = 1, \ldots, t$, tenemos

$$\boldsymbol{x_i} = 0\boldsymbol{x_1} + \cdots + 0\boldsymbol{x_{i-1}} + 1\boldsymbol{x_i} + 0\boldsymbol{x_{i+1}} + \cdots + 0\boldsymbol{x_t}.$$

Luego cada vector de $\boldsymbol{S}$ es combinación lineal del sistema $\boldsymbol{S}$, luego está en $\langle S \rangle$.

4) Con las notaciones introducidas en el apartado anterior

$$\mathbf{0} = 0\boldsymbol{x_1} + 0\boldsymbol{x_2} + \cdots + 0\boldsymbol{x_t},$$

por tanto $\mathbf{0} \in \boldsymbol{S}$.

5) Supongamos que $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathcal{G}$ entonces existen escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_t \in \mathbb{R}$ y $\beta_1, \ldots, \beta_t \in \mathbb{R}$, tales que

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{S}_C \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_t \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{y} = \boldsymbol{S}_C \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_t \end{pmatrix}.$$

Por tanto

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{S}_C \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_t \end{pmatrix} + \boldsymbol{S}_C \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_t \end{pmatrix} = \boldsymbol{S}_C \begin{pmatrix} \alpha_1 + \beta_1 \\ \alpha_2 + \beta_2 \\ \vdots \\ \alpha_t + \beta_t \end{pmatrix},$$

Por lo que $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in \langle S \rangle$.

6) Supongamos que $\boldsymbol{x} \in \mathcal{G}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_t \in \mathbb{R}$

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{S}_C \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_t \end{pmatrix}.$$

Por tanto

$$\lambda \boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{S}_C \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_t \end{pmatrix} = \boldsymbol{S}_C \begin{pmatrix} \lambda\alpha_1 \\ \vdots \\ \lambda\alpha_t \end{pmatrix},$$

Por lo que $\lambda \boldsymbol{x} \in \langle \boldsymbol{S} \rangle$.

7) El resultado se obtiene aplicando varias veces las dos propiedades anteriores.

$\triangleleft$

8.3.2 Bases y dimensión

Todo lo visto hasta ahora, nos permitirá desentrañar la importante noción de dimensión de un subespacio. La dimensión va a ser un número que se asocia a cada subespacio y que contiene gran información (de hecho la más relevante) sobre el subespacio. Comenzaremos con un resultado sobre el que se basará nuestra teoría de la dimensión

Teorema 8.3.5 Dos sistemas de $\mathbb{R}^n$ son equivalentes si y sólo si generan el mismo subespacio. $\triangleleft$

Definición 8.3.6 Sea $\mathcal{G}$ un subespacio de $\mathbb{R}^n$. Llamaremos *dimensión* de $\mathcal{G}$ y la denotaremos por $\dim \mathcal{G}$, al rango de un sistema generador cualquiera de $\mathcal{G}$. $\triangleleft$

Nota 8.3.7 Obsérvese que el rango de todos los sistemas que generen a un mismo subespacio han de ser el mismo, pues son equivalentes, lo que implica que sus matrices asociadas por filas tienen el mismo rango. Por tanto la dimensión de un subespacio está bien definida.

Para calcular la dimensión de un subespacio, sólo hay que encontrar un sistema generador, construir su matriz por filas asociada y calcular su rango, por ejemplo reduciendo a forma escalonada por filas. $\triangleleft$

Ejemplo 8.3.8 Se considera el subespacio $\mathcal{G}$ de $\mathbb{R}^5$ generado por el sistema

$$\begin{aligned}\boldsymbol{S} = [\,&(0,5,-2,4,0)\,,(1,2,-2,-1,1)\,,(-1,0,0,-1,0)\,,(1,1,-1,0,1)\,,\\ &(-1,-4,2,-3,0)].\end{aligned}$$

Para calcular la dimensión, es suficiente calcular el rango del sistema $\boldsymbol{S}$. Para ello construimos su matriz por filas y la reducimos a forma escalonada

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 & -2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -4 & 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_{13},f_{21}^{1},f_{41}^{1},f_{51}^{-1},f_{24},f_{32}^{-5},f_{42}^{-2},f_{52}^{4},f_{5}^{1/2},f_{35},f_{53}^{3},f_{54}^{1}}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

de donde se deduce que $\dim \mathcal{G} = 4$. $\triangleleft$

Definición 8.3.9 Una *base* de un subespacio $\mathcal{G}$ de $\mathbb{R}^n$ es un sistema generador de $\mathcal{G}$ que además es un sistema libre. $\triangleleft$

Nótese que el número de vectores de una base de un subespacio coincide con la dimensión del subespacio.

Ejemplo 8.3.10 Por convenio diremos que una base del subespacio cero de $\mathbb{R}^n$ es el sistema vacío $[]$. Por tanto la dimensión del subespacio cero es cero, y éste es el único subespacio con esta propiedad. $\triangleleft$

Ejemplo 8.3.11 Una base de $\mathbb{R}^n$, puede verse con facilidad que está formada por el sistema de n vectores

$$\boldsymbol{E} = [(1,0,\ldots,0)\,,(0,1,0,\ldots,0)\,,\ldots,(0,\ldots,0,1,0)\,,(0,\ldots,0,1)],$$

a la que llamaremos la *base canónica* de $\mathbb{R}^n$. Denotaremos a los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^n$ abreviadamente por

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e_1} &= (1,0,0,\ldots,0,0,0)\\ \boldsymbol{e_2} &= (0,1,0,\ldots,0,0,0)\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \boldsymbol{e_{n-1}} &= (0,0,0,\ldots,0,1,0)\\ \boldsymbol{e_n} &= (0,0,0,\ldots,0,0,1)\,. \end{aligned}$$

◁

Proposición 8.3.12 Respecto de las bases se tienen las siguientes propiedades

1) Todo subespacio tiene al menos una base.

2) Todas las bases de un mismo subespacio tienen el mismo número de vectores.

Demostración:

1) Como todo subespacio tiene al menos un sistema generador por definición, su sistema reducido asociado será una base del subespacio.

2) Es inmediato, pues la dimensión está bien definida.

◁

Ejemplo 8.3.13 Se considera el subespacio $\mathcal{G}$ de $\mathbb{R}^5$ generado por el sistema

$$\begin{aligned} \boldsymbol{S} = [\,&(0,5,-2,4,0)\,,(1,2,-2,-1,1)\,,(-1,0,0,-1,0)\,,(1,1,-1,0,1)\,,\\ &(-1,-4,2,-3,0)]. \end{aligned}$$

Para calcular una base, es suficiente construir un sistema escalonado equivalente a $\boldsymbol{S}$. Para ello construimos su matriz por filas, la reducimos a forma escalonada (como hicimos en un ejemplo anterior) y quitamos las filas cero

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 & -2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -4 & 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_{13},f_{21}^{1},f_{41}^{1},f_{51}^{-1},f_{24},f_{32}^{-5},f_{42}^{-2},f_{52}^{4},f_{5}^{1/2},f_{35},f_{53}^{3},f_{54}^{1}}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ quitamos las filas nulas}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

y una base es el sistema de vectores formado por las filas de esta última matriz

$$\boldsymbol{B} = [(-1,0,0,-1,0)\,,(0,1,-1,-1,1)\,,(0,0,-1,-3,2)\,,(0,0,0,0,-1)].$$

$\triangleleft$

Proposición 8.3.14 Se verifican las siguientes propiedades

1) La dimensión de un subespacio de $\mathbb{R}^n$ es menor o igual que n.

2) La dimensión de un subespacio generado por un sistema con t vectores es menor o igual que t.

3) La escritura como combinación lineal de un elemento de un subespacio en términos de una base es única.

4) Todo sistema de vectores de un subespacio con mas vectores que la dimensión del subespacio, es ligado.

5) Dada una base de un subespacio de $\mathbb{R}^n$ y un vector de $\mathbb{R}^n$, dicho vector está en el subespacio si y solo si el sistema formado por el vector y la base es ligado.

6) Un sistema libre de un subespacio es una base del subespacio si y solo si su numero de vectores es igual a la dimensión del subespacio.

7) Un sistema generador de un subespacio es una base del subespacio si y solo si su numero de vectores es igual a la dimensión del subespacio.

8) Sean $\mathcal{H}$ y $\mathcal{G}$ dos subespacios de $\mathbb{R}^n$.

$$\mathcal{G} \subseteq \mathcal{H} \Longrightarrow \dim(\mathcal{G}) \leq \dim(\mathcal{H}).$$

9) $\mathcal{H}$ y $\mathcal{G}$ dos subespacios de $\mathbb{R}^n$ con $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{H}$ entonces

$$\mathcal{H} = \mathcal{G} \text{ si y solo si } \dim(\mathcal{G}) = \dim(\mathcal{H}).$$

10) Si $\boldsymbol{S}$ es una base de un subespacio $\mathcal{F}$ de $\mathbb{R}^n$ entonces

$$\boldsymbol{T} \text{ es base de } \mathcal{F} \Longleftrightarrow \exists\, \mathsf{P} \text{ matriz inversible} / \mathsf{P}\boldsymbol{S}_F = \boldsymbol{T}_F.$$

◁

Teorema 8.3.15 [Caracterización de subespacios]
Sea $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{R}^n$ con $\mathcal{G} \neq \emptyset$. Las siguientes propiedades son equivalentes

(i) $\mathcal{G}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^n$.

(ii) Se verifican las dos condiciones siguientes

  1) $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in \mathcal{G}$, $\forall\, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathcal{G}$.

  2) $\lambda \boldsymbol{x} \in \mathcal{G}$, $\forall\, \boldsymbol{x} \in \mathcal{G}$, $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$

(iii) Para cada sistema $[\boldsymbol{a_1}, \ldots, \boldsymbol{a_s}]$ de $\mathcal{G}$ y para colección de escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_s \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$\lambda_1 \boldsymbol{a_1} + \cdots + \lambda_s \boldsymbol{a_s} \in \mathcal{G}.$$

◁

Este resultado puede ser útil para comprobar que algo es un subespacio sin necesidad de construir explícitamente un sistema generador

Ejemplo 8.3.16 Consideremos el conjunto de $\mathbb{R}^6$ formado por aquellos vectores cuya primera y tercera componentes son cero. Cuando se suman dos vectores con esa propiedad, se obtiene un tercero con la misma propiedad. Cuando se multiplica un escalar por un vector con la primera y tercera componentes nulas, se obtiene otro con la primera y tercera componentes nulas. Por tanto el conjunto descrito de $\mathbb{R}^6$ es un subespacio de $\mathbb{R}^6$.
◁

Teorema 8.3.17 [Compleción de bases]
Sea $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{R}^n$ un subespacio de dimensión t. Sea $\boldsymbol{S} = [\boldsymbol{x_1}, \ldots, \boldsymbol{x_r}]$ un sistema libre de vectores de $\mathcal{G}$, con $r < t$. Existen $t - r$ vectores $\boldsymbol{x_{r+1}}, \boldsymbol{x_{r+2}}, \ldots, \boldsymbol{x_t} \in \mathcal{G}$ de manera que al unirlos al sistema $\boldsymbol{S}$ para formar el sistema

$$[\boldsymbol{x_1}, \ldots, \boldsymbol{x_r}, \boldsymbol{x_{r+1}}, \boldsymbol{x_{r+2}}, \ldots, \boldsymbol{x_t}],$$

se obtiene una base de $\mathcal{G}$.
Demostración:
$\triangleleft$

La demostración de 8.3.17 es interesante pues es constructiva y permite desarrollar un método efectivo para construir los vectores que completan un sistema libre hasta una base.

Ejemplo 8.3.18 Consideremos el subespacio de $\mathbb{R}^4$, $\mathcal{G} = \langle \boldsymbol{S} \rangle$, donde

$$\boldsymbol{S} = [(1,0,0,0)\,, (0,1,1,0)\,, (0,0,0,1)].$$

Es sencillo comprobar que $\boldsymbol{S}$ es una base de $\mathcal{G}$, y que por tanto $\dim \mathcal{G} = 3$. Se considera el sistema de $\mathcal{G}$, $\boldsymbol{T} = [(-1,2,2,0)]$ (se deja como un sencillo ejercicio para el lector ver que $(-1,2,2,0)$ está en efecto en $\mathcal{G}$).

Trataremos de completar el sistema $\boldsymbol{T}$ (que es libre, evidentemente) hasta una base de $\boldsymbol{G}$. Para ello basta ir completando con vectores de una base de $\boldsymbol{G}$ de manera que siempre quede un sistema libre hasta alcanzar tantos vectores como la dimensión de $\mathcal{G}$.

1) Tomamos el primer vector de $\boldsymbol{S}$, que es una base de $\mathcal{G}$ y se lo añadimos al sistema $\boldsymbol{T}$. Obtenemos así

$$\boldsymbol{T_1} = [(-1,2,2,0)\,, (1,0,0,0)].$$

Comprobamos si $\boldsymbol{T_1}$ es libre pasando a forma escalonada

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_{21}^{1}} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

Luego $\operatorname{rg} \boldsymbol{T_1} = 2$ y 2 es su número de vectores, luego $\boldsymbol{T_1}$ es libre, y el vector que hemos añadido sirve para el proceso de compleción.

2) Ahora añadimos a $\boldsymbol{T_1}$ el siguiente vector de la base $\boldsymbol{S}$ para formar

$$\boldsymbol{T_2} = [(-1,2,2,0)\,, (1,0,0,0)\,, (0,1,1,0)].$$

Para calcular el rango de $\boldsymbol{T_2}$ es suficiente partir de la forma escalonada de $\boldsymbol{T_1}$ obtenida, añadirle el nuevo vector y continuar escalonando

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_{32}^{-1/2}} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

luego $\operatorname{rg} \boldsymbol{T_2} = 2$, y como tiene 3 vectores es ligado, luego hay que desechar el vector que acabamos de añadir.

3) Entonces añadimos a $\boldsymbol{T_1}$ ($\boldsymbol{T_2}$ no sirve por ser ligado) el tercer vector de $\boldsymbol{S}$, para obtener

$$\boldsymbol{T_3} = [(-1, 2, 2, 0), (1, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1)],$$

que se puede comprobar enseguida que tiene rango 3, luego es libre porque tiene 3 vectores. Como la dimensión de $\mathcal{G}$ es 3, hemos acabado el proceso de compleción, y $\boldsymbol{T_3}$ es la base buscada.

◁

Corolario 8.3.19 Si tenemos dos subespacios de $\mathbb{R}^n$ con $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{H}$, entonces dada una base de $\mathcal{G}$, existe una base de $\mathcal{H}$ cuyos primeros vectores son los de la base de $\mathcal{G}$ dada. ◁

Ejemplo 8.3.20 Consideremos en $\mathbb{R}^5$ el subespacio $\mathcal{H}$ generado por el sistema

$$\boldsymbol{S} = [(1, 0, 1, 0, 1), (0, 1, 1, 0, 0), (0, 1, 0, 1, 0)].$$

Dejemos al lector probar que $\boldsymbol{S}$ es una base de $\mathcal{H}$. Se considera el subespacio $\mathcal{G}$ generado por el sistema

$$\boldsymbol{T} = [(1, 2, 1, 2, 1), (2, 3, 5, 0, 2)].$$

También se deja como un ejercicio para el lector comprobar que $\boldsymbol{T}$ es una base de $\mathcal{G}$, y que $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{H}$.

El proceso para conseguir una base de $\mathcal{H}$, cuyos primeros vectores sean la base de $\mathcal{G}$ consiste en completar el sistema $\boldsymbol{T}$, que es una sistema libre de $\mathcal{H}$, hasta una base de $\mathcal{H}$ mediante un proceso similar al realizado en 8.3.18, y que no detallaremos aquí. Puede verse fácilmente que tal sistema podría ser por ejemplo.

$$[(1, 2, 1, 2, 1), (2, 3, 5, 0, 2), (1, 0, 1, 0, 1)].$$

◁

Corolario 8.3.21 Dado un sistema libre $\boldsymbol{S}$ de $\mathbb{R}^n$, siempre existe una base de $\mathbb{R}^n$ cuyos primeros vectores son los de $\boldsymbol{S}$ $\triangleleft$

Ejemplo 8.3.22 Sea el sistema de $\mathbb{R}^4$

$$\boldsymbol{S} = [(1,2,2,1)\,,(2,1,1,2)].$$

Se puede comprobar que es libre. Para extenderlo a una base de $\mathbb{R}^4$ basta ir añadiendo vectores de una base de $\mathbb{R}^4$, teniendo en cuenta que en cada paso el sistema que se obtiene ha de ser libre y terminar cuando se haya conseguido un sistema de cuatro vectores.

Elegimos la base canónica de $\mathbb{R}^4$ para ir añadiendo vectores, porque es la más sencilla y no se imponen restricciones al respecto

1) Añadimos a $\boldsymbol{S}$ el primer vector de la base canónica y obtenemos

$$\boldsymbol{S_1} = [(1,2,2,1)\,,(2,1,1,2)\,,(1,0,0,0)].$$

Para ver si $\boldsymbol{S_1}$ es libre reducimos a forma escalonada y quitamos filas nulas (sin detallar el cálculo)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

que tiene rango 3, luego el vector añadido sirve porque $\boldsymbol{S_1}$ es libre.

2) Añadimos a $\boldsymbol{S_1}$ el segundo vector de la base de $\mathbb{R}^4$ fijada para formar

$$\boldsymbol{S_2} = [(1,2,2,1)\,,(2,1,1,2)\,,(1,0,0,0)\,,(0,1,0,0)],$$

y comprobamos si es libre. Para ello basta añadir el nuevo vector a la forma escalonada de $\boldsymbol{S_1}$ y seguir escalonando.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

que tiene rango 4, luego $\boldsymbol{S_2}$ es la base de $\mathbb{R}^4$ buscada.

$\triangleleft$

Definición 8.3.23 Sean $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ y $\mathfrak{J}$ subespacios de $\mathbb{R}^n$, con $\mathfrak{G}, \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{J}$. Diremos que $\mathfrak{G}$ y $\mathfrak{H}$ son *suplementarios* (uno del otro) en $\mathfrak{J}$, si existe una base de $\mathfrak{G}$ y una base de $\mathfrak{H}$ tal que el sistema resultante de unir ambas bases es una base de $\mathfrak{J}$. $\triangleleft$

Proposición 8.3.24 En $\mathbb{R}^n$, sean $\mathcal{G}$ y $\mathcal{H}$ subespacios suplementarios en un subespacio $\mathcal{J}$. Entonces el sistema resultante de unir una base cualquiera de $\mathcal{G}$ con una base cualquiera de $\mathcal{H}$, es una base de $\mathcal{J}$. $\triangleleft$

Ejemplo 8.3.25 Consideremos el subespacio $\mathcal{J}$ de $\mathbb{R}^4$ generado por

$$\boldsymbol{S} = [(1,1,1,1)\,, (0,1,1,1)\,, (0,0,1,1)].$$

Es sencillo comprobar que $\boldsymbol{S}$ es una base $\mathcal{J}$. Sean ahora los subespacios $\mathcal{G}$ y $\mathcal{H}$, generados respectivamente por los sistemas

$$\boldsymbol{T} = [(1,0,0,0)],$$

$$\boldsymbol{U} = [(0,1,0,0)\,, (0,0,-2,-2)].$$

Es sencillo ver que tanto $\mathcal{G}$ como $\mathcal{H}$ están incluidos en $\mathcal{J}$, que $\boldsymbol{T}$ es una base de $\mathcal{G}$, que $\boldsymbol{U}$ es una base de $\mathcal{H}$,y que el sistema que se forma uniendo los vectores de $\boldsymbol{T}$ con los de $\boldsymbol{U}$, es una base $\mathcal{J}$. Por tanto $\mathcal{G}$ y $\mathcal{H}$ son suplementarios en $\mathcal{J}$. $\triangleleft$

Corolario 8.3.26 Sean $\mathcal{G}$ y $\mathcal{J}$ dos subespacios de $\mathbb{R}^n$ con $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{J}$. Siempre existe al menos un suplementario de $\mathcal{G}$ en $\mathcal{J}$ $\triangleleft$

Ejemplo 8.3.27 Sea $\mathcal{J}$ el subespacio de $\mathbb{R}^5$ generado por el sistema

$$\boldsymbol{S} = [(0,0,0,0,1)\,, (0,0,0,1,1)\,, (0,0,1,1,1)].$$

Se tiene que $\boldsymbol{S}$ es una base $\mathcal{J}$. Sea ahora el subespacio $\mathcal{G}$ generado por el sistema

$$\boldsymbol{T} = [(0,0,0,1,2)].$$

Tenemos $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{J}$, y que $\boldsymbol{T}$ es una base de $\mathcal{G}$. Completamos la base de $\mathcal{G}$ hasta una base de $\mathcal{J}$. Se deja al lector ver que completando con el primer y tercer vector de $\boldsymbol{S}$ se completa una base de $\mathcal{G}$ hasta una base de $\mathcal{J}$. Entonces $\langle (0,0,0,0,1)\,, (0,0,1,1,1) \rangle$ es un suplementario de $\mathcal{G}$ en $\mathcal{J}$. $\triangleleft$

Corolario 8.3.28 Sea $\mathcal{G}$ un subespacio de $\mathbb{R}^n$. Siempre existe al menos un suplementario de $\mathcal{G}$ en $\mathbb{R}^n$. $\triangleleft$

Ejemplo 8.3.29 Sea $\mathcal{G}$ el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por el sistema

$$\boldsymbol{S} = [(-1,0,1)\,, (1,0,1)],$$

que es una base de $\mathcal{G}$. Es fácil ver que añadiendo a $\boldsymbol{S}$ el vector $(0,1,0)$, se obtiene una base de $\mathbb{R}^3$. Luego $\langle (0,1,0) \rangle$ es un suplementario de $\mathcal{G}$ en $\mathbb{R}^3$. $\triangleleft$

8.3.3 Ecuaciones implícitas y paramétricas

Hasta ahora la única forma que conocemos para describir completamente un subespacio, es construir un sistema generador. En esta sección veremos otras formas de determinar un subespacio.

8.3.3.1 Ecuaciones paramétricas

Sea $\mathcal{G}$ un subespacio. Sea $\boldsymbol{S} = [\boldsymbol{a_1}, \ldots, \boldsymbol{a_t}]$ un sistema generador de $\mathcal{G}$. Supongamos que $\boldsymbol{a_i} = (a_{i1}, \ldots, a_{in})$, $i = 1, \ldots, t$. Un vector $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ está en $\mathcal{G}$ si y sólo si existen escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_t \in \mathbb{R}$ tales que

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{S}_C \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_t \end{pmatrix}.$$

Desarrollemos esta expresión

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \vdots & a_{t1} \\ a_{12} & a_{22} & \vdots & a_{t1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \vdots & a_{tn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}\alpha_1 + a_{21}\alpha_2 + \cdots + a_{t1}\alpha_t \\ a_{12}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \cdots + a_{t2}\alpha_t \\ \vdots \\ a_{1n}\alpha_1 + a_{2n}\alpha_2 + \cdots + a_{tn}\alpha_t \end{pmatrix},$$

e igualando componente a componente, se obtiene

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_1 & = & a_{11}\alpha_1 + a_{21}\alpha_2 + \cdots + a_{t1}\alpha_t \\ x_2 & = & a_{12}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \cdots + a_{t2}\alpha_t \\ \vdots & \vdots & \qquad\qquad \vdots \\ x_n & = & a_{1n}\alpha_1 + a_{2n}\alpha_2 + \cdots + a_{tn}\alpha_t \end{array} \right. ,$$

que son las llamadas *ecuaciones paramétricas* del subespacio $\mathcal{G}$. Cuando los parámetros $\alpha_1, \ldots, \alpha_t$ varían en todo $\mathbb{R}$, se obtienen todos los vectores del subespacio $\mathcal{G}$.

Ejemplo 8.3.30 Sea $\mathcal{G}$ el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por el sistema

$$\boldsymbol{S} = [(1, 0, 1, 1), (1, 1, 0, 1), (0, -2, 2, 0)].$$

Es sencillo construir unas ecuaciones paramétricas de $\mathcal{G}$. Los vectores (x, y, z, t) se obtienen cuando los parámetros λ, μ, ν varían $\mathbb{R}$ en la expresión

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \boldsymbol{S}_C \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix},$$

e igualando componente a componente, se obtienen unas ecuaciones paramétricas de $\mathcal{G}$

$$\left\{\begin{array}{rcrrr} x & = & \lambda & +\mu & \\ y & = & & \mu & -2\nu \\ z & = & \lambda & & +2\nu \\ t & = & \lambda & +\mu & \end{array}\right. .$$

◁

Dadas unas ecuaciones paramétricas de un subespacio, es fácil construir un sistema generador. Para ello sólo hay que tomar como vectores los coeficientes que multiplican a cada parámetro, como veremos en el siguiente ejemplo

Ejemplo 8.3.31 Sea un subespacio de $\mathbb{R}^3$ con las siguientes ecuaciones paramétricas

$$\left\{\begin{array}{rcrr} x & = & \lambda & +3\mu \\ y & = & 2\lambda & -\mu \\ z & = & -\lambda & \end{array}\right. .$$

Un sistema generador de dicho subespacio, se obtiene tomando los coeficientes de cada parámetro en forma de vector. Sería

$$[(1,2,-1)\,,(3,-1,0)].$$

◁

8.3.3.2 Ecuaciones implícitas

Consideremos un sistema de ecuaciones lineal homogéneo con matriz ampliada

$$\mathsf{A}' = \left(\mathsf{A} \mid \mathbf{0}\right),$$

y de rango r. Para un sistema homogéneo, por el corolario 7.5.2 existe una matriz $D_{n\times(n-r)}$ de rango $n-r$, de manera que las soluciones del sistema son

$$D\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n-r} \end{pmatrix} \,/\, \alpha_1,\ldots,\alpha_{n-r} \in \mathbb{R}.$$

Por tanto las soluciones de todo sistema homogéneo con n incógnitas constituyen un subespacio de $\mathbb{R}^n$, generado por el sistema cuya matriz asociada por columnas es D. Además a partir de la expresión de las soluciones es inmediato obtener las ecuaciones paramétricas del subespacio

Ejemplo 8.3.32 En el ejemplo 7.5.3 se consideraba un sistema homogéneo de ecuaciones lineales cuya matriz ampliada era

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 0 & 3 & 9 & 9 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

Se veía que las soluciones se podían expresar como

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix},$$

con $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$. Tomando las columnas de la matriz 6×4 que aparece se tiene un sistema generador del subespacio que forman las soluciones del sistema. Haciendo el producto de matrices en la expresión anterior e igualando componente a componente, se obtienen ecuaciones paramétricas de dicho subespacio. Se deja al lector la escritura de tal sistema generador y de tales ecuaciones paramétricas. $\triangleleft$

La pregunta que surge de manera natural es si todo subespacio de $\mathbb{R}^n$ se puede expresar como las soluciones de un sistema homogéneo. La respuesta nos la proporciona el siguiente algoritmo

Algoritmo 8.3.33 Sea $\mathcal{G}$ un subespacio vectorial de $\mathbb{R}$. Realizaremos las siguientes operaciones.

1) Obtener una base $\boldsymbol{S}$ escalonada de $\mathcal{G}$.

2) Añadir a la matriz $\boldsymbol{S}_F$ una fila por el final de la forma

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix},$$

formada por indeterminadas.

3) Utilizando los pivotes de la base escalonada, hacer ceros mediante operaciones elementales de la forma f_{ij}^{λ} en las posiciones pivotales de la última fila de la matriz construida.

4) Construir un sistema de ecuaciones lineales homogéneo igualando a cero las expresiones que quedan en las posiciones no pivotales de la última fila.

$\triangleleft$

Proposición 8.3.34 El sistema de ecuaciones lineales homogéneo construido en el Algoritmo 8.3.33 tiene como subespacio de soluciones al subespacio $\mathcal{G}$ ◁

Definición 8.3.35 Unas *ecuaciones implícitas* de $\mathcal{G}$ son cualquier sistema de ecuaciones lineales homogéneo cuyo subespacio de soluciones sea $\mathcal{G}$. ◁

Ejemplo 8.3.36 Consideremos el subespacio $\mathcal{G}$ de R^5 generado por el sistema

$$\boldsymbol{S} = [(8,6,2,2,2)\,,(4,0,-2,-3,-2)\,,(4,3,1,1,1)\,,(0,3,3,4,6)].$$

Para obtener ecuaciones implícitas, primero tenemos que obtener una forma escalonada equivalente, proceso que no detallaremos

$$\begin{pmatrix} 8 & 6 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & -2 & -3 & -2 \\ 4 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 4 & 6 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ahora añadimos una fila de incógnitas al final de la matriz escalonada, y hacemos ceros en sus posiciones pivotales mediante operaciones elementales por filas

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_{41}^{-x_1/4}}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -3x_1/4+x_2 & -x_1/4+x_3 & -x_1/4+x_4 & -x_1/4+x_5 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_{42}^{x_1/4-x_2/3}}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & x_1/2-x_2+x_3 & 3x_1/4-4x_2/3+x_4 & x_1/2-x_2+x_5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_{43}^{-x_1/6+x_2/3-x_5/3}} \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & x_1/2-x_2+x_3 & 3x_1/4-4x_2/3+x_4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Las ecuaciones implícitas buscadas se obtienen igualando a cero las expresiones que quedan en las posiciones no pivotales de la última fila de la matriz

$$\left\{\begin{array}{rrrrcl} x_1/2 & -x_2 & +x_3 & & = & 0 \\ 3x_1/4 & -4/3x_2 & & +x_4 & = & 0 \end{array}\right.$$

◁

Obsérvese que si $\dim \mathcal{G} = d$, la cantidad mínima de ecuaciones implícitas necesarias para representarlo es $n-d$. Además todo sistema de ecuaciones que sean ecuaciones implícitas de $\mathcal{G}$ ha de tener rango $n-d$.

Por lo tanto, ahora podemos expresar un subespacio de $\mathbb{R}^n$ al menos de tres maneras distintas

1) Mediante un sistema generador.

2) Mediante unas ecuaciones paramétricas.

3) Mediante unas ecuaciones implícitas.

Y además tenemos procedimientos claros para pasar de una representación a otra.

8.3.4 Operaciones con subespacios

8.3.4.1 Suma

Definición 8.3.37 Sean $\mathcal{G}$ y $\mathcal{H}$ subespacios de $\mathbb{R}^n$. Definimos la *suma* de $\mathcal{G}$ y $\mathcal{H}$ y lo representamos por $\mathcal{G}+\mathcal{H}$ a

$$\mathcal{G}+\mathcal{H} = \{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \,/\, x \in \mathcal{G},\, y \in \mathcal{H}\}\,.$$

◁

Proposición 8.3.38 Sean $\mathcal{G}$ y $\mathcal{H}$ subespacios de $\mathbb{R}^n$. La suma $\mathcal{G}+\mathcal{H}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^n$.
Demostración:
Sea $\boldsymbol{S}$ un sistema generador de $\mathcal{G}$ y $\boldsymbol{T}$ un sistema generador de $\mathcal{H}$. Sea $\boldsymbol{U}$ el sistema de $\mathbb{R}^n$ que se obtiene al concatenar $\boldsymbol{S}$ y $\boldsymbol{T}$. Se deja a al lector probar que $\mathcal{G}+\mathcal{H} = \langle \boldsymbol{U} \rangle$ ◁

Nota 8.3.39 La demostración de la proposición 8.3.38 proporciona un método para calcular un sistema generador del subespacio suma. ◁

Ejemplo 8.3.40 En $\mathbb{R}^4$, sea $\mathcal{G}$ el subespacio generado por el sistema

$$\boldsymbol{S} = [(1,1,0,1)\,,(2,1,0,1)\,,(0,3,0,3)],$$

y sea $\mathcal{H}$ el subespacio dado por las ecuaciones implícitas

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x_1 & +x_2 & +x_3 & & = & 0 \\ & & & x_4 & = & 0 \end{array}\right. .$$

Para construir $\mathcal{G} + \mathcal{H}$ necesitamos un sistema generador de $\mathcal{G}$ y otro de $\mathcal{H}$. Por lo tanto, para $\mathcal{H}$ tenemos que resolver las ecuaciones implícitas para obtener un sistema generador. No se detallará aquí tal resolución, la cual proporciona el sistema generador de $\mathcal{H}$

$$\boldsymbol{T} = [(1,-1,0,0), (0,1,-1,0)].$$

Por tanto la unión de los sistemas generadores de $\mathcal{G}$ y $\mathcal{H}$, generan $\mathcal{G} + \mathcal{H}$. Así

$$\mathcal{G} + \mathcal{H} = \langle (1,1,0,1), (2,1,0,1), (0,3,0,3), (1,-1,0,0), (0,1,-1,0) \rangle .$$

$\triangleleft$

Nota 8.3.41 Observemos que para calcular la suma de dos subespacios, necesitamos representar ambos mediante un sistema generador.

Notemos además que podríamos definir de manera análoga la suma de una cantidad finita de subespacios de $\mathbb{R}^n$

$$\mathcal{G}_1 + \mathcal{G}_2 + \cdots + \mathcal{G}_p,$$

y se podría obtener un sistema generador suyo concatenando sistemas generadores de cada uno de los sumandos. $\triangleleft$

Definición 8.3.42 Diremos que dos subespacios $\mathcal{G}$ y $\mathcal{H}$ forman suma directa si son suplementarios en $\mathcal{G} + \mathcal{H}$. En este caso la suma se escribirá como $\mathcal{G} \oplus \mathcal{H}$ $\triangleleft$

Proposición 8.3.43 Dos subespacios forman suma directa si y solo si cuando se une una base de uno con otra del otro, se obtiene una base de la suma. $\triangleleft$

Ejemplo 8.3.44 Consideramos en $\mathbb{R}^4$ los subespacios $\mathcal{G}$ y $\mathcal{H}$ generados respectivamente por

$$\boldsymbol{S} = [(1,1,2,1), (2,2,1,2)],$$

y

$$\boldsymbol{T} = [(0,1,1,1)].$$

Es sencillo ver que $\boldsymbol{S}$ es base de $\mathcal{G}$ y que $\boldsymbol{T}$ es base de $\mathcal{H}$. Al unirlas se obtiene

$$\boldsymbol{V} = [(1,1,2,1), (2,2,1,2), (0,1,1,1)],$$

que es un sistema generador de $\mathcal{G} + \mathcal{H}$. Si además fuese libre, sería una base. Pero es fácil ver, reduciendo a forma escalonada

$$\boldsymbol{V}_F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego $\operatorname{rg} \boldsymbol{V} = 3$, por tanto $\boldsymbol{V}$ es una base de $\mathcal{G} + \mathcal{H}$, y forman suma directa, por lo que podemos escribir su suma como $\mathcal{G} \oplus \mathcal{H}$. $\triangleleft$

Nota 8.3.45 De la misma manera, podemos decir que una cantidad finita de subespacios de $\mathbb{R}^n$ forman suma directa si al unir bases de cada uno de ellos se obtiene una base de la suma, y se representará la suma en este caso por

$$\mathcal{G}_1 \oplus \mathcal{G}_2 \oplus \cdots \oplus \mathcal{G}_p.$$

$\triangleleft$

8.3.4.2 Intersección

Definición 8.3.46 Sean $\mathcal{G}$ y $\mathcal{H}$ dos subespacios de $\mathbb{R}^n$. La intersección conjuntista

$$\mathcal{G} \cap \mathcal{H} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \,/\, \boldsymbol{x} \in \mathcal{G} \text{ y } \boldsymbol{x} \in \mathcal{H}\},$$

es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ al que llamaremos *subespacio intersección* de $\mathcal{G}$ y $\mathcal{H}$. $\triangleleft$

Nota 8.3.47 Para calcular la intersección de dos subespacios basta unir unas ecuaciones implícitas de uno de ellos con unas ecuaciones implícitas del otro. Con ello se obtienen ecuaciones implícitas de la intersección, pues aquellos elementos que las verifican todas son los que están a la vez en uno y otro subespacio. $\triangleleft$

Ejemplo 8.3.48 Sean $\mathcal{G}$ y $\mathcal{H}$ los subespacios de $\mathbb{R}^3$ generados por los sistemas

$$\boldsymbol{S} = [(1,1,0)\,,(0,0,1)],$$

y

$$\boldsymbol{T} = [(0,1,1)\,,(1,0,0)],$$

respectivamente. Para calcular su intersección hay que calcular ecuaciones implícitas de cada uno de ellos. Se deja al lector ver que

$$\left\{ \begin{array}{cccc} x_1 & -x_2 & & = & 0 \end{array} \right. ,$$

son ecuaciones implícitas de $\mathcal{G}$ y que

$$\left\{ \begin{array}{cccc} & x_2 & -x_3 & = & 0 \end{array} \right. ,$$

Son ecuaciones implícitas de $\mathcal{H}$. Uniéndolas se obtiene

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} x_1 & -x_2 & & = & 0 \\ & x_2 & -x_3 & = & 0 \end{array} \right. ,$$

que son ecuaciones implícitas para $\mathcal{G} \cap \mathcal{H}$. $\triangleleft$

Proposición 8.3.49 [Primera fórmula dimensional]
Sean $\mathcal{G}$ y $\mathcal{H}$ dos subespacios de $\mathbb{R}^n$. Se tiene

$$\dim \mathcal{G} + \dim \mathcal{H} = \dim(\mathcal{G} + \mathcal{H}) + \dim(\mathcal{G} \cap \mathcal{H}).$$

◁

Proposición 8.3.50 [Caracterización de la suma directa]
Sean $\mathcal{G}$ y $\mathcal{H}$ dos subespacios de $\mathbb{R}^n$. Son equivalentes

(i) $\mathcal{G}$ y $\mathcal{H}$ forman suma directa.

(ii) $\dim(\mathcal{G} \cap \mathcal{H}) = 0$.

(iii) $\dim \mathcal{G} + \dim \mathcal{H} = \dim(\mathcal{G} + \mathcal{H})$.

◁

Ejemplo 8.3.51 Retomemos el Ejemplo 8.3.44. Teníamos en $\mathbb{R}^4$ los subespacios $\mathcal{G} = \langle \boldsymbol{S} \rangle$ y $\mathcal{H} = \langle \boldsymbol{T} \rangle$, donde

$$\boldsymbol{S} = [(1, 1, 2, 1)\,, (2, 2, 1, 2)],$$

y

$$\boldsymbol{T} = [(0, 1, 1, 1)].$$

Utilizando la definición, se veía que formaban suma directa. También podría haberse demostrado por cualquiera de las condiciones de la Proposición 8.3.50.

Por ejemplo, en este caso

$$\dim \mathcal{G} + \dim \mathcal{H} = 2 + 1 = 3 = \dim(\mathcal{G} + \mathcal{H}).$$

Si calculamos $\mathcal{G} \cap \mathcal{H}$, (ejercicio que se deja al lector), podemos ver que es el subespacio nulo $\{(0, 0, 0, 0)\}$, cuya dimensión es 0. ◁

8.4 Coordenadas

Definición 8.4.1 Sea $\mathcal{G}$ un subespacio de $\mathbb{R}^n$ de dimensión d. Sea $\boldsymbol{T}$ una base de $\mathcal{G}$. Sea $\boldsymbol{z} \in \mathcal{G}$. Por 8.3.14, sabemos que existen únicos $\alpha_1, \ldots, \alpha_d \in \mathbb{R}$ tales que

$$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{T}_C \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_d \end{pmatrix}.$$

Llamaremos a $\alpha_1, \ldots, \alpha_d$ las *coordenadas* de $\boldsymbol{z}$ en la base $\boldsymbol{T}$ de $\mathcal{G}$, y las denotaremos por

$$\boldsymbol{z}_{\boldsymbol{T}} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)_{\boldsymbol{T}}.$$

◁

Ejemplo 8.4.2 Sea $\mathcal{G}$ el subespacio de $\mathbb{R}^5$ generado por

$$\boldsymbol{T} = [(1,1,0,0,0)\,,(0,1,1,0,0)\,,(0,0,1,1,0)].$$

Puesto que $\boldsymbol{T}$ es escalonado, es inmediato que $\operatorname{rg}\boldsymbol{T} = 3$, y por tanto $\boldsymbol{T}$ es una base de $\mathcal{G}$. Consideremos los vectores de $\mathcal{G}$

$$\boldsymbol{x_1} = (1,2,3,2,0)\,, \boldsymbol{x_2} = (-1,0,1,0,0)\,, \boldsymbol{x_3} = (0,-3,-5,-2,0)\,.$$

Se tiene que

$$\begin{array}{rcl} \boldsymbol{x_1} & = & (1,1,0,0,0) + (0,1,1,0,0) + 2\,(0,0,1,1,0) \\ \boldsymbol{x_2} & = & -\,(1,1,0,0,0) + (0,1,1,0,0) \\ \boldsymbol{x_3} & = & -3\,(0,1,1,0,0) - 2\,(0,0,1,1,0)\,, \end{array}$$

por lo que las coordenadas de dichos vectores en $\boldsymbol{T}$ son

$$\begin{array}{rcl} \boldsymbol{x_{1S}} & = & (1,1,2)_{\boldsymbol{T}} \\ \boldsymbol{x_{2S}} & = & (-1,1,0)_{\boldsymbol{T}} \\ \boldsymbol{x_{3S}} & = & (0,-3,-2)_{\boldsymbol{T}}\,, \end{array}$$

◁

Nota 8.4.3 Sean $\mathcal{G}$ un subespacio de $\mathbb{R}^n$ de dimensión d, $\boldsymbol{T}$ una base de $\mathcal{G}$ y $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z} \in \mathcal{G}$. Supongamos que

$$\boldsymbol{z_T} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)_{\boldsymbol{T}}\,,$$

y que

$$\boldsymbol{x_T} = (\beta_1, \ldots, \beta_d)_{\boldsymbol{T}}\,.$$

Claramente $\boldsymbol{x_T}$ y $\boldsymbol{z_T}$, pueden ser identificados con sendos vectores de $\mathbb{R}^d$, de manera que podemos definir la suma $\boldsymbol{x_T} + \boldsymbol{z_T}$ como la suma de los vectores

$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_d) + (\beta_1, \ldots, \beta_d) = (\alpha_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_d + \beta_d)\,.$$

Del mismo modo, para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, podemos definir

$$\lambda \boldsymbol{z_T} = \lambda\,(\beta_1, \ldots, \beta_d) = (\lambda\beta_1, \ldots, \lambda\beta_d)\,.$$

◁

De esta manera, se comprueba fácilmente que se verifican

Propiedades 8.4.4 Sean $\mathcal{G}$ un subespacio de $\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{T}$ una base de $\mathcal{G}$, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z} \in \mathcal{G}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$.

1) $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{z})_{\boldsymbol{T}} = \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{T}} + \boldsymbol{z}_{\boldsymbol{T}}$.

2) $(\lambda \boldsymbol{z})_{\boldsymbol{T}} = \lambda \boldsymbol{z}_{\boldsymbol{T}}$.

$\triangleleft$

Definición 8.4.5 Sean $\mathcal{G}$ un subespacio de $\mathbb{R}^n$ de dimensión d, $\boldsymbol{S}$ un sistema de $\mathcal{G}$ formado por s vectores y $\boldsymbol{T}$ una base de $\mathcal{G}$. Llamaremos *matriz del sistema* $\boldsymbol{S}$ en la base $\boldsymbol{T}$, o simplemente matriz de $\boldsymbol{S}$ en $\boldsymbol{T}$, y la denotaremos por $\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{T}}$ a la matriz $d \times s$ cuya columna i-ésima está formada por las coordenadas del vector i-ésimo de $\boldsymbol{S}$ en la base $\boldsymbol{T}$, para $i = 1, \ldots, s$. $\triangleleft$

Definición 8.4.6 Sea $\mathcal{G}$ un subespacio de $\mathbb{R}^n$ de dimensión d. Sean $\boldsymbol{S}$ y $\boldsymbol{T}$ dos bases de $\mathcal{G}$. Llamaremos *matriz de paso* de $\boldsymbol{S}$ a $\boldsymbol{T}$ y la denotaremos por $\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{T}}$ a la matriz de $\boldsymbol{S}$ en $\boldsymbol{T}$. Nótese que es una matriz cuadrada de orden d. $\triangleleft$

Lema 8.4.7 Sea $\mathcal{G}$ un subespacio de $\mathbb{R}^n$ de dimensión d. Sean $\boldsymbol{S}$ y $\boldsymbol{T}$ dos bases de $\mathcal{G}$. Se tiene que

$$\boldsymbol{T}_C \boldsymbol{S}_{\boldsymbol{T}} = \boldsymbol{S}_C.$$

Demostración:
Para cada $i \in \{1, \ldots, d\}$, por 8.4.6 la columna i-ésima de $\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{T}}$ son las coordenadas del i-ésimo vector de $\boldsymbol{S}$ en $\boldsymbol{T}$, y por 8.4.1 y 6.4.26 la columna i-ésima de $\boldsymbol{T}_C \boldsymbol{S}_{\boldsymbol{T}}$ son las componentes del i-ésimo vector de $\boldsymbol{S}$, lo que por definición es la i-ésima columna de $\boldsymbol{S}_C$.

Por lo tanto $\boldsymbol{T}_C \boldsymbol{S}_{\boldsymbol{T}}$ y $\boldsymbol{S}_C$ son iguales, pues lo son columna a columna. $\triangleleft$

Teorema 8.4.8 [Cambio de coordenadas]
Sea $\mathcal{G}$ un subespacio de $\mathbb{R}^n$ de dimensión d. Sean $\boldsymbol{S}$ y $\boldsymbol{T}$ dos bases de $\mathcal{G}$. Para cada $\boldsymbol{z} \in \mathcal{G}$ se tiene que

$$\boldsymbol{z}_{\boldsymbol{T}} = \boldsymbol{S}_{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{z}_{\boldsymbol{S}}.$$

Demostración:
Sea $\boldsymbol{z} \in \mathcal{G}$. Aplicando 8.4.7 y 8.4.1 se tiene

$$\boldsymbol{T}_C(\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{z}_{\boldsymbol{S}}) = (\boldsymbol{T}_C \boldsymbol{S}_{\boldsymbol{T}}) \boldsymbol{z}_{\boldsymbol{S}} = \boldsymbol{S}_C \boldsymbol{z}_{\boldsymbol{S}} = \boldsymbol{z} = \boldsymbol{T}_C \boldsymbol{z}_{\boldsymbol{T}},$$

y como las coordenadas son únicas, ha de darse

$$\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{z}_{\boldsymbol{S}} = \boldsymbol{z}_{\boldsymbol{T}}$$

$\triangleleft$

Ejemplo 8.4.9 Volviendo sobre el Ejemplo 8.4.2, tenemos que

$$\boldsymbol{T} = [(1,1,0,0,0)\,,(0,1,1,0,0)\,,(0,0,1,1,0)],$$

es una base de $\mathcal{G}$. Es sencillo comprobar que

$$\boldsymbol{S} = [\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{x_3}],$$

donde

$$\boldsymbol{x_1} = (1,2,3,2,0)\,, \boldsymbol{x_2} = (-1,0,1,0,0)\,, \boldsymbol{x_3} = (0,-3,-5,-2,0)\,,$$

es otra base de $\mathcal{G}$. Teníamos que

$$\begin{array}{rcl} \boldsymbol{x_{1S}} & = & (1,1,2)_{\boldsymbol{T}} \\ \boldsymbol{x_{2S}} & = & (-1,1,0)_{\boldsymbol{T}} \\ \boldsymbol{x_{3S}} & = & (0,-3,-2)_{\boldsymbol{T}}\,, \end{array}$$

Luego

$$\boldsymbol{S_T} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Consideremos el vector de $\mathcal{G}$, $\boldsymbol{y} = (0,-1,-1,0,0)$. Es sencillo comprobar que

$$\boldsymbol{y_S} = (1,1,1)_{\boldsymbol{S}}\,.$$

Las fórmulas de cambio de coordenadas dicen que

$$\boldsymbol{y_T} = \boldsymbol{S_T}\boldsymbol{y_S} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (0,-1,0)_{\boldsymbol{T}}\,.$$

◁

Proposición 8.4.10 Sea $\mathcal{G}$ un subespacio de $\mathbb{R}^n$ de dimensión d. Sean $\boldsymbol{V}$ un sistema de $\mathcal{G}$ y $\boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{T}$ dos bases de $\mathcal{G}$. Se verifica

1) $\boldsymbol{S_T}\boldsymbol{V_S} = \boldsymbol{V_T}$

2) $\boldsymbol{S_T}$ es inversible y $(\boldsymbol{S_T})^{-1} = \boldsymbol{T_S}$

◁

8.4.1 Coordenadas en $\mathbb{R}^n$

En el caso particular en que consideremos como espacio de $\mathbb{R}^n$ el propio $\mathbb{R}^n$, siguen siendo válidas todas las nociones, definiciones y notaciones empleadas anteriormente para el estudio de las coordenadas.

Nota 8.4.11 En 8.3.11, se introdujo la base canónica en $\mathbb{R}^n$. Si $\boldsymbol{E}$ es tal base, y $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ es un vector de $\mathbb{R}^n$, entonces se tiene la particularidad de que sus componentes son justamente las coordenadas de $\boldsymbol{x}$ en la base canónica, es decir

$$(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_n)_{\boldsymbol{E}} = \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{E}},$$

y esta es la propiedad que hace que la base canónica sea especial. Por tanto, dado un vector, siempre que necesitemos trabajar con coordenadas, tendremos en cuenta que sus componentes son sus coordenadas en la base canónica.

De esto se sigue fácilmente que si $\boldsymbol{S}$ es un sistema de $\mathbb{R}^n$ entonces

$$\boldsymbol{S}_C = \boldsymbol{S}_{\boldsymbol{E}}$$

◁

Para concluir esta sección, veamos un ejemplo de cambio de coordenadas en $\mathbb{R}^5$

Ejemplo 8.4.12 Sea $\boldsymbol{E}$ la base canónica de $\mathbb{R}^5$. El lector puede comprobar fácilmente que el sistema

$$\boldsymbol{S} = [(1,1,0,0,0)\,, (0,1,1,0,0)\,, (0,1,1,1,0)\,, (0,1,0,1,1)\,, (1,1,1,1,1)],$$

es otra base de $\mathbb{R}^5$. Sea el vector de $\mathbb{R}^5$, $\boldsymbol{x} = (-1,3,4,-2,1)$. Calculemos las coordenadas de $\boldsymbol{x}$ en la base $\boldsymbol{S}$. Las coordenadas de $\boldsymbol{x}$ en la base canónica son sus componentes, luego

$$\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{E}} = (-1,3,4,-2,1)_{\boldsymbol{E}}\,.$$

Por la fórmula de cambio de coordenadas, tenemos que

$$\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{S}} = \boldsymbol{E}_{\boldsymbol{S}} \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{E}}.$$

Como tenemos las componentes de los vectores de $\boldsymbol{S}$, que son sus coordenadas en la base canónica, se tiene que

$$\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{E}} = \boldsymbol{S}_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ahora

$$\boldsymbol{E_S} = (\boldsymbol{S_E})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 & -1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1/2 & 1/2 & -1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x_S} &= \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 & -1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1/2 & 1/2 & -1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= (-3/2, 13/2, -3, 1/2, 1/2)_{\boldsymbol{S}}\,. \end{aligned}$$

◁

8.5 Ejercicios

Ejercicio 8.1 Probar que el subconjunto de $\mathbb{R}^3$ formado por todos sus elementos con primera componente 1, no es un subespacio.

Ejercicio 8.2 Calcular una base, ecuaciones paramétricas, ecuaciones implícitas y la dimensión del subespacio de $\mathbb{R}^4$ formado por aquellos vectores cuya suma de sus componentes es nula, en caso de que sea un subespacio.

Ejercicio 8.3 En $\mathbb{R}^6$ se consideran los vectores

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x_1} &= (1, -1, 2, 0, 1, 0)\,, & \boldsymbol{x_2} &= (1, 2, 3, 0, 1, 2)\,, \\ \boldsymbol{x_3} &= (-2, 1, -1, -1, -1, 1)\,, & \boldsymbol{x_4} &= (-7, -7, 4, 3, 4, -4)\,, \\ \boldsymbol{y_1} &= (1, 1, 1, 1, 1, 1)\,, & \boldsymbol{y_2} &= (1, 5/2, 7/2, 1/2, 3/2, 0)\,. \end{aligned}$$

Sea el subespacio $\mathcal{G} = \langle \boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{x_3}, \boldsymbol{x_4} \rangle$, y sea $\mathcal{H} = \langle \boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{y_2} \rangle$

a) Calcular unas ecuaciones paramétricas y una base de $\mathcal{G} \cap \mathcal{H}$.

b) Calcular ecuaciones implícitas de $\mathcal{G} + \mathcal{H}$.

c) Encontrar un suplementario de $\mathcal{G}$ en $\mathcal{G} + \mathcal{H}$.

d) Encontrar un suplementario de $\mathcal{G}+\mathcal{H}$ en $\mathbb{R}^6$ y dar una base, ecuaciones paramétricas e implícitas de dicho suplementario.

e) Encontrar un base de $\mathcal{G}$ y calcular las coordenadas de cada uno de los vectores $\boldsymbol{x_i}$, $i = 1, \ldots, 4$ en dicha base.

Ejercicio 8.4 En $\mathbb{R}^6$ se consideran los vectores

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x_1} &= (1,-1,2,0,1,0)\,, & \boldsymbol{x_2} &= (1,2,3,0,1,2)\,,\\ \boldsymbol{x_3} &= (-2,1,-1,-1,-1,1)\,, & \boldsymbol{x_4} &= (3,-10,-3,2,1,-8)\,,\\ \boldsymbol{y_1} &= (1,1,1,1,1,1)\,, & \boldsymbol{y_2} &= (-1,2,0,0,0,2)\,. \end{aligned}$$

Sea el subespacio $\mathcal{G} = \langle \boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{x_3}, \boldsymbol{x_4}\rangle$, y sea $\mathcal{H} = \langle \boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{y_2}\rangle$

a) Calcular una ecuaciones paramétricas y una base de $\mathcal{G}\cap\mathcal{H}$.

b) Calcular ecuaciones implícitas de $\mathcal{G}+\mathcal{H}$.

c) Encontrar un suplementario de $\mathcal{G}$ en $\mathcal{G}+\mathcal{H}$.

d) Encontrar un suplementario de $\mathcal{G}+\mathcal{H}$ en $\mathbb{R}^6$ y dar una base, ecuaciones paramétricas e implícitas de dicho suplementario.

e) Encontrar un base de $\mathcal{G}$ y calcular las coordenadas de cada uno de los vectores $\boldsymbol{x_i}$, $i = 1, \ldots, 4$ en dicha base.

Ejercicio 8.5 Calcular una base de un subespacio de $\mathbb{R}^5$ que verifique las ecuaciones implícitas

$$\left\{\begin{array}{cccccc} x_1 & -x_2 & +2x_4 & -3x_5 & = & 0 \\ & x_2 & & +x_5 & = & 0 \end{array}\right.,$$

y que no contenga al vector $(-4,0,1,2,0)$.
¿Es el subespacio calculado el único con esa propiedad?

Ejercicio 8.6 Sea el sistema de $\mathbb{R}^4$

$$\boldsymbol{S} = [(1,1,1,1)\,,(1,0,1,0)\,,(0,2,0,2)\,,(1,-1,1,-1)\,,(3,-2,3,-2)\,,(1,-1,1,0)].$$

Calcular una base de $\langle \boldsymbol{S}\rangle$ formada por elementos de $\boldsymbol{S}$. Obtener el sistema escalonado reducido de $\langle \boldsymbol{S}\rangle$. Encontrar un fórmula que permita calcular las coordenadas de cualquier vector de $\langle \boldsymbol{S}\rangle$ en el sistema reducido a partir de las coordenadas en la primera base calculada.

Ejercicio 8.7 Se consideran los siguientes sistemas de $\mathbb{R}^5$

$$\boldsymbol{S} = [(3,6,39,27,21)\,,(-1,3,7,11,8)\,,(1,0,5,1,1)\,,(-1,2,3,7,5)],$$
$$\boldsymbol{T} = [(-1,1,-1,3,2)\,,(6,-4,14,-10,-6)\,,(4,-3,8,-8,-5)].$$

¿Es $\langle \boldsymbol{S} \rangle = \langle \boldsymbol{T} \rangle$?

Ejercicio 8.8 Calcular la dimensión, una base, ecuaciones paramétricas, ecuaciones implícitas de los subespacios de $\mathbb{R}^n$ generados por los siguientes sistemas y lo mismo para un suplementario en $\mathbb{R}^n$ de cada uno de esos subespacios.

a) Para $n = 3$
$$[(-3,1,1)\,,(4,-1,-1)\,,(9,-3,-4)].$$

b) Para $n = 5$
$$[\,(0,-2,-1,0,-11)\,,(0,-4,-2,-1,-24)\,,(0,-5,-3,0,-30)\,,(0,0,0,1,2)\,,(0,2,1,0,11)].$$

c) Para $n = 5$
$$[(-1,0,-3,-3,-4)\,,(0,-1,-4,-1,-4)\,,(1,2,11,5,12)\,,(1,1,7,4,8)].$$

d) Para $n = 7$
$$[\,(0,0,2,6,6,10,4)\,,(0,0,-5,-15,-15,-25,-10)\,,(0,-1,-3,-12,-14,-18,-9)\,,(0,1,0,3,5,3,3)\,,(0,0,-1,-3,-3,-5,-2)\,,(0,0,1,3,3,5,2)].$$

e) Para $n = 4$
$$[(4,20,4,12)\,,(6,30,6,18)\,,(1,5,1,3)].$$

f) Para $n = 7$
$$[\,(-3,0,3,-9,0,-9,-9)\,,(5,0,-4,16,5,16,16)\,,(1,1,0,5,7,6,9)\,,(2,0,-2,6,0,6,6)\,,(0,0,1,1,5,1,1)].$$

g) Para $n = 4$
$$[(3,2,20,14)\,,(-11,-7,-72,-50)].$$

h) Para $n = 2$
$$[(7,-2)\,,(1,0)\,,(-4,1)].$$

i) Para $n = 7$

$$[\,(0,2,-2,6,-4,0,2)\,,(0,-1,1,-3,2,0,-1)\,,(1,0,1,3,5,4,5)\,,\\ (2,1,0,8,4,6,10)\,,(1,1,0,6,3,4,6)].$$

j) Para $n = 4$

$$[(-4,-16,1,2)\,,(1,4,0,0)\,,(3,12,0,-1)\,,(-1,-4,0,1)\,,(-2,-8,0,0)].$$

k) Para $n = 5$

$$[(-1,-4,0,-2,-1)\,,(1,4,1,7,5)].$$

l) Para $n = 5$

$$[\,(-1,0,-1,-3,-1)\,,(-4,-1,-7,-17,-8)\,,(3,1,6,14,7)\,,\\ (-4,0,-4,-12,-4)].$$

m) Para $n = 2$

$$[(-3,4)\,,(-4,5)\,,(1,-1)].$$

n) Para $n = 7$

$$[\,(3,12,-2,6,0,7,5)\,,(5,20,-4,8,0,11,7)\,,(-4,-16,3,-7,0,-9,-6)\,,\\ (4,16,-3,7,1,11,11)].$$

o) Para $n = 7$

$$[\,(0,1,0,4,1,2,0)\,,(1,-1,0,0,4,3,1)\,,(0,0,1,2,5,4,0)\,,\\ (0,1,-1,2,-4,-2,0)\,,(-1,1,0,0,-4,-3,0)].$$

p) Para $n = 6$

$$[\,(-1,-5,-2,-3,-7,-13)\,,(7,35,13,20,46,86)\,,(1,5,2,3,7,13)\,,\\ (13,65,24,37,85,159)].$$

q) Para $n = 5$

$$[(2,4,0,10,1)\,,(-1,-3,0,-6,-1)\,,(-1,-4,-1,-9,1)\,,(1,2,0,5,0)].$$

r) Para $n = 5$

$$[\,(1,0,-1,1,1)\,,(0,1,0,0,4)\,,(1,0,-1,1,1)\,,(0,-2,0,-1,-10)\,,\\ (1,2,-2,0,3)\,,(-2,-2,2,-1,-8)].$$

s) Para $n = 3$
$$[(0,1,-1),(-1,-2,2),(0,-1,0)].$$

t) Para $n = 5$
$$[(2,8,1,11,7),(1,4,0,3,3),(1,4,1,8,4),(-1,-4,0,-3,-3)].$$

Ejercicio 8.9 Calcular la dimensión, una base, unas ecuaciones paramétricas y unas ecuaciones implícitas de los subespacios generados por los siguientes sistemas según los valores de los parámetros.

a)
$$\begin{aligned}&[\,(0,-1,a,2+a(a-1),1),(0,1,-a-2,-8-a(a-1),-11),\\&(0,-2,2a+2,10+2a(a-1),12),(-a,2,-2a+1,-5-a(a-1),-1),\\&(0,0,-1,-3,-5),(-2a,-2,2a+4,8+3a(a-1),14)].\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}&[\,(-a(b-1),0,14ab(c-1)),(-a(b-1),0,8ab(c-1)),\\&(3a(b-1),-(a-1)b,-7ab(c-1)),\\&(3a(b-1),-(a-1)b,0),(0,0,ab(c-1))].\end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned}&[\,\big(-2a-1,-a-1,2-2a^2,-2a\big),\big(2a-1,4-a,-17+2a^2,2a\big),\\&(-1,2-a,-5,0),\big(a-1,3-a,-11+a^2,a\big),\\&\big(a+1,a,a^2+4,a\big),\big(2a+1,a+1,-2+2a^2,2a\big)].\end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned}&[\,(a+2,b-1,4,a+3,3,4,3),(-a-1+a(b-1),1,3,-a,1,2,5),\\&(a+3,2b-2,8,5+a,6,8,6+(a-1)b),\\&(-a(b-1)+a,-b,-7,a-2,-4,-6,-8),\\&(-a-3,2-2b,-8,-5-a,-6,-8,-6-(a-1)b)].\end{aligned}$$

Ejercicio 8.10 Estudiar para que valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ los siguientes conjuntos son subespacios de $\mathbb{R}^3$

a) $F_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x + 2y + \alpha e^z = 0\}$.

b) $F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, \alpha x + \alpha^2 y - 3e^{\alpha} z = 0\}$.

c) $F_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x + 2y + z = \operatorname{sen} \alpha\}$.

Ejercicio 8.11 Sean

$$\mathcal{F} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x = y = z\right\},$$
$$\mathcal{G} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x = 0\right\}.$$

Probar que $\mathbb{R}^3 = \mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$.

Ejercicio 8.12 Se considera el sistema de $\mathbb{R}^3$

$$\boldsymbol{S} = [(1, 1, -1), (3, 8, 2), (0, -3, -3), (-2, -2, 2)].$$

Sea $\mathcal{F} = \langle \boldsymbol{S} \rangle$

a) Calcular $\operatorname{rg} \boldsymbol{S}$ y una base de $\mathcal{F}$.

b) Probar que $(3, -17, -23) \in \mathcal{F}$ y hallar sus coordenadas en la base calculada en el apartado anterior.

c) Hallar un subespacio $\mathcal{G}$ que sea suplementario de $\mathcal{F}$ en $\mathbb{R}^3$.

d) Encontrar $\boldsymbol{a} \in \mathcal{F}$ y $\boldsymbol{b} \in \mathcal{G}$ tales que $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (2, 17, 12)$.

e) Hallar un suplementario de $\mathcal{F}$ en $\mathbb{R}^3$ distinto de $\mathcal{G}$.

Ejercicio 8.13 Se considera el sistema de $\mathbb{R}^3$

$$\boldsymbol{S} = [(0, 1, 1), (4, 1, -1), (2, 1, 0)].$$

Sea $\mathcal{F} = \langle \boldsymbol{S} \rangle$

a) Calcular una base de $\mathcal{F}$

b) Calcular ecuaciones implícitas de $\mathcal{F}$.

c) Calcular una base de

$$\mathcal{G} = \left\{(\alpha + 3\beta - \gamma, \beta - \gamma, \alpha + 2\beta) \in \mathbb{R}^3 \,/\, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\right\}.$$

d) Calcular una base de $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$.

e) Calcular una base de $\mathcal{F} + \mathcal{G}$.

Ejercicio 8.14 Sean los subespacios de $\mathbb{R}^4$, $\mathfrak{F}$ con ecuaciones implícitas

$$\left\{ \; x - y = 0 \quad ,\right.$$

para $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ y $\mathfrak{G}$ generado por el sistema

$$[(1,1,2,1)\,,(2,0,-1,1)].$$

Hallar bases y dimensiones de $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}$ y $\mathfrak{F} + \mathfrak{G}$.

Ejercicio 8.15 Sean $\beta \in \mathbb{R}$ y $\mathfrak{F}$ y $\mathfrak{G}$ los subespacios de $\mathbb{R}^3$ con ecuaciones implícitas respectivas

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 0 \\ 2x & - & y & & & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 3x & + & \beta y & + & z & = & 0 \\ 2x & - & y & & & = & 0 \end{array} \right.$$

para $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
Estudiar si existe algún valor de β para el que $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}$.

Ejercicio 8.16 Calcular ecuaciones paramétricas del subespacio de $\mathbb{R}^3$ con ecuaciones implícitas

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & & & + & 2z & = & 0 \\ & & y & - & z & = & 0 \\ x & + & y & + & z & = & 0 \\ 2x & + & y & + & 3z & = & 0 \end{array} \right.$$

Ejercicio 8.17 Calcular ecuaciones implícitas del subespacio de $\mathbb{R}^3$ con ecuaciones paramétricas

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} x & = & \alpha & + & \beta \\ y & = & & & 2\beta \\ z & = & \alpha & - & \beta \end{array} \right.$$

Capítulo 9

Aplicaciones lineales

9.1 Transformaciones lineales

Supongamos que A es una matriz $m \times n$ y que $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$. Con las identificaciones entre vectores y matrices introducidas en el capítulo anterior, se tiene que $\boldsymbol{y} := \mathsf{A}\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m$. Por lo tanto podemos interpretar la matriz A como un mecanismo que sirve para transformar vectores de $\mathbb{R}^n$ en vectores de $\mathbb{R}^m$.

Ejemplo 9.1.1 Consideramos la matriz 3×5

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -2 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Podemos transformar el vector de $\mathbb{R}^5$

$$(-2, 1, -1, 0, 2)\,,$$

en el vector de $\mathbb{R}^3$

$$(1, 8, -5)\,,$$

con el mecanismo matricial antes descrito, pues

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -2 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

◁

Definición 9.1.2 Sean $n, m \in \mathbb{N}$ y A una matriz $m \times n$. Llamaremos *transformación lineal* dada por A y la denotaremos por $\mathfrak{l}_{\mathsf{A}}$ a la aplicación con origen $\mathbb{R}^n$ y llegada en $\mathbb{R}^m$ definida por

$$\begin{aligned} \mathfrak{l}_{\mathsf{A}} : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ \boldsymbol{x} &\longmapsto \mathsf{A}\boldsymbol{x} \end{aligned} .$$

$\triangleleft$

Lema 9.1.3 Sean A y B dos matrices $m \times n$ tales que $\mathfrak{l}_{\mathsf{A}} = \mathfrak{l}_{\mathsf{B}}$. Entonces $\mathsf{A} = \mathsf{B}$.
Demostración:
Sea

$$\boldsymbol{E} = [\boldsymbol{e_1}, \dots, \boldsymbol{e_n}]$$

la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Para cada matriz $\mathsf{M}_{m \times n}$ y para cada $i = 1, \dots, n$, se tiene que $\mathsf{M}\boldsymbol{e_i}$ es la columna i-ésima de M. Como

$$\mathsf{A}\boldsymbol{e_i} = \mathfrak{l}_{\mathsf{A}}(\boldsymbol{e_i}) = \mathfrak{l}_{\mathsf{B}}(\boldsymbol{e_i}) = \mathsf{B}\boldsymbol{e_i},\ i = 1, \dots, n$$

entonces todas las columnas de A coinciden correlativamente con las columnas de B, luego A y B son iguales. $\triangleleft$

Ejemplo 9.1.4 Dada la matriz 3×5

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -2 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

del ejemplo anterior, la transformación lineal dada por A sería

$$\begin{aligned} \mathfrak{l}_{\mathsf{A}} : \qquad \mathbb{R}^5 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) &\longmapsto \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -2 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \end{aligned} .$$

Así

$$\mathfrak{l}_{\mathsf{A}}\left(-2, 1, -1, 0, 2\right) = \left(1, 8, -5\right),$$

Resulta interesante ver como sería la expresión general $\mathfrak{l}_{\mathsf{A}}$ actuando sobre un vector genérico de $\mathbb{R}^5$. Sea $\boldsymbol{y} = \mathfrak{l}_{\mathsf{A}}(\boldsymbol{x})$. Tenemos

$$(y_1, y_2, y_3) = \mathfrak{l}_{\mathsf{A}}\left(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\right) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -2 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} =$$
$$= \left(x_1 - x_2 + x_4 + 2x_5, 3x_1 - 2x_3 + 4x_4 + 6x_5, x_2 + 2x_3 + 4x_4 - 2x_5\right),$$

de donde

$$\begin{cases} y_1 = & x_1 & -x_2 & & +x_4 & +2x_5 \\ y_2 = & 3x_1 & & -2x_3 & +4x_4 & +6x_5 \\ y_3 = & & x_2 & +2x_3 & +4x_4 & -2x_5 \end{cases},$$

por lo que la componente i de $\mathbf{l}_{\mathsf{A}}(\boldsymbol{x})$ es la combinación lineal de las componentes de $\boldsymbol{x}$ con matriz de coeficientes la fila i-ésima de A, para $i = 1, 2, 3$.

Podemos interpretar también $\mathbf{l}_{\mathsf{A}}$ de otra forma. Como $\mathbf{l}_{\mathsf{A}}(\boldsymbol{x}) = \mathsf{A}\boldsymbol{x}$, si utilizamos la interpretación del producto de matrices del Lema 6.4.26 junto con nuestra identificación entre matrices y vectores, tenemos que $\mathbf{l}_{\mathsf{A}}(\boldsymbol{x})$ es la combinación lineal de los vectores columna de A con matriz de coeficientes dada por $\boldsymbol{x}$. Es decir

$$\begin{aligned} \mathbf{l}_{\mathsf{A}}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) =& x_1(1,3,0) + x_2(-1,0,1) + x_3(0,-2,2) + \\ &+ x_4(1,4,4) + x_5(2,6,-2)\,. \end{aligned}$$

◁

Las distintas expresiones la transformación lineal asociada a una matriz que hemos introducido en el Ejemplo 9.1.4 son completamente generales, como veremos más adelante.

9.2 Aplicaciones lineales

A continuación intentaremos generalizar la noción de transformación lineal a un tipo de transformaciones que conserven la estructura lineal en los espacios de llegada y salida, y veremos que en realidad no añadiremos ninguna noción nueva a la y ya introducida de transformación lineal..

Definición 9.2.1 Sean $n, m \in \mathbb{N}$. Diremos que $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es una *aplicación lineal* de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ si verifica las siguientes propiedades

1) $\mathbf{f}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \mathbf{f}(\boldsymbol{x}) + \mathbf{f}(\boldsymbol{y}),\ \forall\, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$.

2) $\mathbf{f}(\lambda\boldsymbol{x}) = \lambda\mathbf{f}(\boldsymbol{x}),\ \forall\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ y $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$.

◁

Definición 9.2.2 Sean $n, m, s \in \mathbb{N}$, $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una aplicación lineal y $\boldsymbol{S} = [\boldsymbol{a_1}, \ldots, \boldsymbol{a_s}]$ un sistema de $\mathbb{R}^n$. Llamaremos *sistema imagen* de $\boldsymbol{S}$ y lo denotaremos por $\mathbf{f}(\boldsymbol{S})$ al sistema de $\mathbb{R}^m$

$$\mathbf{f}(\boldsymbol{S}) = [\mathbf{f}(\boldsymbol{a_1}), \mathbf{f}(\boldsymbol{a_1}), \ldots, \mathbf{f}(\boldsymbol{a_s})].$$

◁

Teorema 9.2.3 [Caracterización de las aplicaciones lineales]
Sean $n, m \in \mathbb{N}$ y $\mathsf{f} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una aplicación. Las siguientes propiedades son equivalentes

(i) f es una aplicación lineal.

(ii) Para todo sistema $[\boldsymbol{a_1}, \dots, \boldsymbol{a_s}]$ de $\mathbb{R}^n$ y para toda colección de escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_s \in \mathbb{R}$, se tiene que

$$\mathsf{f}(\lambda_1 \boldsymbol{a_1} + \cdots + \lambda_s \boldsymbol{a_s}) = \lambda_1 \mathsf{f}(\boldsymbol{a_1}) + \lambda_2 \mathsf{f}(\boldsymbol{a_2}) + \cdots + \lambda_s \mathsf{f}(\boldsymbol{a_s}).$$

(iii) Existen nm escalares $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$ con $i = 1, \dots, m$ y $j = 1, \dots n$ tales que si $(y_1, \dots, y_m) = \mathsf{f}(x_1, \dots, x_n)$, se tiene

$$\left\{ \begin{array}{lcl} y_1 & = & \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \cdots + \alpha_{1n}x_n \\ y_2 & = & \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \cdots + \alpha_{2n}x_n \\ \vdots & & \qquad\qquad\vdots \\ y_m & = & \alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + \cdots + \alpha_{mn}x_n \end{array} \right.$$

(iv) Existe un sistema $\boldsymbol{S} = [\boldsymbol{b_1}, \dots, \boldsymbol{b_n}]$ de n vectores de $\mathbb{R}^m$, tal que

$$\mathsf{f}(\boldsymbol{x}) = x_1 \boldsymbol{b_1} + \cdots + x_n \boldsymbol{b_n}, \ \forall\, \boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

(v) Existe una matriz $\mathsf{A}_{m \times n}$ tal que $\mathsf{f} = \mathbf{l}_{\mathsf{A}}$.

Demostración:
El esquema de la demostración es

$$\begin{array}{ccccc} \textbf{(i)} & \Rightarrow & \textbf{(ii)} & & \\ \Uparrow & & \Downarrow & & \\ \textbf{(v)} & \Leftarrow & \textbf{(iv)} & \Leftrightarrow & \textbf{(iii)} \end{array}$$

(i)⇒(ii) Sean $[\boldsymbol{a_1}, \dots, \boldsymbol{a_s}]$ un sistema de $\mathbb{R}^n$ y $\lambda_1, \dots, \lambda_s \in \mathbb{R}$ escalares. Aplicando sucesivamente las dos propiedades que definen aplicación lineal, tenemos

$$\begin{array}{l} \mathsf{f}(\lambda_1 \boldsymbol{a_1} + \cdots + \lambda_s \boldsymbol{a_s}) = \\ = \mathsf{f}(\lambda_1 \boldsymbol{a_1}) + \mathsf{f}(\lambda_2 \boldsymbol{a_2} + \cdots + \lambda_s \boldsymbol{a_s}) = \\ = \mathsf{f}(\lambda_1 \boldsymbol{a_1}) + \mathsf{f}(\lambda_2 \boldsymbol{a_2}) + \mathsf{f}(\lambda_3 \boldsymbol{a_3} + \cdots + \lambda_s \boldsymbol{a_s}) = \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ = \mathsf{f}(\lambda_1 \boldsymbol{a_1}) + \mathsf{f}(\lambda_2 \boldsymbol{a_2}) + \cdots + \mathsf{f}(\lambda_{s-1} \boldsymbol{a_{s-1}} + \lambda_s \boldsymbol{a_s}) = \\ = \mathsf{f}(\lambda_1 \boldsymbol{a_1}) + \mathsf{f}(\lambda_2 \boldsymbol{a_2}) + \cdots + \mathsf{f}(\lambda_{s-1} \boldsymbol{a_{s-1}}) + \mathsf{f}(\lambda_s \boldsymbol{a_s}) = \\ = \lambda_1 \mathsf{f}(\boldsymbol{a_1}) + \lambda_2 \mathsf{f}(\boldsymbol{a_2}) + \cdots + \lambda_{s-1} \mathsf{f}(\boldsymbol{a_{s-1}}) + \lambda_s \mathsf{f}(\boldsymbol{a_s}), \end{array}$$

y por tanto **(ii)** es cierta.

(ii)⇒(iv) Supongamos que $\mathsf{f} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es una aplicación lineal. Consideramos el sistema de $\mathbb{R}^n$ formado por su base canónica,

$$\boldsymbol{E} = [\boldsymbol{e_1}, \dots, \boldsymbol{e_n}].$$

Para cada $i = 1 \dots n$, sea $\boldsymbol{b_i} = \mathsf{f}(\boldsymbol{e_i})$ y sea el sistema de $\mathbb{R}^m$

$$\boldsymbol{S} = [\boldsymbol{b_1}, \dots, \boldsymbol{b_n}].$$

Ahora, si $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, se tiene

$$\begin{aligned} \mathsf{f}(\boldsymbol{x}) = \mathsf{f}((x_1, \dots, x_n)) = \mathsf{f}(x_1\boldsymbol{e_1} + \cdots + x_n\boldsymbol{e_n}) = \\ \text{(Puesto que (ii) es cierta)} \\ = x_1\mathsf{f}(\boldsymbol{e_1}) + x_2\mathsf{f}(\boldsymbol{e_2}) + \cdots + x_n\mathsf{f}(\boldsymbol{e_n}) = x_1\boldsymbol{b_1} + \cdots + x_n\boldsymbol{b_n}, \end{aligned}$$

y por tanto **(iv)** es cierta

(iv)⇒(v) Si **(iv)** es cierta, existe un sistema $\boldsymbol{S} = [\boldsymbol{b_1}, \dots, \boldsymbol{b_n}]$ de n de $\mathbb{R}^m$, tal que

$$\mathsf{f}(\boldsymbol{x}) = x_1\boldsymbol{b_1} + \cdots + x_n\boldsymbol{b_n},\ \forall\, \boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Sea $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Por 8.2.10 y por 8.1.10, tenemos

$$\mathsf{f}(\boldsymbol{x}) = x_1\boldsymbol{b_1} + \cdots + x_n\boldsymbol{b_n} = \boldsymbol{S}_C \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{S}_C\boldsymbol{x},$$

Por lo que tomando $\mathsf{A} = \boldsymbol{S}_C$, tenemos que $\mathsf{f} = \mathsf{l}_\mathsf{A}$.

(v)⇒(i) Supongamos que existe una matriz A con $\mathsf{f} = \mathsf{l}_\mathsf{A}$. Sean $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Tenemos que, por las propiedades de las operaciones con matrices,

1) $\mathsf{f}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \mathsf{l}_\mathsf{A}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \mathsf{A}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \mathsf{A}\boldsymbol{x} + \mathsf{A}\boldsymbol{y} = \mathsf{l}_\mathsf{A}(\boldsymbol{x}) + \mathsf{l}_\mathsf{A}(\boldsymbol{y}) = \mathsf{f}(\boldsymbol{x}) + \mathsf{f}(\boldsymbol{y})$.

2) $\mathsf{f}(\lambda\boldsymbol{x}) = \mathsf{l}_\mathsf{A}(\lambda\boldsymbol{x}) = \mathsf{A}(\lambda\boldsymbol{x}) = \lambda\mathsf{A}\boldsymbol{x} = \lambda\mathsf{l}_\mathsf{A}(\boldsymbol{x}) = \lambda\mathsf{f}(\boldsymbol{x})$,

por lo que f es una aplicación lineal.

(iii)⇒(iv) Puesto que se verifica **(iii)**, existen $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots n$ tales que si $(y_1, \dots, y_m) = \mathsf{f}\,(x_1, \dots, x_n)$, se tiene

$$\left\{ \begin{array}{lcl} y_1 & = & \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \cdots + \alpha_{1n}x_n \\ y_2 & = & \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \cdots + \alpha_{2n}x_n \\ \vdots & & \qquad\qquad\vdots \\ y_m & = & \alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + \cdots + \alpha_{mn}x_n \end{array} \right.$$

Sea $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ y sea $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_m) = \mathsf{f}(\boldsymbol{x})$. Para cada $i = 1, \ldots, n$, construimos el vector de $\mathbb{R}^m$

$$\boldsymbol{b_i} = (\alpha_{1i}, \alpha_{2i}, \ldots, \alpha_{mi}) .$$

Escribiendo matricialmente las igualdades de la Propiedad **(iii)** y utilizando las identificaciones de 8.1.10, tenemos

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \cdots + \alpha_{1n}x_n \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \cdots + \alpha_{2n}x_n \\ \vdots \\ \alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + \cdots + \alpha_{mn}x_n \end{pmatrix} =$$

$$= x_1 \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \vdots \\ \alpha_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ \vdots \\ \alpha_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} \alpha_{1n} \\ \alpha_{2n} \\ \vdots \\ \alpha_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$= x_1\boldsymbol{b_1} + \cdots + x_n\boldsymbol{b_n},$$

y así **(iv)** es cierta.

(iv)⇒(iii) Por **(iv)** es cierta, existe un sistema $\boldsymbol{S} = [\boldsymbol{b_1}, \ldots, \boldsymbol{b_n}]$ de n de $\mathbb{R}^m$, tal que

$$\mathsf{f}(\boldsymbol{x}) = x_1\boldsymbol{b_1} + \cdots + x_n\boldsymbol{b_n},\ \forall\, \boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Sea $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ y sea $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_m) = \mathsf{f}(\boldsymbol{x})$. Si suponemos que

$$\boldsymbol{b_i} = (\alpha_{1i}, \alpha_{2i}, \ldots, \alpha_{mi}) ,\ i = 1, \ldots, n,$$

entonces con las identificaciones de 8.1.10,

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \boldsymbol{y} = \mathsf{f}\,(x_1, \ldots, x_n) = x_1\boldsymbol{b_1} + \cdots + x_n\boldsymbol{b_n} =$$

$$= x_1 \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \vdots \\ \alpha_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ \vdots \\ \alpha_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} \alpha_{1n} \\ \alpha_{2n} \\ \vdots \\ \alpha_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \cdots + \alpha_{1n}x_n \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \cdots + \alpha_{2n}x_n \\ \vdots \\ \alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + \cdots + \alpha_{mn}x_n \end{pmatrix},$$

igualdad matricial que nos conduce a

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1 = \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \cdots + \alpha_{1n}x_n \\ y_2 = \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \cdots + \alpha_{2n}x_n \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ y_m = \alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + \cdots + \alpha_{mn}x_n \end{array} \right. ,$$

y se verifica **(iii)**.

◁

De este modo cualquier aplicación lineal puede ser descrita matricialmente o en cualquiera de las formas que veíamos en el Ejemplo 9.1.4. Además la demostración del teorema nos muestra mecanismos para pasar de una a otra escritura.

Otra consecuencia es que las aplicaciones lineales respetan las combinaciones lineales.

Definición 9.2.4 Sean $n, m \in \mathbb{N}$ y $\mathsf{f} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una aplicación lineal. Diremos que A es la *matriz asociada* a (o simplemente la matriz de) f si $\mathsf{f} = \mathbf{l}_{\mathsf{A}}$. ◁

La matriz asociada está bien definida porque, en virtud de 9.1.3, es única.

Lema 9.2.5 Sean $n, m \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{S}$ un sistema de $\mathbb{R}^n$ y $\mathsf{f} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una aplicación lineal y A su matriz asociada. Se tiene que

$$\mathsf{f}(\boldsymbol{S})_C = \mathsf{A}\boldsymbol{S}_C.$$

Demostración:
Sea $\boldsymbol{S} = [\boldsymbol{a_1}, \ldots, \boldsymbol{a_s}]$. Para cada $i \in \{1, \ldots, s\}$, la columna i-ésima de $\mathsf{f}(\boldsymbol{S})_C$ por definición es el vector $\mathsf{f}(\boldsymbol{a_i})$.

Por la interpretación de la multiplicación de matrices 6.4.26, la columna i-ésima de $\mathsf{A}\boldsymbol{S}_C$ es el producto de A por la columna i-esima de $\boldsymbol{S}_C$ es decir, $A\boldsymbol{a_i} = \mathsf{f}(\boldsymbol{a_i})$, luego las dos matrices son iguales, pues coinciden columna a columna. ◁

9.2.1 Aplicaciones lineales particulares

Definición 9.2.6 Hay dos aplicaciones lineales que interesa destacar.

1) Sean $n, m \in \mathbb{N}$. Definimos la aplicación lineal *cero* de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ como

$$\begin{aligned} \mathbb{0} : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ \boldsymbol{x} &\longmapsto \mathbf{0} \end{aligned}.$$

Es claro que la matriz asociada a esta aplicación lineal es $(0)_{m\times n}$.

2) Sea $n \in \mathbb{N}$. Definimos la aplicación lineal *identidad* de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$ como

$$\begin{aligned} \mathbf{I} : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ \boldsymbol{x} &\longmapsto \boldsymbol{x} \end{aligned}.$$

Es claro que la matriz asociada a esta aplicación lineal es I_n.

◁

9.2.2 Propiedades de las aplicaciones lineales

Proposición 9.2.7 [Propiedades de las aplicaciones lineales]
Sean $n, m \in \mathbb{N}$ y $\mathsf{f} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una aplicación lineal. Se verifican las siguientes propiedades.

1) $\mathsf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

2) Si $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{R}^n$ es un subespacio de $\mathbb{R}^n$, entonces $\mathsf{f}(\mathcal{G})$ es un subespacio de $\mathbb{R}^m$.

3) Si $\mathcal{H} \subseteq \mathbb{R}^m$ es un subespacio de $\mathbb{R}^m$, entonces $\mathsf{f}^{-1}(\mathcal{H})$ es un subespacio de $\mathbb{R}^n$.

Demostración:
Sea A la matriz tal que $\mathsf{f} = \mathbf{l}_{\mathsf{A}}$.

1) $\mathsf{f}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{l}_{\mathsf{A}}(\mathbf{0}) = \mathsf{A}\mathbf{0} = \mathbf{0}$

2) Sea $\boldsymbol{S} = [\boldsymbol{a_1}, \ldots, \boldsymbol{a_s}]$ un sistema generador de $\mathcal{G}$. Se deja al lector probar que $\mathsf{f}(\mathcal{G}) = \langle \mathsf{f}(\boldsymbol{S}) \rangle$ de donde se extrae como consecuencia lo que se quiere probar.

3) Supongamos que B es una matriz tal que el sistema lineal homogéneo cuya matriz de coeficientes es B es un conjunto de ecuaciones implícitas para $\mathcal{H}$. Se deja al lector probar que $\mathsf{f}^{-1}(\mathcal{H})$ es el conjunto de soluciones del sistema lineal homogéneo cuya matriz de coeficientes es BA y como tal conjunto es un subespacio de $\mathbb{R}^n$ se tiene como consecuencia el resultado buscado.

$\triangleleft$

Nota 9.2.8 Las demostraciones de los puntos 2 y 3 de 9.2.7, podrían haberse realizado de forma más directa. Se han hecho así, porque proporcionan un método práctico para calcular $\mathsf{f}(\mathcal{G})$ y $\mathsf{f}^{-1}(\mathcal{H})$. $\triangleleft$

Ejemplo 9.2.9 Hay que poner aquí un ejemplo de cálculo de $\mathsf{f}(\mathcal{G})$ y de $\mathsf{f}^{-1}(\mathcal{H})$. $\triangleleft$

Proposición 9.2.10 Sean $n, m \in \mathbb{N}$. Sea $\boldsymbol{B} = [\boldsymbol{a_1}, \ldots, \boldsymbol{a_n}]$ una base $\mathbb{R}^n$ y $\boldsymbol{S} = [\boldsymbol{b_1}, \ldots, \boldsymbol{b_n}]$ una sistema $\mathbb{R}^m$. Existe una única aplicación lineal $\mathsf{f} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ verificando

$$\mathsf{f}(\boldsymbol{a_i}) = \boldsymbol{b_i},\ i = 1, \ldots, n.$$

Demostración:
Primero probaremos que existe tal aplicación lineal. Sea $\boldsymbol{E} = [\boldsymbol{e_1}, \ldots, \boldsymbol{e_n}]$ la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Siempre podemos construir la matriz de paso de $\boldsymbol{E}$ a $\boldsymbol{B}$ a la que denotábamos en 8.4.6 por $\boldsymbol{E_B}$ y la matriz por columnas de $\boldsymbol{S}$. Definimos la matriz $\mathsf{A} = \boldsymbol{S}_C \boldsymbol{E_B}$ y sea $\mathsf{f} = \mathsf{l}_\mathsf{A}$. Por definición, f es una aplicación lineal. Además para cada $i = 1, \ldots, n$, se tiene

$$\mathsf{f}(\boldsymbol{a_i}) = \mathsf{l}_\mathsf{A}(\boldsymbol{a_i}) = \mathsf{A}\boldsymbol{a_i} = \mathsf{A}\boldsymbol{a_{iE}} = \boldsymbol{S}_C \boldsymbol{E_B} \boldsymbol{a_{iE}} = \boldsymbol{S}_C \boldsymbol{a_{iB}} = \boldsymbol{S}_C \boldsymbol{e_i} = \boldsymbol{b_i},$$

por lo que f es una aplicación lineal que cumple con las condiciones del enunciado.

Veremos ahora que f es única. Supongamos que existe otra aplicación lineal $\mathsf{g} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ verificando

$$\mathsf{g}(\boldsymbol{a_i}) = \boldsymbol{b_i},\ i = 1, \ldots, n.$$

En ese caso sea $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ y supongamos que

$$\boldsymbol{x_B} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)_{\boldsymbol{B}}.$$

En este caso

$$\boldsymbol{x} = \alpha_1 \boldsymbol{a_1} + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{a_n},$$

y entonces

$$\begin{aligned}\mathsf{f}(\boldsymbol{x}) &= \mathsf{f}(\alpha_1 \boldsymbol{a_1} + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{a_n}) = \alpha_1 \mathsf{f}(\boldsymbol{a_1}) + \alpha_2 \mathsf{f}(\boldsymbol{a_2}) + \cdots + \alpha_n \mathsf{f}(\boldsymbol{a_n}) \\ &= \alpha_1 \boldsymbol{b_1} + \alpha_2 \boldsymbol{b_2} + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{b_n} = \alpha_1 \mathsf{g}(\boldsymbol{a_1}) + \alpha_2 \mathsf{g}(\boldsymbol{a_2}) + \cdots + \alpha_n \mathsf{g}(\boldsymbol{a_n}) \\ &= \mathsf{g}(\alpha_1 \boldsymbol{a_1} + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{a_n}) = \mathsf{g}(\boldsymbol{x}),\end{aligned}$$

y así $\mathsf{f} = \mathsf{g}$ $\triangleleft$

Ejemplo 9.2.11 Sea

$$\boldsymbol{B} = [(1,1,0), (0,1,1), (1,0,1)].$$

Resulta sencillo comprobar que es una base de $\mathbb{R}^3$. Consideramos el sistema de $\mathbb{R}^2$

$$\boldsymbol{S} = [(1,1), (1,-1), (2,0)].$$

Intentaremos construir la aplicación lineal $\mathsf{f} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ que verifica

$$\begin{aligned} \mathsf{f}(1,1,0) &= (1,1) \\ \mathsf{f}(0,1,1) &= (1,-1) \\ \mathsf{f}(1,0,1) &= (2,0). \end{aligned}$$

Para ello seguiremos los pasos que se dan en la demostración de 9.2.10. Si llamamos $\boldsymbol{E}$ a la base canónica de $\mathbb{R}^3$,

$$\boldsymbol{B_E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Tenemos que calcular $\boldsymbol{E_B}$, pero para ello basta calcular la inversa de la matriz anterior, cuestión que se deja como ejercicio,

$$\boldsymbol{E_B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Sea

$$\mathsf{A} = \boldsymbol{S}_C \boldsymbol{E_B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

y tomamos $\mathsf{f} = \mathsf{l}_\mathsf{A}$. Haciendo unos sencillos productos de matrices, podemos ver que esta aplicación lineal cumple con los requisitos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\triangleleft$

9.2.3 Núcleo e imagen

Definición 9.2.12 Sean $n, m \in \mathbb{N}$ y $\mathsf{f} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una aplicación lineal.

1) Llamaremos *núcleo* de f y lo denotaremos por $\operatorname{Ker} \mathsf{f}$ a

$$\operatorname{Ker} \mathsf{f} = \mathsf{f}^{-1}(\{\mathbf{0}\}) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \,/\, \mathsf{f}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}\}\,.$$

2) Llamaremos *imagen* de f y la denotaremos por $\operatorname{Img} \mathsf{f}$ a la imagen de f como aplicación, es decir

$$\operatorname{Img} \mathsf{f} = \mathsf{f}(\mathbb{R}^n) = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m \,/\, \exists\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \text{ con } \mathsf{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}\}\,.$$

$\triangleleft$

Proposición 9.2.13 Sean $n, m \in \mathbb{N}$ y $\mathsf{f} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una aplicación lineal. Se tiene

1) $\operatorname{Ker} \mathsf{f}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^n$.

2) $\operatorname{Img} \mathsf{f}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^m$.

Demostración:

1) $\operatorname{Ker} \mathsf{f}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^n$ como consecuencia de que $\{\mathbf{0}\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^m$, $\operatorname{Ker} \mathsf{f} = \mathsf{f}^{-1}(\{\mathbf{0}\})$ y de 9.2.7.

2) $\operatorname{Img} \mathsf{f}$ es un subespacio como consecuencia de 9.2.7, pues $\mathbb{R}^n$ es un subespacio de $\mathbb{R}^n$ e $\operatorname{Img} \mathsf{f} = \mathsf{f}(\mathbb{R}^n)$.

$\triangleleft$

Nota 9.2.14 Obsérvese como las demostraciones de 9.2.13 y 9.2.7 nos proporcionan un método para calcular el Núcleo y la Imagen de una aplicación lineal. Lo único que hay que tener en cuenta es que para el caso del núcleo, la matriz B que aparece en la demostración de 9.2.7 puede ser claramente I_n, que nos proporciona ecuaciones implícitas para $\{\mathbf{0}\}$, con lo cual, con las notaciones de 9.2.13, el sistema lineal homogéneo cuya matriz de coeficientes es A son ecuaciones implícitas para $\operatorname{Ker} \mathsf{f}$.

Para el caso de $\operatorname{Img} \mathsf{f} = \mathsf{f}(\mathbb{R}^n)$, basta tomar como sistema generador de $\mathbb{R}^n$ la base canónica, cuyas imágenes son los vectores columna de la matriz A. Por tanto los vectores columna de A constituyen un sistema generador de $\operatorname{Img} \mathsf{f}$. $\triangleleft$

Ejemplo 9.2.15 Hay que poner un ejemplo de obtención de núcleo e imagen. $\triangleleft$

Definición 9.2.16 Sean $n, m \in \mathbb{N}$, $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una aplicación lineal. Llamaremos *rango* de la aplicación lineal $\mathbf{f}$, y lo denotaremos por $\operatorname{rg} \mathbf{f}$ a la dimensión de $\operatorname{Img} \mathbf{f}$. $\triangleleft$

Proposición 9.2.17 El rango de una aplicación lineal coincide con el rango de su matriz asociada.
Demostración:
Es inmediata porque los vectores columna de la matriz asociada a $\mathbf{f}$ forman un sistema generador de $\operatorname{Img} \mathbf{f}$. $\triangleleft$

Proposición 9.2.18 [Segunda fórmula dimensional]
Sean $n, n' \in \mathbb{N}$, $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una aplicación lineal. Se tiene

$$n = \dim \operatorname{Ker} \mathbf{f} + \operatorname{rg} \mathbf{f}.$$

Demostración:
Se deduce fácilmente del hecho de que si tomamos el sistema lineal homogéneo dado por la matriz asociada a $\mathbf{f}$, obtenemos ecuaciones implícitas para $\operatorname{Ker} \mathbf{f}$. $\triangleleft$

9.2.4 Inyectividad y sobreyectividad

Proposición 9.2.19 Sean $n, m \in \mathbb{N}$, $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una aplicación lineal. Son equivalentes

(i) $\mathbf{f}$ es inyectiva.

(ii) $\operatorname{Ker} \mathbf{f} = \{\mathbf{0}\}$.

(iii) $\operatorname{rg} \mathbf{f} = n$.

(iv) Para cada sistema libre $\boldsymbol{S}$ de $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{f}(\boldsymbol{S})$ es un sistema libre de $\mathbb{R}^m$.

(v) Existe una base $\boldsymbol{S}$ de $\mathbb{R}^n$ tal que $\mathbf{f}(\boldsymbol{S})$ es un sistema libre de $\mathbb{R}^m$.

Demostración:
Se deja para el lector. $\triangleleft$

Obsérvese que, en las condiciones anteriores, si $\mathbf{f}$ es inyectiva, ha de verificarse $n \leq m$.

Proposición 9.2.20 Sean $n, m \in \mathbb{N}$, $\mathsf{f} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una aplicación lineal. Son equivalentes

(i) f es sobreyectiva.

(ii) $\operatorname{Img} \mathsf{f} = \mathbb{R}^m$.

(iii) $\operatorname{rg} \mathsf{f} = m$.

(iv) Para cada sistema generador $\boldsymbol{S}$ de $\mathbb{R}^n$, $\mathsf{f}(\boldsymbol{S})$ es un sistema generador de $\mathbb{R}^m$.

(v) Existe una base $\boldsymbol{S}$ de $\mathbb{R}^n$ tal que $\mathsf{f}(\boldsymbol{S})$ es un sistema generador de $\mathbb{R}^m$.

Demostración:
Se deja para el lector. $\triangleleft$

Obsérvese que, en las condiciones anteriores, si f es sobreyectiva, ha de verificarse $n \geq m$.

Proposición 9.2.21 Sean $n, m \in \mathbb{N}$, $\mathsf{f} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una aplicación lineal. Son equivalentes

(i) f es biyectiva.

(ii) $\operatorname{Img} \mathsf{f} = \mathbb{R}^m$ y $\ker \mathsf{f} = \{0\}$

(iii) $\operatorname{rg} \mathsf{f} = n = m$.

(iv) $n = m$ y la matriz asociada a f es inversible.

(v) Para cada base $\boldsymbol{S}$ de $\mathbb{R}^n$, $\mathsf{f}(\boldsymbol{S})$ es base de $\mathbb{R}^m$.

(vi) Existe una base $\boldsymbol{S}$ de $\mathbb{R}^n$ tal que $\mathsf{f}(\boldsymbol{S})$ es una base de $\mathbb{R}^m$.

Demostración:
Es consecuencia inmediata de 9.2.19 y 9.2.20 $\triangleleft$

Obsérvese que, en las condiciones anteriores, si f es biyectiva, ha de verificarse $n = m$.

Definición 9.2.22 Llamaremos *isomorfismo* a toda aplicación lineal biyectiva. $\triangleleft$

Proposición 9.2.23 La aplicación inversa de un isomorfismo también es un isomorfismo.
Demostración:
Sean $n \in \mathbb{N}$ y $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un isomorfismo. Para probar que $\mathbf{f}^{-1} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es un isomorfismo, basta probar que f^{-1} es una aplicación lineal. Sea A la matriz asociada a $\mathbf{f}$, que será inversible por 9.2.21. Pero $\mathbf{f}^{-1} = \mathbf{l}_{\mathsf{A}^{-1}}$, ya que

1) $\forall\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ tenemos

$$\begin{aligned}&\mathbf{f} \circ \mathbf{l}_{\mathsf{A}^{-1}}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{l}_{\mathsf{A}} \circ \mathbf{l}_{\mathsf{A}^{-1}}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{l}_{\mathsf{A}}(\mathbf{l}_{\mathsf{A}^{-1}}(\boldsymbol{x})) = \mathbf{l}_{\mathsf{A}}(\mathsf{A}^{-1}\boldsymbol{x})\\ &= \mathsf{A}\mathsf{A}^{-1}\boldsymbol{x} = \mathrm{I}_n\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}\end{aligned}$$

2) $\forall\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ tenemos

$$\begin{aligned}&\mathbf{l}_{\mathsf{A}^{-1}} \circ \mathbf{f}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{l}_{\mathsf{A}^{-1}} \circ \mathbf{l}_{\mathsf{A}}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{l}_{\mathsf{A}^{-1}}(\mathbf{l}_{\mathsf{A}}(\boldsymbol{x})) = \mathbf{l}_{\mathsf{A}^{-1}}(\mathsf{A}\boldsymbol{x})\\ &= \mathsf{A}^{-1}\mathsf{A}\boldsymbol{x} = \mathrm{I}_n\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}.\end{aligned}$$

Entonces $\mathbf{f}^{-1}$ es una transformación lineal y por lo tanto es una aplicación lineal. ◁

9.2.5 Operaciones con aplicaciones lineales

9.2.5.1 Combinaciones lineales

A lo largo de todo lo expuesto, hemos trabajado con objetos para los cuales tenía sentido tomar *combinaciones lineales*, como por ejemplo las matrices y los vectores. Veremos como también se pueden tomar combinaciones lineales de aplicaciones lineales.

Definición 9.2.24 Sean $n, m, s \in \mathbb{N}$. Para cada $i = 1, \ldots, n$ sean $\mathbf{f}_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ aplicación lineal y $\alpha_i \in \mathbb{R}$. Definimos la aplicación *combinación lineal* de $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_s$ con escalares $(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$ como

$$\begin{aligned}\alpha_1\mathbf{f}_1 + \cdots + \alpha_s\mathbf{f}_s : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^m\\ \boldsymbol{x} &\longmapsto \alpha_1\mathbf{f}_1(\boldsymbol{x}) + \cdots + \alpha_s\mathbf{f}_s(\boldsymbol{x})\end{aligned}$$

◁

Proposición 9.2.25 Sean $n, m, s \in \mathbb{N}$. Para cada $i = 1, \ldots, n$ sean $\mathbf{f}_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ aplicación lineal y $\alpha_i \in \mathbb{R}$. La aplicación combinación lineal $\mathbf{g} = \alpha_1\mathbf{f}_1 + \cdots + \alpha_s\mathbf{f}_s$ es una aplicación lineal.

Demostración:
Para cada $i = 1, \ldots, s$ sea A_i la matriz asociada a $\mathbf{f}_i$. Tenemos que si $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned}\mathbf{g}(\boldsymbol{x}) &= \alpha_1 \mathbf{f}_1 + \cdots + \alpha_s \mathbf{f}_s(\boldsymbol{x}) = \alpha_1 \mathbf{f}_1(\boldsymbol{x}) + \cdots + \alpha_s \mathbf{f}_s(\boldsymbol{x}) = \\ &= \alpha_1 \mathsf{A}_1 \boldsymbol{x} + \cdots + \alpha_s \mathsf{A}_s \boldsymbol{x} = (\alpha_1 \mathsf{A}_1 + \cdots + \alpha_s \mathsf{A}_s)\boldsymbol{x} = \\ &= \mathbf{l}_{\alpha_1 \mathsf{A}_1 + \cdots + \alpha_s \mathsf{A}_s}(\boldsymbol{x}),\end{aligned}$$

luego $\mathbf{g}$ es la transformación lineal dada por la matriz $\alpha_1 \mathsf{A}_1 + \cdots + \alpha_s \mathsf{A}_s$ y entonces es una aplicación lineal. $\lhd$

Nota 9.2.26 La proposición anterior da pleno sentido a la combinación lineal de aplicaciones lineales, pues nos dice que una combinación lineal de aplicaciones lineales es también una aplicación lineal. Además su demostración nos dice como construir su matriz asociada.

En particular tiene sentido sumar aplicaciones lineales y multiplicarlas por escalares. $\lhd$

Ejemplo 9.2.27 $\lhd$

9.2.5.2 Composición

Proposición 9.2.28 Sean $n, m, p \in \mathbb{N}$ y $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $\mathbf{g} : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^p$ aplicaciones lineales. La aplicación $\mathbf{g} \circ \mathbf{f} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ es una aplicación lineal.
Demostración:
Sean A la matriz asociada a $\mathbf{f}$ y B la matriz asociada a $\mathbf{g}$. Sea $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$

$$\mathbf{g} \circ \mathbf{f}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{f}(\boldsymbol{x})) = \mathbf{g}(\mathsf{A}\boldsymbol{x}) = \mathsf{B}\mathsf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{l}_{\mathsf{BA}}(\boldsymbol{x}),$$

y como $\mathbf{g}$ es la transformación lineal dada por BA, es una aplicación lineal. $\lhd$

Obsérvese cómo la demostración de la proposición anterior nos da la pauta para poder manejar la composición.

Ejemplo 9.2.29 $\lhd$

9.2.6 Coordenadas

Definición 9.2.30 Sean $n, n' \in \mathbb{N}$, $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n'}$ una aplicación lineal, $\boldsymbol{S}$ una base de $\mathbb{R}^n$ y $\boldsymbol{S'}$ una base de $\mathbb{R}^{n'}$. Llamaremos matriz de $\mathbf{f}$ en las bases $\boldsymbol{S}$ y $\boldsymbol{S'}$ y la denotaremos por $\mathbf{f}_{\boldsymbol{S'}}^{\boldsymbol{S}}$ a la matriz $n' \times n$

$$\mathbf{f}_{\boldsymbol{S'}}^{\boldsymbol{S}} = \mathbf{f}(\boldsymbol{S})_{\boldsymbol{S'}},$$

es decir, a la matriz de coordenadas del sistema $\mathbf{f}(\boldsymbol{S})$ en la base $\boldsymbol{S'}$. $\lhd$

Nota 9.2.31 Nótese que la columna i-ésima de $\mathsf{f}_{\boldsymbol{S'}}^{\boldsymbol{S}}$ está formada por las coordenadas del vector i-ésimo de $\mathsf{f}(\boldsymbol{S})$ en la base $\boldsymbol{S'}$, $i = 1, \ldots, n$, por lo que podemos construir dicha matriz con facilidad. $\triangleleft$

Ejemplo 9.2.32 $\triangleleft$

Lema 9.2.33 Sean $n, n' \in \mathbb{N}$, $\mathsf{f} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n'}$ una aplicación lineal, $\boldsymbol{E}$ la base canónica de $\mathbb{R}^n$ y $\boldsymbol{E'}$ la base canónica de $\mathbb{R}^{n'}$. Entonces la matriz asociada a f es la matriz de f en las bases canónicas, $\mathsf{f}_{\boldsymbol{E'}}^{\boldsymbol{E}}$
Demostración:
Es inmediata a partir de la definición 9.2.30 y de 8.4.11. $\triangleleft$

Proposición 9.2.34 [Cambio de base para aplicaciones lineales]
Sean $n, n' \in \mathbb{N}$, $\mathsf{f} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n'}$ una aplicación lineal, $\boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{T}$ dos bases de $\mathbb{R}^n$ y $\boldsymbol{S'}$ y $\boldsymbol{T'}$ dos bases de $\mathbb{R}^{n'}$. Entonces

$$\boldsymbol{S'}_{\boldsymbol{T'}} \mathsf{f}_{\boldsymbol{S'}}^{\boldsymbol{S}} \boldsymbol{T}_{\boldsymbol{S}} = \mathsf{f}_{\boldsymbol{T'}}^{\boldsymbol{T}}.$$

$\triangleleft$

Ejemplo 9.2.35 $\triangleleft$

Lema 9.2.36 Sean $n, n' \in \mathbb{N}$, $\mathsf{f} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n'}$ una aplicación lineal, $\boldsymbol{S}$ una base de $\mathbb{R}^n$ y $\boldsymbol{S'}$ una base de $\mathbb{R}^{n'}$. La matriz $\mathsf{f}_{\boldsymbol{S'}}^{\boldsymbol{S}}$ es la única que verifica la propiedad

$$\mathsf{f}(\boldsymbol{x})_{\boldsymbol{S'}} = \mathsf{f}_{\boldsymbol{S'}}^{\boldsymbol{S}} \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{S}}, \ \forall\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Demostración:
Sean $\boldsymbol{E}$ la base canónica de $\mathbb{R}^n$ y $\boldsymbol{E'}$ la base canónica de $\mathbb{R}^{n'}$.

$$\begin{aligned}
&\mathsf{f}_{\boldsymbol{S'}}^{\boldsymbol{S}} \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{S}} = \\
&\qquad\qquad \text{(Por la fórmula de cambio de base 9.2.34)} \\
&(\boldsymbol{E'}_{\boldsymbol{S'}} \mathsf{f}_{\boldsymbol{E'}}^{\boldsymbol{E}} \boldsymbol{S}_{\boldsymbol{E}}) \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{S}} = \boldsymbol{E'}_{\boldsymbol{S'}} \mathsf{f}_{\boldsymbol{E'}}^{\boldsymbol{E}} (\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{E}} \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{S}}) = \\
&\qquad\qquad \text{(Por la fórmula de cambio de base 9.2.34)} \\
&= \boldsymbol{E'}_{\boldsymbol{S'}} \mathsf{f}_{\boldsymbol{E'}}^{\boldsymbol{E}} \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{E}} = \boldsymbol{E'}_{\boldsymbol{S'}} \mathsf{f} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{E'}_{\boldsymbol{S'}} \mathsf{f}(\boldsymbol{x})_{\boldsymbol{E'}} = \mathsf{f}(\boldsymbol{x})_{\boldsymbol{S'}}
\end{aligned}$$

Probemos la unicidad. Sea B otra matriz tal que

$$\mathsf{f}(\boldsymbol{x})_{\boldsymbol{S'}} = B \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{S}}, \ \forall\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Entonces,

$$\mathsf{f}_{\boldsymbol{E'}}^{\boldsymbol{E}} \boldsymbol{x} = \mathsf{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{S'}_{\boldsymbol{E'}} \mathsf{f}(\boldsymbol{x})_{\boldsymbol{S'}} = \boldsymbol{S'}_{\boldsymbol{E'}} B \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{S}} = (\boldsymbol{E'}_{\boldsymbol{S'}} B \boldsymbol{E}_{\boldsymbol{S}}) \boldsymbol{x}$$

Luego por 9.1.3

$$\mathsf{f}^{\boldsymbol{E}}_{\boldsymbol{E'}} = \boldsymbol{S'}_{\boldsymbol{E'}} B \boldsymbol{E}_{\boldsymbol{S}} \Longleftrightarrow B = \boldsymbol{E'}_{\boldsymbol{S'}} \mathsf{f}^{\boldsymbol{E}}_{\boldsymbol{E'}} \boldsymbol{S}_{\boldsymbol{E}} = \mathsf{f}^{\boldsymbol{S}}_{\boldsymbol{S'}}.$$

$\triangleleft$

Ejemplo 9.2.37 $\triangleleft$

Lema 9.2.38 Sean $n, n', n'' \in \mathbb{N}$, $\mathsf{f} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n'}$, $\mathsf{g} : \mathbb{R}^{n'} \longrightarrow \mathbb{R}^{n''}$ aplicaciones lineales, $\boldsymbol{S}$ una base de $\mathbb{R}^n$ $\boldsymbol{S'}$ una base de $\mathbb{R}^{n'}$ y $\boldsymbol{S''}$ una base de $\mathbb{R}^{n''}$. Entonces

$$(\mathsf{g} \circ \mathsf{f})^{\boldsymbol{S}}_{\boldsymbol{S''}} = \mathsf{g}^{\boldsymbol{S'}}_{\boldsymbol{S''}} \mathsf{f}^{\boldsymbol{S}}_{\boldsymbol{S'}}$$

$\triangleleft$

Ejemplo 9.2.39 $\triangleleft$

Lema 9.2.40 Sea $n \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{S}$ y $\boldsymbol{T}$ bases de $\mathbb{R}^n$. Para la identidad de $\mathbb{R}^n$ se tiene que

$$\mathbf{I}^{\boldsymbol{S}}_{\boldsymbol{T}} = \boldsymbol{S}_{\boldsymbol{T}}.$$

$\triangleleft$

9.3 Endomorfismos

Definición 9.3.1 Sea $n \in \mathbb{N}$. Un *endomorfismo* de $\mathbb{R}^n$ es una aplicación lineal $\mathsf{f} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$. $\triangleleft$

Definición 9.3.2 Sea $n \in \mathbb{N}$. Un *automorfismo* de $\mathbb{R}^n$ es un endomorfismo de $\mathbb{R}^n$ biyectivo. $\triangleleft$

Lema 9.3.3 La composición de dos endomorfismos de $\mathbb{R}^n$ es un endomorfismo de $\mathbb{R}^n$. $\triangleleft$

Nota 9.3.4 Sean $n \in \mathbb{N}$ y f un endomorfismo de $\mathbb{R}^n$. Podríamos considerar dos bases $\boldsymbol{S}$ y $\boldsymbol{S'}$ de $\mathbb{R}^n$ y construir la matriz $\mathsf{f}^{\boldsymbol{S}}_{\boldsymbol{S'}}$. Sin embargo, como en este caso el espacio de llegada y salida es el mismo, podríamos fijar la misma base, pongamos $\boldsymbol{S}$, en la llegada y la salida y considerar $\mathsf{f}^{\boldsymbol{S}}_{\boldsymbol{S}}$. Este tipo de matrices son las que tiene interés para los endomorfismos. $\triangleleft$

Definición 9.3.5 Sean $n \in \mathbb{N}$, f un endomorfismo de $\mathbb{R}^n$ y $\boldsymbol{S}$ una base de $\mathbb{R}^n$. Llamaremos matriz de f en la base $\boldsymbol{S}$ a la matriz $n \times n$ dada por $\mathsf{f}^{\boldsymbol{S}}_{\boldsymbol{S}}$. $\triangleleft$

Ejemplo 9.3.6 ◁

Corolario 9.3.7 Sean $n \in \mathbb{N}$, f una endomorfismo de $\mathbb{R}^n$ y $\boldsymbol{E}$ la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Entonces la matriz asociada a f es la matriz de f en la base canónica, $\mathsf{f}_{\boldsymbol{E}}^{\boldsymbol{E}}$. ◁

Corolario 9.3.8 [Cambio de base para endomorfismos]
Sean $n \in \mathbb{N}$, f una endomorfismo de $\mathbb{R}^n$ y $\boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{T}$ dos bases de $\mathbb{R}^n$. Entonces

$$\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{T}}\mathsf{f}_{\boldsymbol{S}}^{\boldsymbol{S}}\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{S}} = \mathsf{f}_{\boldsymbol{T}}^{\boldsymbol{T}}.$$

◁

Ejemplo 9.3.9 ◁

Corolario 9.3.10 Sean $n \in \mathbb{N}$, f una endomorfismo de $\mathbb{R}^n$ y $\boldsymbol{S}$ una base de $\mathbb{R}^n$. La matriz $\mathsf{f}_{\boldsymbol{S}}^{\boldsymbol{S}}$ es la única que verifica la propiedad

$$\mathsf{f}(\boldsymbol{x})_{\boldsymbol{S}} = \mathsf{f}_{\boldsymbol{S}}^{\boldsymbol{S}}\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{S}}, \ \forall\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n.$$

◁

Ejemplo 9.3.11 ◁

Corolario 9.3.12 Sean $n \in \mathbb{N}$, f y g dos endomorfismos de $\mathbb{R}^n$ y $\boldsymbol{S}$ una base de $\mathbb{R}^n$. Entonces

$$(\mathsf{g} \circ \mathsf{f})_{\boldsymbol{S}}^{\boldsymbol{S}} = \mathsf{g}_{\boldsymbol{S}}^{\boldsymbol{S}}\mathsf{f}_{\boldsymbol{S}}^{\boldsymbol{S}}$$

◁

Ejemplo 9.3.13 ◁

9.3.1 Diagonalización

Dados $n \in \mathbb{N}$ y f un endomorfismo de $\mathbb{R}^n$, trataremos de ver si existe alguna base $\boldsymbol{B}$ de $\mathbb{R}^n$ tal que $\mathsf{f}_{\boldsymbol{B}}^{\boldsymbol{B}}$ sea *lo más sencilla posible.* Podemos entender que las matrices diagonales son *bastante* sencillas y desde este punto de vista intentaremos encontrar $\boldsymbol{B}$ para que $\mathsf{f}_{\boldsymbol{B}}^{\boldsymbol{B}}$ sea diagonal. Esto no siempre será posible, así que vamos a darle un nombre especial a los endomorfismos que tienen esa propiedad.

Definición 9.3.14 Sean $n \in \mathbb{N}$ y f un endomorfismo de $\mathbb{R}^n$. Diremos que f es *diagonalizable* si existe una base $\boldsymbol{B}$ de $\mathbb{R}^n$ tal que $\mathsf{f}_{\boldsymbol{B}}^{\boldsymbol{B}}$ es diagonal. ◁

Ejemplo 9.3.15 Consideremos el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} \mathbf{f}: \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) &\longmapsto (-10x+12y+6z, -6x+8y+3z, -6x+6y+5z) \end{aligned}$$

Su matriz asociada (que es también la matriz de $\mathbf{f}$ en la base canónica de $\mathbb{R}^3$) es

$$\begin{pmatrix} -10 & 12 & 6 \\ -6 & 8 & 3 \\ -6 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

Si ahora consideramos el sistema de $\mathbb{R}^3$

$$\boldsymbol{B} = [(2,1,1), (1,1,0), (1,0,2)],$$

se puede ver fácilmente que es una base de $\mathbb{R}^3$ y que

$$\mathbf{f}_{\boldsymbol{B}}^{\boldsymbol{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

de donde se deduce la existencia de endomorfismos diagonalizables. $\triangleleft$

Definición 9.3.16 Sean $n \in \mathbb{N}$ y A una matriz $n \times n$. Diremos que A es *diagonalizable* si $\mathbf{l}_{\mathsf{A}}$ es diagonalizable. $\triangleleft$

Ejemplo 9.3.17 A la vista del Ejemplo 9.3.15, es inmediato que la matriz

$$\begin{pmatrix} -10 & 12 & 6 \\ -6 & 8 & 3 \\ -6 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

es diagonalizable. $\triangleleft$

Proposición 9.3.18 Sean $n \in \mathbb{N}$ y A una matriz $n \times n$. A es diagonalizable si y sólo si existe una matriz $n \times n$ inversible tal que $P^{-1}AP$ es una matriz diagonal.
Demostración:
Es una consecuencia inmediata de las fórmulas de cambio de base y de las propiedades de las matrices de paso. $\triangleleft$

Proposición 9.3.19 [Condiciones de diagonalización 1]
Sean $n \in \mathbb{N}$ y $\mathbf{f}$ un endomorfismo de $\mathbb{R}^n$. $\mathbf{f}$ es diagonalizable, si y sólo si existen n escalares (no necesariamente distintos) $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ y una base $\mathbf{B} = [\boldsymbol{a_1}, \ldots, \boldsymbol{a_n}]$ de $\mathbb{R}^n$ tales que

$$\mathbf{f}(\boldsymbol{a_i}) = \alpha_i \boldsymbol{a_i}, \ i = 1, \ldots, n.$$

Demostración:
Si f es diagonalizable, existe una base

$$\boldsymbol{B} = [\boldsymbol{a_1}, \ldots, \boldsymbol{a_n}]$$

de $\mathbb{R}^n$ y escalares

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$$

tales que

$$\mathsf{f}_{\boldsymbol{B}}^{\boldsymbol{B}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix},$$

y como $\mathsf{f}_{\boldsymbol{B}}^{\boldsymbol{B}} = \mathsf{f}(\boldsymbol{B})_{\boldsymbol{B}}$ entonces

$$\mathsf{f}(\boldsymbol{a_i}) = \alpha_i \boldsymbol{a_i},\ i = 1, \ldots, n.$$

Recíprocamente, si existe una base de $\mathbb{R}^n$

$$\mathbf{B} = [\boldsymbol{a_1}, \ldots, \boldsymbol{a_n}]$$

y escalares

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$$

tales que

$$\mathsf{f}(\boldsymbol{a_i}) = \alpha_i \boldsymbol{a_i},\ i = 1, \ldots, n,$$

entonces es claro que

$$\mathsf{f}_{\boldsymbol{B}}^{\boldsymbol{B}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix},$$

por lo que f es diagonalizable. $\triangleleft$

Ejemplo 9.3.20 Tomando f y $\boldsymbol{B}$ como en el ejemplo 9.3.15 y los escalares $-1, 2, 2 \in \mathbb{R}$, es fácil ver que

$$\begin{aligned} \mathsf{f}((2,1,1)) &= -(2,1,1) \\ \mathsf{f}((1,1,0)) &= 2\,(1,1,0) \\ \mathsf{f}((1,0,2)) &= 2\,(1,0,2) \end{aligned}$$

$\triangleleft$

La condición de diagonalización de 9.3.19 nos lleva a pensar que hay ciertos vectores y escalares que juegan un papel importante en la cuestión que estamos tratando, en concreto aquellos que verifican una propiedad del tipo $\mathbf{f}(\boldsymbol{a}) = \alpha\boldsymbol{a}$, así que vamos a darles un nombre y a intentar ver qué significan y cómo se calculan.

Definición 9.3.21 Sean $n \in \mathbb{N}$ y $\mathbf{f}$ un endomorfismo de $\mathbb{R}^n$. Diremos que $\alpha \in \mathbb{R}$ es un *valor propio* o un *autovalor* de $\mathbf{f}$ si existe un vector $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n - \{\mathbf{0}\}$ tal que $\mathbf{f}(\boldsymbol{a}) = \alpha\boldsymbol{a}$. ◁

Definición 9.3.22 Sean $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{f}$ un endomorfismo de $\mathbb{R}^n$ y α un valor propio de $\mathbf{f}$. Diremos $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ es un *vector propio* o un *autovector* de $\mathbf{f}$ asociado a α si $\mathbf{f}(\boldsymbol{a}) = \alpha\boldsymbol{a}$. ◁

Ejemplo 9.3.23 Tomando $\mathbf{f}$ como en el Ejemplo 9.3.15, tenemos que -1 es un valor propio de $\mathbf{f}$ y que $(2, 1, 1)$ es un vector propio asociado a -1. ◁

Definición 9.3.24 Sean $n \in \mathbb{N}$ y A una matriz $n \times n$.

1) Un *valor propio* de A es un valor propio de $\mathbf{l}_{\mathsf{A}}$.

2) Un *vector propio* de A asociado a un valor propio α es un vector propio de $\mathbf{l}_{\mathsf{A}}$ asociado a α.

◁

Proposición 9.3.25 Sean $n \in \mathbb{N}$ y $\mathbf{f}$ un endomorfismo de $\mathbb{R}^n$. Tenemos que

1) $\alpha \in \mathbb{R}$ es un valor propio de $\mathbf{f} \iff \dim \operatorname{Ker}(\mathbf{f} - \alpha\mathbf{I}) > 0 \iff \operatorname{rg}(\mathbf{f} - \alpha\mathbf{I}) < n$.

2) Si α es un valor propio de $\mathbf{f}$ entonces el conjunto de vectores propios de $\mathbf{f}$ asociados a α es $\operatorname{Ker}(\mathbf{f} - \alpha\mathbf{I})$.

◁

Corolario 9.3.26 Sean $n \in \mathbb{N}$ y A una matriz $n \times n$.

1) $\alpha \in \mathbb{R}$ es un valor propio de $\mathsf{A} \iff \operatorname{rg}(\mathsf{A} - \alpha \mathrm{I}_n) < n \iff \det(\mathsf{A} - \alpha \mathrm{I}_n) = 0$.

2) Si α es un valor propio de A entonces el conjunto de vectores propios de A asociados a α es un subespacio de $\mathbb{R}^n$ con ecuaciones implícitas $(\mathbf{A} - \alpha \mathrm{I}_n)\mathsf{X} = (0)_{n\times 1}$.

◁

Definición 9.3.27 Sean $n \in \mathbb{N}$ y A una matriz $n \times n$. Llamaremos polinomio característico de A y lo denotaremos por $P_{\mathsf{A}}(x)$ a

$$P_{\mathsf{A}}(x) = \det(\mathsf{A} - x\mathrm{I}_n).$$

$\triangleleft$

Ejemplo 9.3.28 El polinomio característico de la matriz

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} -10 & 12 & 6 \\ -6 & 8 & 3 \\ -6 & 6 & 5 \end{pmatrix},$$

es

$$P_{\mathsf{A}}(x) = \det\left(\begin{pmatrix} -10 & 12 & 6 \\ -6 & 8 & 3 \\ -6 & 6 & 5 \end{pmatrix} - x\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) =$$

$$\begin{vmatrix} -10-x & 12 & 6 \\ -6 & 8-x & 3 \\ -6 & 6 & 5-x \end{vmatrix} \overset{f_{23}^{-1}, f_{1,3}^{-2}}{=} \begin{vmatrix} 2-x & 0 & -4+2x \\ 0 & 2-x & -2+x \\ -6 & 6 & 5-x \end{vmatrix} \overset{c_{12}^{1}}{=}$$

$$\begin{vmatrix} 2-x & 0 & -4+2x \\ 2-x & 2-x & -2+x \\ 0 & 6 & 5-x \end{vmatrix} \overset{f_{21}^{-1}}{=} \begin{vmatrix} 2-x & 0 & -4+2x \\ 0 & 2-x & 2-x \\ 0 & 6 & 5-x \end{vmatrix} =$$

$$(2-x)\begin{vmatrix} 2-x & 2-x \\ 6 & 5-x \end{vmatrix} \overset{c_{21}^{-1}}{=} (2-x)\begin{vmatrix} 2-x & 0 \\ 6 & -1-x \end{vmatrix} = -(1+x)(2-x)^2$$

$\triangleleft$

Definición 9.3.29 Sean $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{f}$ un endomorfismo de $\mathbb{R}^n$ y A su matriz asociada. Llamaremos polinomio característico de $\mathbf{f}$ y lo denotaremos por $P_{\mathbf{f}}(x)$ a

$$P_{\mathbf{f}}(x) = P_{\mathsf{A}}(x).$$

$\triangleleft$

Ejemplo 9.3.30 Tomando $\mathbf{f}$ como en el Ejemplo 9.3.15, por el Ejemplo 9.3.28, se tiene que

$$P_{\mathbf{f}}(x) = -(1+x)(2-x)^2.$$

$\triangleleft$

Lema 9.3.31 Sean $n \in \mathbb{N}$, f un endomorfismo de $\mathbb{R}^n$ y $\boldsymbol{B}$ una base de $\mathbb{R}^n$. Se tiene que
$$P_{\mathsf{f}}(x) = P_{\mathsf{f}_{\boldsymbol{B}}^{\boldsymbol{B}}}(x).$$
$\triangleleft$

Ejemplo 9.3.32 Tomando f y $\boldsymbol{B}$ como en el Ejemplo 9.3.15, si calculamos el polinomio característico de $\mathsf{f}_{\boldsymbol{B}}^{\boldsymbol{B}}$
$$P_{\mathsf{f}_{\boldsymbol{B}}^{\boldsymbol{B}}}(x) = \begin{vmatrix} -1-x & 0 & 0 \\ 0 & 2-x & 0 \\ 0 & 0 & 2-x \end{vmatrix} = -(1+x)(2-x)^2,$$
que es el polinomio característico de f. $\triangleleft$

Proposición 9.3.33 Sean $n \in \mathbb{N}$ y A una matriz $n \times n$. Se tiene que $\alpha \in \mathbb{R}$ es un autovalor de A si y solo si es una raíz real de $P_{\mathsf{A}}(x)$. $\triangleleft$

Corolario 9.3.34 Sean $n \in \mathbb{N}$ y f un endomorfismo de $\mathbb{R}^n$. Se tiene que $\alpha \in \mathbb{R}$ es un autovalor de f si y solo si es una raíz real de $P_{\mathsf{f}}(x)$ como se vio en el Ejemplo 9.3.32. $\triangleleft$

Ejemplo 9.3.35 Tomando f como en el Ejemplo 9.3.15, vimos en el Ejemplo 9.3.32 que $P_{\mathsf{f}}(x) = -(1+x)(2-x)^2$, cuyas raíces reales son $\{-1, 2\}$. Por tanto -1 y 2 son lo únicos autovalores, f $\triangleleft$

Definición 9.3.36 Sean $n \in \mathbb{N}$, f un endomorfismo de $\mathbb{R}^n$ y α un valor propio de f. Llamaremos *espacio propio* de f asociado a α y lo denotaremos por $\boldsymbol{\mathcal{E}}_{\mathsf{f}}(\alpha)$ al conjunto de vectores propios de f asociados a α.
Nótese que por 9.3.25, $\boldsymbol{\mathcal{E}}_{\mathsf{f}}(\alpha)$ es un subespacio de $\mathbb{R}^n$ $\triangleleft$

Definición 9.3.37 Sean $n \in \mathbb{N}$, A una matriz $n \times n$ y α un valor propio de A. Llamaremos *espacio propio* de A asociado a α y lo denotaremos por $\boldsymbol{\mathcal{E}}_{\mathsf{A}}(\alpha)$ a $\boldsymbol{\mathcal{E}}_{\mathsf{l}_{\mathsf{A}}}(\alpha)$.
$\triangleleft$

Ejemplo 9.3.38 Sea f como en el Ejemplo 9.3.15. Como consecuencia del Ejemplo 9.3.20, 2 y -1 son valores propios de f. Calculemos el espacio propio de f asociado a 2.
$$\boldsymbol{\mathcal{E}}_{\mathsf{f}}(2) = \mathrm{Ker}(\mathsf{f} - 2\mathbf{I}),$$
por lo que sus ecuaciones implícitas son
$$\begin{pmatrix} -12 & 12 & 6 \\ -6 & 6 & 3 \\ -6 & 6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Resolviéndolas se obtiene que una base de $\mathcal{E}_{\mathsf{f}}(2)$ es

$$[(1,1,0)\,,(1/2,0,1)]$$

Calculemos ahora el espacio propio de $\mathbf{f}$ asociado a -1.

$$\mathcal{E}_{\mathsf{f}}(-1) = \mathrm{Ker}(\mathbf{f}+\mathbf{I}),$$

por lo que sus ecuaciones implícitas son

$$\begin{pmatrix} -9 & 12 & 6 \\ -6 & 9 & 3 \\ -6 & 6 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Resolviéndolas se obtiene que una base de $\mathcal{E}_{\mathsf{f}}(-1)$ es

$$[(2,1,1)]$$

◁

Definición 9.3.39 Sean $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{f}$ un endomorfismo de $\mathbb{R}^n$ y α un valor propio de $\mathbf{f}$.

1) Llamaremos *multiplicidad algebraica* de α y lo denotaremos por $\mathrm{mul}_a(\alpha)$ a la multiplicidad de α como raíz de $P_{\mathsf{f}}(x)$.

2) Llamaremos *multiplicidad lineal* de α y lo denotaremos por $\mathrm{mul}_l(\alpha)$ a

$$\mathrm{mul}_l(\alpha) = \dim \mathcal{E}_{\mathsf{f}}(\alpha) = n - \mathrm{rg}(\mathbf{f} - \alpha\mathbf{I}).$$

◁

Definición 9.3.40 Sean $n \in \mathbb{N}$, A una matriz $n \times n$ y α un valor propio de A.

1) Llamaremos *multiplicidad algebraica* de α y lo denotaremos por $\mathrm{mul}_a(\alpha)$ a la multiplicidad de α como raíz de $P_{\mathsf{A}}(x)$.

2) Llamaremos *multiplicidad lineal* de α y lo denotaremos por $\mathrm{mul}_l(\alpha)$ a

$$\mathrm{mul}_l(\alpha) = \dim \mathcal{E}_{\mathsf{A}}(\alpha) = n - \mathrm{rg}(\mathsf{A} - \alpha\mathrm{I}_n).$$

◁

Ejemplo 9.3.41 Sea f como en el Ejemplo 9.3.15. Vimos en el Ejemplo 9.3.35 que sus autovalores son -1 y 2. Puesto que teníamos que $P_{\mathsf{f}}(x) = -(1+x)(2-x)^2$, entonces

$$\begin{aligned} \mathrm{mul}_a(-1) &= 1, \\ \mathrm{mul}_a(2) &= 2. \end{aligned}$$

Por otra parte, del Ejemplo 9.3.38 deducimos que

$$\begin{aligned} \mathrm{mul}_l(-1) &= 1, \\ \mathrm{mul}_l(2) &= 2. \end{aligned}$$

◁

Proposición 9.3.42 Sean $n \in \mathbb{N}$, f un endomorfismo de $\mathbb{R}^n$ y α un valor propio de f. Se tiene que

$$1 \leq \mathrm{mul}_l(\alpha) \leq \mathrm{mul}_a(\alpha).$$

Demostración:
◁

Corolario 9.3.43 Sean $n \in \mathbb{N}$, A una matriz $n \times n$ y α un valor propio de A. Se tiene que

$$1 \leq \mathrm{mul}_l(\alpha) \leq \mathrm{mul}_a(\alpha).$$

◁

Proposición 9.3.44 Sean $n \in \mathbb{N}$, f un endomorfismo de $\mathbb{R}^n$ y $\alpha_1, \ldots, \alpha_s \in \mathbb{R}^n$ valores propios distintos de f. Entonces

$$\mathcal{E}_{\mathsf{f}}(\alpha_1) + \cdots + \mathcal{E}_{\mathsf{f}}(\alpha_s) = \mathcal{E}_{\mathsf{f}}(\alpha_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{E}_{\mathsf{f}}(\alpha_s).$$

◁

Corolario 9.3.45 Sean $n \in \mathbb{N}$, A una matriz $n \times n$ y $\alpha_1, \ldots, \alpha_s \in \mathbb{R}^n$ valores propios distintos de A. Entonces

$$\mathcal{E}_{\mathsf{A}}(\alpha_1) + \cdots + \mathcal{E}_{\mathsf{A}}(\alpha_s) = \mathcal{E}_{\mathsf{A}}(\alpha_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{E}_{\mathsf{A}}(\alpha_s).$$

◁

Ejemplo 9.3.46 Sea f como en el Ejemplo 9.3.15. Puede verse que $\mathcal{E}_{\mathsf{f}}(-1)$ y $\mathcal{E}_{\mathsf{f}}(2)$ calculados en el Ejemplo 9.3.38, forman suma directa. ◁

Teorema 9.3.47 [Condiciones de diagonalización 2]
Sean $n \in \mathbb{N}$ y f un endomorfismo de $\mathbb{R}^n$. Son equivalentes

(i) f es diagonalizable

(ii) Se verifican

1) Todas las raíces de $P_{\mathsf{f}}(x)$ son reales.

2) Para cada valor propio α de f, se tiene que

$$\operatorname{mul}_l(\alpha) = \operatorname{mul}_a(\alpha).$$

Demostración:
◁

Corolario 9.3.48 Sean $n \in \mathbb{N}$ y A una matriz $n \times n$. Son equivalentes

(i) A es diagonalizable

(ii) Se verifican

1) Todas las raíces de $P_{\mathsf{A}}(x)$ son reales.

2) Para cada valor propio α de A, se tiene que

$$\operatorname{mul}_l(\alpha) = \operatorname{mul}_a(\alpha).$$

◁

Ejemplo 9.3.49 Sea f como en el Ejemplo 9.3.15. De los Ejemplos 9.3.35 y 9.3.41 deducimos que f es diagonalizable. ◁

Nota 9.3.50 En la práctica, si un endomorfismo de $\mathbb{R}^n$, f verifica que es diagonalizable, de todo lo anterior se sigue que construyendo una base de cada espacio propio de f y concatenándolas todas, se obtiene una base $\boldsymbol{B}$ de $\mathbb{R}^n$ tal que la matriz $\mathsf{f}_{\boldsymbol{B}}^{\boldsymbol{B}}$ es diagonal.

Además, si A es la matriz asociada a f, $\boldsymbol{E}$ es la base canónica de $\mathbb{R}_n$ y $\mathsf{P} = \boldsymbol{B}_{\boldsymbol{E}}$, entonces

$$\mathsf{P}^{-1}\mathsf{A}\mathsf{P}$$

es una matriz diagonal. ◁

Corolario 9.3.51 Sean $n \in \mathbb{N}$ y f un endomorfismo de $\mathbb{R}^n$. Si todas las raíces de $P_{\mathsf{f}}(x)$ son reales y con multiplicidad 1, entonces f es diagonalizable ◁

Corolario 9.3.52 Sean $n \in \mathbb{N}$ y A una matriz $n \times n$. Si todas las raíces de $P_{\mathsf{A}}(x)$ son reales y con multiplicidad 1, entonces A es diagonalizable ◁

9.3.2 Polinomios de matrices

Proposición 9.3.53 Sean $n \in \mathbb{N}$ y A una matriz $n \times n$. Entonces

$$P_{\mathsf{A}}(\mathsf{A}) = \big(0\big)_{n\times n}.$$

$\triangleleft$

Ejemplo 9.3.54 Para la matriz

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} -10 & 12 & 6 \\ -6 & 8 & 3 \\ -6 & 6 & 5 \end{pmatrix},$$

vimos en el Ejemplo 9.3.28 que su polinomio característico era

$$P_{\mathsf{A}}(x) = -(1+x)(2-x)^2 = -x^3 + 3x^2 - 4.$$

Tenemos que

$$\begin{aligned} P_{\mathsf{A}}(\mathsf{A}) &= -\begin{pmatrix} -10 & 12 & 6 \\ -6 & 8 & 3 \\ -6 & 6 & 5 \end{pmatrix}^3 + 3\begin{pmatrix} -10 & 12 & 6 \\ -6 & 8 & 3 \\ -6 & 6 & 5 \end{pmatrix}^2 - 4\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 28 & -36 & -18 \\ 18 & -26 & -9 \\ 18 & -18 & -17 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -24 & 36 & 18 \\ -18 & 30 & 9 \\ -18 & 18 & 21 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$\triangleleft$

Proposición 9.3.55 Sean $n \in \mathbb{N}$, A una matriz $n \times n$ diagonalizable, sus valores propios distintos $\alpha_1, \ldots, \alpha_s \in \mathbb{R}$ y el polinomio

$$m(x) = (x - \alpha_1)\cdots(x - \alpha_s).$$

Entonces

$$m(\mathsf{A}) = \big(0\big)_{n\times n}.$$

$\triangleleft$

9.4 Ejercicios

Ejercicio 9.1 Sean el sistema de $\mathbb{R}^4$

$$\boldsymbol{S} = [(1,0,0,1), (0,-1,0,0), (-1,0,0,-1)],$$

$\boldsymbol{E} = [\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}]$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y $\mathsf{f} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ la aplicación lineal que verifica que $\mathsf{f}(\boldsymbol{E}) = \boldsymbol{S}$. Calcular bases de $\operatorname{Img}\mathsf{f}$ y de $\operatorname{Ker}\mathsf{f}$.

Ejercicio 9.2 Se considera el endomorfismo de $\mathbb{R}^4$ dado por la expresión

$$\mathsf{f}(x,y,z,t) = (2x+2z+4t, x+y, y-z-2t, x+z+2t), \ \forall\ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4.$$

Calcular una base de $\operatorname{Ker}\mathsf{f}$ y ecuaciones implícitas para $\operatorname{Img}\mathsf{f}$. Probar que para este endomorfismo $\operatorname{Ker}\mathsf{f}$ y $\operatorname{Img}\mathsf{f}$ forman suma directa.

Ejercicio 9.3 Sea $n \in \mathbb{N}$. Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, se define la aplicación

$$\begin{aligned} h_\alpha : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ \boldsymbol{x} &\longmapsto \alpha\boldsymbol{x} \end{aligned}.$$

Probar que

a) h_α es un endomorfismo de $\mathbb{R}^n$, $\forall\,\alpha \in \mathbb{R}$.

b) h_α es un automorfismo si y sólo si $\alpha \neq 0$.

c) $\mathsf{h}_\alpha^{-1} = \mathsf{h}_{1/\alpha}$, $\forall\,\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$.

d) $\mathsf{h}_\alpha + \mathsf{h}_\beta = \mathsf{h}_{\alpha+\beta}$, $\forall\,\alpha,\beta \in \mathbb{R}$.

e) $\mathsf{h}_\alpha \circ \mathsf{h}_\beta = \mathsf{h}_{\alpha\beta}$, $\forall\,\alpha,\beta \in \mathbb{R}$.

f) Si $\boldsymbol{B}$ es una base de $\mathbb{R}^n$ y f un endomorfismo de $\mathbb{R}^n$,

$$\mathsf{f} = \mathsf{h}_\alpha \Longleftrightarrow \mathsf{f}_{\boldsymbol{B}}^{\boldsymbol{B}} = \alpha \mathrm{I}_n.$$

Ejercicio 9.4 Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea H el conjunto de endomorfismos de $\mathbb{R}^n$ que verifican que su núcleo coincide con su imagen. Probar que

a) $H = \emptyset \iff n$ es impar.

b) Si $\mathsf{f} \in H$ entonces $\mathsf{f} \circ \mathsf{f} = \mathsf{0}$.

c) Existen endomorfismos f de $\mathbb{R}^n$ con $\mathsf{f} \circ \mathsf{f} = \mathsf{0}$ tales que $\mathsf{f} \notin H$.

d) Si $\mathsf{f} \in H$, entonces f no es inyectiva ni sobreyectiva.

Ejercicio 9.5 De un endomorfismo f de $\mathbb{R}^4$ sabemos que

$$\begin{aligned} \mathsf{f}(1,1,0,0) &= (0,1,0,-1) \\ \mathsf{f}(1,0,1,0) &= (1,1,1,0) \end{aligned}$$

y que $\operatorname{Ker} \mathsf{f} = \operatorname{Img} \mathsf{f}$. Obtener la matriz asociada a f.

Ejercicio 9.6 Sean $n \in \mathbb{N}$ y $\mathsf{A}_{n\times n}$ una matriz tal que existe $p \in \mathbb{N}$ con $\mathsf{A}^p = \mathsf{0}_{n\times n}$. Probar que entonces la matriz $\mathsf{B} := \mathrm{I}_n - \mathsf{A}$ es inversible y que

$$\mathsf{B}^{-1} = \mathrm{I}_n + \mathsf{A} + \mathsf{A}^2 + \cdots + \mathsf{A}^{p-1}.$$

Utilizar lo anterior para calcular la inversa de

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

y de

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 9.7 Sea la aplicación lineal

$$\begin{aligned} \mathsf{f}: \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) &\longmapsto (2x+y, y-z) \end{aligned},$$

$\boldsymbol{S} = [(1,1,1), (0,1,2), (0,2,1)]$ base de $\mathbb{R}^3$ y $\boldsymbol{S'} = [(2,1), (1,0)]$ base de $\mathbb{R}^2$. Calcular la matriz asociada a f y $\mathsf{f}_{\boldsymbol{S'}}^{\boldsymbol{S}}$.

Ejercicio 9.8 Sean $\boldsymbol{E}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{E'}$ la base canónica de $\mathbb{R}^5$, el sistema de $\mathbb{R}^3$

$$\boldsymbol{S} = [(2,1,0), (0,1,-1), (1,0,1)],$$

el sistema de $\mathbb{R}^5$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{S'} = [\,&(1,-1,0,1,0), (1,0,1,0,0), (0,0,1,-1,0), (-1,-1,1,0,1), \\ &(0,0,0,-1,0)], \end{aligned}$$

$\mathsf{f} : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ con matriz asociada

$$\begin{pmatrix} 1 & -6 & -7 & -2 & 5 \\ 1 & -3 & -3 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$\mathsf{g} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^5$ tal que

$$\mathsf{g}_{\boldsymbol{S'}}^{\boldsymbol{S}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

y el endomorfismo $\mathsf{h} = \mathsf{f} \circ \mathsf{g}$ de $\mathbb{R}^3$.

a) Calcular un espacio suplementario para cada uno de los siguientes espacios

$$\operatorname{Img} \mathsf{f},\ \operatorname{Ker} \mathsf{f},\ \operatorname{Img} \mathsf{g},\ \operatorname{Ker} \mathsf{g}.$$

b) Calcular la matriz asociada a h.

.

Ejercicio 9.9 Se considera la aplicación lineal

$$\begin{array}{rrcl} \mathsf{f} : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x, y, z) & \longmapsto & (0, 2x, y) \end{array},$$

a) Calcular la matriz asociada a f y a f^2.

b) Calcular $\operatorname{Ker} \mathsf{f}$, $\operatorname{Ker} \mathsf{f}^2$, $\operatorname{Img} \mathsf{f}$ y $\operatorname{Img} \mathsf{f}^2$

c) Para cada $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, calcular la matriz asociada al endomorfismo $\alpha \mathsf{f}^2 + \beta \mathsf{f} + \gamma \mathbf{I}$.

d) Sea el sistema de $\mathbb{R}^3$

$$[(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)].$$

Comprobar que es una base de $\mathbb{R}^3$ y calcular $\mathsf{f}_{\boldsymbol{S}}^{\boldsymbol{S}}$

Ejercicio 9.10 Sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Se considera el endomorfismo de $\mathbb{R}^4$

$$\begin{array}{rrcl} \mathsf{f} : & \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ & (x, y, z, t) & \longmapsto & (z - t, z + t, (3 - \alpha)(x - y), (3 - \alpha)(x + y)) \end{array},$$

y sean los sistemas de $\mathbb{R}^4$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{S} &= [(1, 1, 0, 0), (1, -1, 0, 0), (0, 0, 1, 1), (0, 0, 1, -1)], \\ \boldsymbol{S'} &= [(0, 0, 0, 1), (0, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 0)]. \end{aligned}$$

a) Comprobar que $\boldsymbol{S}$ y $\boldsymbol{S'}$ son bases de $\mathbb{R}^4$.

b) calcular la matriz asociada a f.

c) Calcular $\mathsf{f}_{\boldsymbol{S'}}^{\boldsymbol{S}}$.

d) Obtener los valores de α para los que f es inversible. Obtener f^{-1} cuando $\alpha = 2$.

e) Calcular $\operatorname{Ker}\mathsf{f}$ y $\operatorname{Img}\mathsf{f}$ en los casos en los que f no sea inversible. Calcular suplementarios para cada uno de los subespacios anteriores.

Ejercicio 9.11 Construir dos aplicaciones lineales distintas con el mismo núcleo y la misma imagen.

Ejercicio 9.12 Sean $n, m \in \mathbb{N}$. Si f es un isomorfismo de $\mathbb{R}^m$, y $\mathsf{g} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Probar que $\operatorname{Ker}\mathsf{f}\circ\mathsf{g} = \operatorname{Ker}\mathsf{g}$ y que $\operatorname{rg}\mathsf{f}\circ\mathsf{g} = \operatorname{rg}\mathsf{g}$.

Ejercicio 9.13 Sea f un endomorfismo de $\mathbb{R}^3$. Probar que $\dim(\operatorname{Ker}\mathsf{f}\cap\operatorname{Img}\mathsf{f}) \leq 1$.

Ejercicio 9.14 Sea $n \in \mathbb{N}$ y f un endomorfismo de $\mathbb{R}^n$. Probar que

$$\operatorname{Ker}\mathsf{f} = \operatorname{Img}\mathsf{f} \iff \mathsf{f}^2 = \mathsf{0} \text{ y } n = 2\operatorname{rg}\mathsf{f}.$$

Ejercicio 9.15 Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y f el endomorfismo de $\mathbb{R}^4$ dado por la matriz

$$\begin{pmatrix} b & 1 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ a & 0 & b & 1 \\ 0 & a & 0 & b \end{pmatrix}$$

a) Calcular base y ecuaciones implícitas para $\operatorname{Img}\mathsf{f}$ y $\operatorname{Ker}\mathsf{f}$ según los valores de a y b.

b) Estudiar para que valores de a y b se tiene $\operatorname{Ker}\mathsf{f}\oplus\operatorname{Img}\mathsf{f}$.

c) Sean $\mathcal{G}$ el subespacio de $\mathbb{R}^4$ con ecuaciones implícitas

$$\left\{\begin{array}{rrrrcl} 2x_1 & -x_2 & & & = & 0 \\ & & x_3 & -2x_4 & = & 0 \end{array}\right.$$

y $\mathcal{H}$ el subespacio de $\mathbb{R}^4$ con ecuaciones implícitas

$$\left\{\begin{array}{rrrcl} & 2x_2 & +x_4 & = & 0 \\ x_1 & & +x_4 & = & 0 \end{array}\right. .$$

Para $a = -2, b = 0$ estudiar si $\mathsf{f}(\mathcal{G})$ y $\mathcal{H}$ son subespacios suplementarios.

d) Sea $c \in \mathbb{R}$ estudiar si $\boldsymbol{v} = (c, 0, 1, c) \in \operatorname{Img} \mathbf{f}$ según los valores de a, b y c.

Ejercicio 9.16 Sean $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\mathbf{f}$ el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ tal que $\mathbf{f}(x, y, z) = (x, x + y + z, \alpha(x + y + z))$

a) Calcular la matriz asociada a $\mathbf{f}$

b) Calcular bases de $\operatorname{Img} \mathbf{f}$ y $\operatorname{Ker} \mathbf{f}$ según los valores de α.

c) Calcular $\mathbf{f}^{-1}(\{(1, 1, 1)\})$ según los valores de α.

Ejercicio 9.17 Sean $\alpha \in \mathbb{R}$ y f el endomorfismo de $\mathbb{R}^4$ dado por la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & \alpha - 1 & -\alpha - 1 \\ 1 & -1 & \alpha - 1 & -\alpha - 1 \end{pmatrix}.$$

a) Calcular $\operatorname{rg} \mathbf{f}$ según los valores de α.

b) Calcular bases ecuaciones implícitas y paramétricas y espacios suplementarios de $\operatorname{Img} \mathbf{f}$ y $\operatorname{Ker} \mathbf{f}$ según los valores de α.

c) Se considera el subespacio $\mathfrak{F}$ de $\mathbb{R}^4$

$$\mathfrak{F} = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,/\, x + y = 0,\ z + t = 0 \right\}.$$

Calcular la dimensión y una base de $\mathbf{f}^{-1}(\mathfrak{F})$ según los valores de α.

Ejercicio 9.18 De un endomorfismo $\mathbf{f}$ de $\mathbb{R}^3$ sabemos que deja invariantes los vectores $(1, 2, 1)$ y $(2, 0, 1)$ y que $(1, -1, 0)$ está en su núcleo.

a) Probar que el sistema $\boldsymbol{B} = [(1, 2, 1), (1, -1, 0), (2, 0, 1)]$ es una base de $\mathbb{R}^3$ y calcular $\mathbf{f}_{\boldsymbol{S}}^{\boldsymbol{S}}$.

b) Calcular la matriz asociada a $\mathbf{f}$.

c) Encontrar bases para $\operatorname{Img} \mathbf{f}$ y $\operatorname{Ker} \mathbf{f}$.

d) Obtener ecuaciones implícitas de $\operatorname{Img} \mathbf{f}$.

Ejercicio 9.19 Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Consideramos la matriz

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} a + b & b & 1 \\ -b & a - b & -1 \\ 1 & 1 & a^2 \end{pmatrix},$$

y $\mathbf{f}$ el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ dado por A.

a) Hallar una base de $\operatorname{Ker} \mathsf{f}$ según los valores de a y b.

b) Obtener los valores de a y b para los cuales el polinomio característico de A tiene un a raíz triple.

c) Estudiar para que valores de a y b es diagonalizable y en los casos en los que lo sea, escribir la forma diagonal y calcular matrices de paso.

Ejercicio 9.20 Sea f el endomorfismo de $\mathbb{R}^4$ dado por la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Construir, si es posible, una base de $\mathbb{R}^4$ formada por vectores propios de f.

Ejercicio 9.21 Estudiar para que valores de $a, b, c \in \mathbb{R}$ es diagonalizable la matriz

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 9.22 Estudiar para que valores de $a, b, c \in \mathbb{R}$ es diagonalizable la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & b & 0 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 9.23 Estudiar para que valores de $a \in \mathbb{R}$ es diagonalizable la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 2a & 0 \\ -a & 0 & a \\ 0 & -2a & 0 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 9.24 Estudiar para que valores de $a \in \mathbb{R}$ es diagonalizable la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1+3a & 1 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 9.25 Sean $n \in \mathbb{N}$ y $\mathsf{A}_{n\times n}$ una matriz con $\operatorname{rg} \mathsf{A} = 1$ y con $\det(\mathsf{A} + \mathrm{I}_n) = 0$. Probar que A es diagonalizable y obtener su forma diagonal.

Ejercicio 9.26 Probar que si A es una matriz diagonalizable e inversible, su inversa también es diagonalizable.

Ejercicio 9.27 ¿Existe algún endomorfismo $\mathbf{f}$ de $\mathbb{R}^2$ bases $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{B'}$ y $a \in \mathbb{R}$ tales que

$$\mathbf{f}_{\boldsymbol{B}}^{\boldsymbol{B}} = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \text{ y } \mathbf{f}_{\boldsymbol{B'}}^{\boldsymbol{B'}} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}?$$

Ejercicio 9.28 Sea $n \in \mathbb{N}$. Probar que dos matrices diagonalizables $n \times n$ con los mismos vectores propios, conmutan.

Ejercicio 9.29 Sean $n \in \mathbb{N}$ y $\mathsf{A}_{n\times n} \neq \mathsf{0}_{n\times n}$ tal que $\mathsf{A}^2 = \mathsf{A}$. ¿Se puede afirmar que 1 es valor propio de A?

Ejercicio 9.30 Probar que si dos matrices representan a un mismo endomorfismo en dos bases distintas, entonces su determinante coincide. ¿Es cierto el recíproco?

Ejercicio 9.31 Sea $n \in \mathbb{N}$. Estudiar si la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 3 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & n-1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & n-1 & n \end{pmatrix},$$

es diagonalizable. Calcular bases de sus espacios propios.

Ejercicio 9.32 Sea $n \in \mathbb{N}$. Estudiar si la matriz $n \times n$

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} + \mathrm{I}_n,$$

es diagonalizable. Calcular bases de sus espacios propios.

Ejercicio 9.33 Sean $n \in \mathbb{N}$ y la matriz triangular superior

$$\begin{pmatrix} a & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & a & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a & b_{n-1n} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a \end{pmatrix}.$$

¿Para que valores de los parámetros es diagonalizable?

Ejercicio 9.34 Estudiar si las siguientes matrices son diagonalizables en función de los parámetros y calcular matrices de paso cuando lo sean.

a) $\begin{pmatrix} a & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ -a & -a & -a & 0 \\ a & a-1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & a+1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & a \end{pmatrix}$

Ejercicio 9.35 Estudiar si las siguientes matrices son diagonalizables y calcular una matriz de paso cuando proceda.

a) $\begin{pmatrix} 21 & -20 & -40 \\ -25 & 16 & 40 \\ 25 & -20 & -44 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 11 & 0 & -10 & -15 & -5 & 0 \\ -5 & 4 & 8 & 15 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & -4 & -15 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -12 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -6 & 27 & 19 & -2 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -12 & -6 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 43 & -60 & 74 \\ -12 & 24 & -39 & 48 \\ -6 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 10 & 6 & -6 \\ -12 & -8 & 12 \\ -3 & -3 & 7 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} -55 & -100 & 52 \\ 15 & 25 & -17 \\ -45 & -90 & 32 \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} -1 & 20 & 10 & 20 \\ -3 & -20 & -8 & -16 \\ -44 & 14 & 24 & 42 \\ 25 & 7 & -7 & -11 \end{pmatrix}$

h) $\begin{pmatrix} -32 & 0 & 28 & -9 & -56 \\ -47 & 5 & 11 & 18 & -76 \\ 0 & 0 & -4 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 16 & 0 & -16 & 9 & 28 \end{pmatrix}$

i) $\begin{pmatrix} -26 & -8 & -16 \\ 22 & 10 & 10 \\ 37 & 10 & 25 \end{pmatrix}$

j) $\begin{pmatrix} 135 & -160 & -30 & 30 & -40 \\ 100 & -115 & -20 & 20 & -30 \\ -140 & 160 & 25 & -31 & 40 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 0 \\ 160 & -200 & -40 & 40 & -45 \end{pmatrix}$

k) $\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -9 & -2 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & -5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

l) $\begin{pmatrix} -95 & -380 & 130 \\ -24 & -83 & 30 \\ -135 & -500 & 176 \end{pmatrix}$

m) $\begin{pmatrix} -76 & 135 & 81 \\ -27 & 50 & 27 \\ -27 & 45 & 32 \end{pmatrix}$

n) $\begin{pmatrix} 131 & -352 \\ 48 & -129 \end{pmatrix}$

o) $\begin{pmatrix} -31 & -46 & 96 & -10 & 10 & 0 \\ -10 & -16 & 30 & -11 & 11 & 0 \\ -14 & -21 & 43 & -7 & 7 & 0 \\ -4 & -11 & 19 & -2 & -4 & 0 \\ 0 & -7 & 7 & -7 & 1 & 0 \\ -4 & -11 & 19 & 4 & -4 & -6 \end{pmatrix}$

p) $\begin{pmatrix} -26 & -33 \\ 14 & 17 \end{pmatrix}$

q) $\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}$

r) $\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$

s) $\begin{pmatrix} -749 & -1920 & -248 & 0 & 0 \\ 360 & 923 & 120 & 0 & 0 \\ -516 & -1324 & -177 & 0 & 0 \\ 9 & 23 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 10 & 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$

t) $\begin{pmatrix} -34 & 90 & -60 \\ 0 & -4 & 0 \\ 20 & -60 & 36 \end{pmatrix}$

u) $\begin{pmatrix} -13 & -30 \\ 6 & 14 \end{pmatrix}$

v) $\begin{pmatrix} 93 & -30 & 22 & -126 \\ 181 & -68 & 26 & -210 \\ -77 & 42 & 12 & 42 \\ 6 & 4 & 12 & -30 \end{pmatrix}$

w) $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 2 & 0 \\ -5 & 39 & 12 & -4 \end{pmatrix}$

x) $\begin{pmatrix} 251 & -105 \\ 588 & -246 \end{pmatrix}$

y) $\begin{pmatrix} -1 & -11 & 5 \\ -21 & 19 & -35 \\ -9 & 15 & -19 \end{pmatrix}$

z) $\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 10 & 8 & -12 \\ -8 & -4 & -2 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

aa) $\begin{pmatrix} 8 & 0 & 6 & -8 \\ -28 & -4 & -22 & 32 \\ -88 & -28 & -58 & 92 \\ -60 & -20 & -40 & 64 \end{pmatrix}$

ab) $\begin{pmatrix} -3 & -6 & 1 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & -2 & 8 & 6 \end{pmatrix}$

ac) $\begin{pmatrix} -3 & 0 & 28 & 2 & -20 \\ 0 & -5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & -4 & 10 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

ad) $\begin{pmatrix} 4 & -12 \\ 4 & -10 \end{pmatrix}$

ae) $\begin{pmatrix} -5 & 20 & 0 & 0 & 0 & -20 \\ 8 & -15 & 0 & 0 & 0 & 18 \\ 1 & -2 & -1 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & -6 & -2 \\ 8 & -20 & 0 & 0 & 0 & 23 \end{pmatrix}$

af) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

ag) $\begin{pmatrix} -577 & -1312 \\ 252 & 573 \end{pmatrix}$

ah) $\begin{pmatrix} -16 & -2 \\ 60 & 6 \end{pmatrix}$

ai) $\begin{pmatrix} 7 & -4 & 9 & 8 & 4 & 12 \\ -4 & -1 & 0 & 8 & -12 & 28 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & -5 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & -9 & -6 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

aj) $\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ -16 & -1 & 8 \\ 4 & 0 & -5 \end{pmatrix}$

ak) $\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ -26 & -4 & -5 & -20 \\ -24 & 0 & 1 & 0 \\ 12 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

al) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & 8 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ -18 & 20 & 0 & -12 & 10 \\ 6 & 10 & 0 & -5 & 3 \end{pmatrix}$

am) $\begin{pmatrix} -599 & -350 \\ 1032 & 603 \end{pmatrix}$

an) $\begin{pmatrix} -3 & 0 & -4 & 0 & 0 & 4 \\ 23 & -26 & 47 & 6 & 0 & -5 \\ 14 & -14 & 27 & 4 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ -14 & 14 & -18 & -5 & 5 & 0 \\ 14 & -14 & 26 & 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

ao) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 & -9 & -3 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & -3 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & -24 & 0 & 18 & 18 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

ap) $\begin{pmatrix} -7 & -4 & -7 & 0 \\ 8 & 5 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -5 \end{pmatrix}$

aq) $\begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 & 0 \\ -11 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -3 & 0 \\ -19 & 0 & -8 & 5 \end{pmatrix}$

ar) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

as) $\begin{pmatrix} 11 & -27 & -4 & 5 \\ 3 & -7 & -4 & -1 \\ -3 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & -9 & -8 & -3 \end{pmatrix}$

at) $\begin{pmatrix} -24 & 0 & 30 \\ -35 & 1 & 45 \\ -20 & 0 & 26 \end{pmatrix}$

au) $\begin{pmatrix} 10 & -4 & -13 \\ 75 & -27 & -75 \\ -18 & 6 & 15 \end{pmatrix}$

av) $\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ -14 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

aw) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 5 & 0 \\ -9 & 9 & 2 \end{pmatrix}$

ax) $\begin{pmatrix} 695 & 525 & -249 \\ -618 & -466 & 222 \\ 646 & 490 & -230 \end{pmatrix}$

ay) $\begin{pmatrix} 0 & -18 & 7 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & -18 & 13 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & -5 & 0 & -6 & -3 \\ 2 & 36 & -14 & 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}$

az) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & -21 & 0 & 6 & 3 & 0 \\ 8 & -1 & -6 & 13 & -4 & 0 \\ 2 & -16 & 0 & 13 & -1 & 0 \\ -6 & -60 & 0 & 24 & 6 & 0 \\ 12 & 6 & -48 & 36 & -6 & 6 \end{pmatrix}$

ba) $\begin{pmatrix} 5 & 7 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -6 \\ 6 & 12 & -2 & -18 \\ 0 & 3 & 0 & -8 \end{pmatrix}$

bb) $\begin{pmatrix} -16 & 4 & -2 & 11 & 0 \\ 14 & -10 & 4 & -11 & 0 \\ 28 & -14 & 5 & -22 & 0 \\ -22 & 4 & -2 & 17 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

bc) $\begin{pmatrix} -12 & 3 & 0 & 6 & 0 \\ -4 & -3 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & -5 & 2 & 0 \\ -7 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$

bd) $\begin{pmatrix} 3 & 8 & -1 & 0 \\ 12 & 12 & 6 & 0 \\ -42 & -52 & -16 & 0 \\ 12 & 14 & 6 & -2 \end{pmatrix}$

be) $\begin{pmatrix} -4 & -2 & -6 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -8 & -4 & 0 & -10 \\ 0 & 5 & -9 & -2 & 0 & -9 \\ 0 & -4 & 4 & -5 & -3 & -1 \\ 0 & -5 & 9 & 4 & 0 & 11 \end{pmatrix}$

bf) $\begin{pmatrix} 20 & -5 & -1 & 26 \\ 5 & -6 & -5 & 10 \\ -7 & 5 & 6 & -12 \\ -9 & 0 & -1 & -10 \end{pmatrix}$

bg) $\begin{pmatrix} -4 & 3 & -10 & 0 & 0 & 5 \\ -6 & 5 & -14 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 10 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

bh) $\begin{pmatrix} 32 & 36 & 0 & -33 & -9 \\ -10 & -10 & 0 & 11 & 3 \\ 5 & 12 & -1 & -1 & 0 \\ 38 & 48 & 0 & -35 & -9 \\ -72 & -96 & 0 & 60 & 14 \end{pmatrix}$

bi) $\begin{pmatrix} 28 & 22 & -66 & 38 \\ 26 & 43 & -115 & 47 \\ 4 & 16 & -40 & 12 \\ -30 & -14 & 48 & -36 \end{pmatrix}$

bj) $\begin{pmatrix} -29 & -90 & 40 \\ 14 & 43 & -18 \\ 7 & 21 & -8 \end{pmatrix}$

bk) $\begin{pmatrix} -669 & -667 & -562 & 334 \\ 416 & 414 & 352 & -208 \\ 84 & 84 & 69 & -42 \\ -378 & -378 & -315 & 188 \end{pmatrix}$

bl) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -5 \\ 5 & 11 & -25 \\ 2 & 4 & -9 \end{pmatrix}$

bm) $\begin{pmatrix} 53 & 7 & -75 \\ -48 & -2 & 75 \\ 36 & 6 & -49 \end{pmatrix}$

bn) $\begin{pmatrix} 85 & -25 & 25 \\ 238 & -70 & 70 \\ -51 & 15 & -15 \end{pmatrix}$

bo) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 14 & 2 & 4 & -4 & 0 & 0 \\ -28 & -2 & -3 & 3 & 0 & 0 \\ -6 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

bp) $\begin{pmatrix} 3 & 27 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ -1 & 42 & 3 \end{pmatrix}$

bq) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -3 & 1 & 2 \\ -4 & -15 & -7 & 2 & 5 \\ 16 & 49 & 29 & -8 & -19 \\ -21 & -55 & -37 & 11 & 25 \end{pmatrix}$

br) $\begin{pmatrix} -3 & 0 & -4 \\ -162 & -45 & -81 \\ 96 & 25 & 53 \end{pmatrix}$

bs) $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -7 & 3 & 1 & 0 & -2 \\ 10 & -1 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 2 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

bt) $\begin{pmatrix} 7 & -4 & 3 & -1 & -3 \\ 5 & -2 & 3 & -1 & -3 \\ -3 & 3 & -1 & 0 & -1 \\ 6 & -5 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

bu) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 15 & -10 \\ 1 & 5 & 14 & -9 \end{pmatrix}$

bv) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 13 & -5 & 1 \\ 17 & -1 & 9 & -17 & 3 \\ -6 & 1 & -1 & 6 & -1 \\ 0 & 4 & 13 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 13 & -4 & 2 \end{pmatrix}$

bw) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 0 & -10 & 12 & -3 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -5 & 6 & 2 \\ -1 & -1 & 0 & -5 & 4 & 4 \end{pmatrix}$

bx) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 13 & 3 & -7 \\ 19 & 10 & -14 \end{pmatrix}$

by) $\begin{pmatrix} -23 & -19 & 48 & 36 \\ -1 & -5 & 2 & -1 \\ -10 & -10 & 21 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$

bz) $\begin{pmatrix} -3 & -26 & 14 & -14 \\ 9 & 67 & -36 & 35 \\ 11 & 82 & -44 & 43 \\ -5 & -37 & 20 & -19 \end{pmatrix}$

ca) $\begin{pmatrix} 9 & -5 & -3 & -2 \\ 11 & -6 & -1 & -1 \\ 16 & -33 & -24 & -13 \\ -39 & 62 & 37 & 21 \end{pmatrix}$

cb) $\begin{pmatrix} 17 & 8 & 2 & 0 & 0 \\ -15 & -5 & -2 & 1 & -2 \\ -24 & -16 & -1 & -4 & 8 \\ 6 & 4 & 1 & 3 & 0 \\ -7 & -4 & -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

cc) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 4 & -3 & 3 & 1 & -3 \\ -5 & 0 & -7 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

ck) $\begin{pmatrix} 132 & -153 & 24 & 0 \\ 104 & -120 & 20 & 0 \\ -36 & 45 & 0 & 0 \\ -61 & 72 & -9 & 0 \end{pmatrix}$

cd) $\begin{pmatrix} -4 & 5 & -5 & 0 & 4 \\ -13 & 14 & -9 & 0 & 4 \\ -8 & 8 & -3 & 0 & 0 \\ -9 & 10 & -6 & 1 & 3 \\ -4 & 4 & -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

cl) $\begin{pmatrix} -5 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -7 & 2 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -6 & 6 & -2 & -4 & -1 & -1 \\ 5 & -5 & 6 & 6 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

ce) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 0 & 1 \\ 6 & 1 & 11 & 0 & 5 \\ -6 & -4 & -13 & 0 & -4 \\ -2 & -2 & -3 & -3 & 0 \\ 3 & 2 & 6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

cm) $\begin{pmatrix} -4 & 6 & -6 & 0 & 1 \\ -28 & 25 & -31 & -5 & 1 \\ -36 & 30 & -36 & -6 & 0 \\ 34 & -37 & 36 & -1 & -1 \\ -84 & 78 & -78 & -6 & 2 \end{pmatrix}$

cf) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 1 & -1 \\ -3 & 3 & -4 & 4 \end{pmatrix}$

cn) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 6 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

cg) $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

co) $\begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 & 5 \\ -2 & -6 & -2 & -2 \\ -4 & -4 & 0 & 4 \\ 3 & 5 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

ch) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 \\ -1 & -1 & 11 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$

cp) $\begin{pmatrix} -234 & -812 & 73 & 0 \\ 66 & 229 & -21 & 0 \\ 8 & 28 & -7 & 0 \\ 3 & 11 & -6 & -2 \end{pmatrix}$

ci) $\begin{pmatrix} -36 & -5 & 1 & 0 & -19 \\ 75 & 12 & 0 & 0 & 39 \\ -39 & -7 & -1 & 0 & -20 \\ -12 & -7 & -6 & -6 & -3 \\ 35 & 4 & -2 & 0 & 19 \end{pmatrix}$

cq) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 45 & 72 & -66 \\ 46 & 74 & -68 \end{pmatrix}$

cj) $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -14 & -49 \\ 0 & 4 & 14 \end{pmatrix}$

cr) $\begin{pmatrix} 75 & 127 & -153 \\ -20 & -37 & 38 \\ 20 & 32 & -43 \end{pmatrix}$

cs) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & -3 \\ -2 & 4 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

ct) $\begin{pmatrix} -8 & -71 & 61 \\ 2 & 27 & -26 \\ 2 & 22 & -21 \end{pmatrix}$

cu) $\begin{pmatrix} 0 & -7 & 4 \\ -6 & 4 & 2 \\ -15 & -5 & 11 \end{pmatrix}$

cv) $\begin{pmatrix} -39 & -19 & -46 & 80 & -81 \\ 22 & 7 & 32 & -44 & 43 \\ 22 & 2 & 38 & -44 & 42 \\ 22 & -6 & 43 & -43 & 44 \\ 22 & 2 & 33 & -44 & 47 \end{pmatrix}$

cw) $\begin{pmatrix} 7 & 0 & -4 \\ 9 & -3 & -10 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

cx) $\begin{pmatrix} -377 & -942 & 1140 & 694 \\ 173 & 431 & -526 & -316 \\ -22 & -57 & 65 & 45 \\ 69 & 174 & -210 & -131 \end{pmatrix}$

cy) $\begin{pmatrix} -11 & 3 & 1 & 1 \\ -13 & 2 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & -4 & 4 \\ -5 & 3 & -1 & -9 \end{pmatrix}$

cz) $\begin{pmatrix} 30 & -1 & -38 \\ -48 & -4 & 52 \\ 24 & -1 & -32 \end{pmatrix}$

da) $\begin{pmatrix} 74 & -20 & 1 \\ 288 & -78 & 4 \\ 108 & -28 & -2 \end{pmatrix}$

db) $\begin{pmatrix} -13 & -11 & -19 \\ 4 & 3 & 6 \\ 4 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

dc) $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -9 & -6 & -4 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

dd) $\begin{pmatrix} -2 & 16 & 16 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

de) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

df) $\begin{pmatrix} 24 & -10 & 19 & 32 & 12 \\ 74 & -31 & 47 & 87 & 32 \\ -34 & 13 & 6 & -9 & 3 \\ 24 & -9 & -5 & 5 & -3 \\ 17 & -7 & 9 & 18 & 6 \end{pmatrix}$

dg) $\begin{pmatrix} -26 & 17 & 0 & 0 & -42 \\ -13 & 13 & 0 & 0 & -17 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 19 & -10 & 0 & 0 & 31 \end{pmatrix}$

dh) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

di) $\begin{pmatrix} -3 & 4 & 16 & -21 \\ 1 & 9 & 50 & -68 \\ 1 & -3 & -15 & 12 \\ -3 & 1 & 0 & -8 \end{pmatrix}$

dj) $\begin{pmatrix} -6 & 3 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 1 & 1 \\ 12 & -7 & 6 & -8 \\ 5 & -3 & 3 & -5 \end{pmatrix}$

dk) $\begin{pmatrix} -1 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 0 \\ -1 & 6 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

dl) $\begin{pmatrix} -7 & 3 & -6 & -3 & 6 \\ 1 & -3 & 4 & 0 & -4 \\ -1 & 0 & -5 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & -3 & -3 \\ -2 & 1 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

dm) $\begin{pmatrix} -11 & 3 & -6 & -5 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \\ 25 & -5 & 14 & 9 \\ 7 & -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

dn) $\begin{pmatrix} 7 & -8 & 5 & -1 \\ 7 & -8 & 5 & -1 \\ -3 & 2 & -4 & -1 \\ -4 & 3 & -4 & -1 \end{pmatrix}$

do) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -124 & 39 & -10 & -31 & -25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -112 & 36 & -17 & -28 & -25 \\ -24 & 7 & 2 & -6 & -2 \end{pmatrix}$

dp) $\begin{pmatrix} 11 & -18 & -9 & 0 \\ 4 & -10 & 0 & 0 \\ 5 & -6 & -7 & 0 \\ -7 & 1 & 19 & 2 \end{pmatrix}$

dq) $\begin{pmatrix} -68 & 24 & 6 & -27 & -3 \\ -184 & 65 & 24 & -69 & -8 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 8 & -3 & 8 & 7 & 0 \\ -8 & 3 & -7 & -11 & -4 \end{pmatrix}$

dr) $\begin{pmatrix} -4 & 1 & -1 & -3 & 5 & 5 \\ 3 & -4 & 4 & 3 & -6 & -4 \\ 2 & -1 & 0 & 2 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

ds) $\begin{pmatrix} -7 & -12 & -2 \\ 0 & 6 & 0 \\ 4 & 57 & -1 \end{pmatrix}$

dt) $\begin{pmatrix} 44 & -4 & -25 & -80 \\ 0 & -3 & -1 & 5 \\ 46 & -4 & -27 & -80 \\ 9 & -1 & -5 & -17 \end{pmatrix}$

du) $\begin{pmatrix} -8 & -1 & 4 & 11 & 0 & -2 \\ 11 & 8 & -14 & -10 & -7 & 1 \\ 5 & 4 & -6 & -5 & -4 & 0 \\ -6 & -1 & 3 & 9 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -5 & -1 & -1 & 0 \\ 5 & 4 & -4 & -5 & -4 & -2 \end{pmatrix}$

dv) $\begin{pmatrix} -96 & -40 & -2 & -80 \\ 37 & 16 & -1 & 28 \\ -160 & -66 & -3 & -133 \\ 94 & 39 & 3 & 80 \end{pmatrix}$

dw) $\begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 & 0 & -3 \\ 1 & 6 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 6 & 4 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 4 & 4 \\ -1 & -2 & -1 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

dx) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 13 & 9 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & -1 & 4 & 7 \end{pmatrix}$

dy) $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 3 \\ -4 & -2 & 1 & -7 \\ -1 & -2 & 5 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & 6 \end{pmatrix}$

dz) $\begin{pmatrix} 34 & 57 & -54 & 54 \\ -39 & -62 & 53 & -54 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 13 & 19 & -17 & 13 \end{pmatrix}$

ea) $\begin{pmatrix} 41 & -20 & 36 & -40 \\ 77 & -38 & 63 & -70 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ -7 & 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

eb) $\begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 118 & 76 & 162 \\ -57 & -34 & -73 \end{pmatrix}$

ec) $\begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & 4 & 0 & 9 \\ -8 & 9 & -5 & 10 \\ -1 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$

ed) $\begin{pmatrix} 58 & -140 & -27 & -27 \\ 24 & -58 & -11 & -11 \\ 3 & -7 & -7 & -9 \\ -3 & 7 & 5 & 7 \end{pmatrix}$

ee) $\begin{pmatrix} 7 & 1 & -1 \\ -1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

ef) $\begin{pmatrix} 5 & 132 & 72 & 0 & 59 \\ 0 & -48 & -60 & 0 & -18 \\ 0 & 27 & 20 & 0 & 12 \\ 1 & 53 & 23 & 5 & 24 \\ 0 & 88 & 110 & 0 & 33 \end{pmatrix}$

eg) $\begin{pmatrix} 2 & 8 & -1 & 1 \\ -3 & -5 & -1 & -2 \\ -6 & -6 & -4 & -5 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

eh) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 7 & -14 & -8 \\ -6 & 16 & 10 \end{pmatrix}$

ei) $\begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 9 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & -9 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -9 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 1 & -6 \end{pmatrix}$

ej) $\begin{pmatrix} -17 & -6 & 1 & 0 \\ 24 & 7 & -2 & 0 \\ -46 & -15 & 4 & 1 \\ 54 & 19 & -5 & -2 \end{pmatrix}$

ek) $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 7 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

el) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -2 \\ -8 & -5 & 0 & 10 \\ 3 & 2 & 0 & -4 \\ -3 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

em) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & -6 & 15 \\ -1 & 1 & -6 & 12 & -31 \\ -14 & 0 & -6 & 19 & -35 \\ 14 & 0 & 7 & -18 & 35 \\ 1 & 0 & 4 & -5 & 16 \end{pmatrix}$

en) $\begin{pmatrix} 58 & 70 & 170 \\ 86 & 105 & 277 \\ -51 & -62 & -159 \end{pmatrix}$

eo) $\begin{pmatrix} 16 & -29 & -2 & -4 \\ 10 & -18 & -1 & -1 \\ -3 & 5 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$

ep) $\begin{pmatrix} 7 & 4 & 8 \\ 69 & 15 & 52 \\ -31 & -10 & -27 \end{pmatrix}$

eq) $\begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 & 9 & 0 \\ -8 & 1 & 0 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 9 & 0 & -1 & -9 & 1 \end{pmatrix}$

er) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ -4 & -2 & 2 \\ -3 & -6 & 6 \end{pmatrix}$

es) $\begin{pmatrix} 76 & 31 & 5 & 83 \\ -85 & -39 & -5 & -85 \\ 63 & 26 & -6 & 62 \\ -36 & -13 & -3 & -43 \end{pmatrix}$

et) $\begin{pmatrix} -44 & -2 & 50 & -1 & -1 \\ 16 & 1 & -16 & 0 & 0 \\ -37 & -1 & 43 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 & 5 & -1 \\ 7 & -14 & -8 & 1 & 7 \end{pmatrix}$

eu) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

ev) $\begin{pmatrix} -2151 & -1313 & -823 \\ 5825 & 3559 & 2234 \\ -3679 & -2251 & -1416 \end{pmatrix}$

ew) $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 & -4 \\ -5 & -4 & -6 & 0 \\ -5 & 0 & 1 & 5 \\ 9 & 0 & 1 & -8 \end{pmatrix}$

ex) $\begin{pmatrix} -33 & -57 & -15 & -13 \\ 20 & 35 & 8 & 7 \\ -29 & -49 & -7 & -9 \\ 48 & 77 & 20 & 21 \end{pmatrix}$

ey) $\begin{pmatrix} -45 & -2 & -16 \\ 15 & -4 & 10 \\ 165 & 10 & 56 \end{pmatrix}$

ez) $\begin{pmatrix} 382 & 285 & 227 \\ -64 & -48 & -38 \\ -572 & -426 & -340 \end{pmatrix}$

fa) $\begin{pmatrix} -4 & -20 & 0 & 13 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -8 & -4 & -6 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 0 \\ -2 & -4 & 1 & 12 & -4 \end{pmatrix}$

fb) $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -11 & -7 & 3 & -4 \\ -5 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

fc) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 6 & -3 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -6 & 6 & -6 & 3 \end{pmatrix}$

fd) $\begin{pmatrix} 31 & 113 & 80 & 80 & 113 \\ -24 & -91 & -65 & -65 & -96 \\ 36 & 118 & 80 & 84 & 118 \\ -22 & -70 & -48 & -52 & -70 \\ 5 & 24 & 19 & 19 & 29 \end{pmatrix}$

fe) $\begin{pmatrix} 11 & -23 & -12 & 0 \\ 6 & -13 & -7 & 0 \\ -2 & 6 & 4 & 0 \\ -1 & 5 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

ff) $\begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 34 & 6 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ -12 & -2 & 0 & -12 & 9 & 10 \\ 4 & 1 & 0 & 5 & -5 & -5 \end{pmatrix}$

fg) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 0 \\ -3 & 5 & 4 & 0 \\ 6 & -7 & -2 & 0 \\ -8 & 9 & 6 & 4 \end{pmatrix}$

fi) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -7 & -59 & -7 & 0 & -1 \\ 7 & 59 & 11 & 4 & 1 \\ -2 & 6 & 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$

fh) $\begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & -2 & 4 & 5 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & -3 & 16 & 13 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

fj) $\begin{pmatrix} 6 & 52 & -55 & 0 & 109 \\ -44 & -253 & 260 & 0 & -534 \\ -22 & -125 & 127 & 0 & -267 \\ 56 & 323 & -335 & -3 & 693 \\ 9 & 51 & -53 & 0 & 106 \end{pmatrix}$

fk) $\begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 & -1 & -4 & 0 & 0 \\ 13 & 3 & -12 & -17 & 28 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & -7 & -7 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & -5 & 10 & 5 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

fl) $\begin{pmatrix} -6 & -38 & 14 & 8 & 0 & -28 & 0 & -2 \\ 3 & 7 & -1 & 1 & 0 & 7 & 0 & 2 \\ -3 & 0 & -6 & -5 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 6 & 30 & -8 & -3 & 0 & 20 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & -8 & 0 \\ -5 & -4 & -4 & -6 & 0 & -5 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

fm) $\begin{pmatrix} -18 & -9 & 9 & -1 & -10 & -9 & -9 & 0 \\ -9 & -3 & 6 & 1 & -4 & 0 & -3 & 0 \\ -32 & -13 & 16 & -4 & -14 & -13 & -13 & 0 \\ 10 & 5 & -5 & 1 & 6 & 5 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & -4 & -3 & 4 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

fn) $\begin{pmatrix} -9 & 4 & -27 & 1 & 0 & 31 & -26 & -11 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & -8 & 1 & 0 & 6 & -1 & -3 \\ -6 & 4 & -8 & -2 & 0 & 12 & -4 & -6 \\ 3 & -4 & 6 & -3 & -6 & -6 & 3 & 3 \\ -3 & 2 & -13 & 1 & 0 & 11 & -12 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & -3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

fo) $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & -4 & 4 & 0 & 0 & 8 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & -5 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

fp) $\begin{pmatrix} -3 & -5 & -5 & -5 & 5 & 0 & 0 \\ 30 & -25 & -48 & 6 & -6 & -30 & 0 \\ -19 & 11 & 25 & -7 & 7 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 11 & -16 & -25 & 0 & 3 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

fq) $\begin{pmatrix} -5 & -8 & -8 & -25 & -4 & 8 & 8 & -4 \\ 0 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -18 & -13 & -43 & -8 & 18 & 25 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -6 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -19 & -19 & -52 & -8 & 24 & 33 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -18 & -18 & -32 & 3 & 18 & 14 & -3 \end{pmatrix}$

fr) $\begin{pmatrix} 10 & 2 & 4 & -14 & 4 & -12 & 0 & -4 \\ 20 & -1 & 6 & -16 & 7 & -15 & 0 & -6 \\ 5 & -5 & 3 & 6 & 1 & 6 & 0 & -8 \\ 3 & -3 & 0 & 7 & 2 & 5 & 0 & 0 \\ -14 & 7 & -2 & 2 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & -12 & 1 & -11 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$

fs) $\begin{pmatrix} 6 & 4 & 10 & 0 & 14 & 14 & -16 & -10 \\ 11 & 9 & -4 & 0 & -23 & 10 & 8 & 0 \\ 8 & 12 & -10 & 0 & -20 & 4 & 8 & 10 \\ 18 & 18 & 0 & -4 & -18 & 16 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 6 & 0 & 6 & 6 & -8 & -10 \\ -9 & -9 & 0 & 0 & 9 & -12 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 6 & 0 & 0 & 6 & -2 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

ft) $\begin{pmatrix} -13 & 28 & -28 & -54 & -20 & 16 & 16 \\ 2 & 7 & -12 & -26 & -4 & 16 & 16 \\ 16 & -15 & 10 & 14 & 16 & 0 & 0 \\ -7 & 14 & -14 & -26 & -10 & 8 & 8 \\ 9 & -23 & 23 & 43 & 13 & -8 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$

fu) $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 30 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 29 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 20 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 20 & 5 & 0 & 19 & 9 \\ -1 & 2 & -2 & 21 & 0 & 6 & -20 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -14 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 18 & 13 \end{pmatrix}$

fv) $\begin{pmatrix} -5 & 13 & 14 & 16 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ -10 & 18 & 14 & 16 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ -6 & -4 & -14 & -14 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 16 & -9 & 5 & 3 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ -25 & 24 & 23 & 23 & 2 & 10 & 4 & 4 \\ -8 & 14 & 16 & 20 & 0 & 5 & 0 & 4 \\ 18 & -4 & 10 & 10 & 0 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

fw) $\begin{pmatrix} 2 & -5 & -7 & -15 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

fx) $$\begin{pmatrix} -13 & -38 & 46 & -57 & 0 & -18 \\ -21 & -49 & 65 & -76 & 0 & -25 \\ -7 & -1 & 3 & -8 & 0 & -1 \\ 8 & 38 & -46 & 52 & 0 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 6 & 11 & -17 & 17 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

fy) $$\begin{pmatrix} -5 & 5 & -10 & 5 & 5 & 0 & 0 \\ -67 & 67 & -178 & 5 & 41 & 0 & 0 \\ -18 & 18 & -50 & 0 & 10 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -5 & -1 & 0 & 0 \\ 30 & -30 & 76 & 0 & -20 & 0 & 0 \\ 25 & -25 & 66 & 0 & -16 & 1 & 0 \\ -30 & 30 & -76 & 0 & 21 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

fz) $$\begin{pmatrix} -117 & -116 & 198 & -74 & 0 & -20 \\ -50 & -56 & 88 & -34 & 0 & -10 \\ -106 & -109 & 182 & -71 & 0 & -20 \\ -50 & -51 & 88 & -39 & 0 & -10 \\ 50 & 51 & -88 & 59 & 4 & 18 \\ 100 & 102 & -176 & 70 & 0 & 16 \end{pmatrix}$$

ga) $$\begin{pmatrix} 15 & 7 & 7 & 3 & -16 & 7 & 0 \\ -1 & -2 & -7 & -3 & 7 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 37 & 14 & 14 & 1 & -29 & 14 & 0 \\ 19 & 7 & 7 & 3 & -20 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ -5 & 0 & 4 & 0 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gb) $$\begin{pmatrix} 20 & 14 & 0 & 0 & -32 & 0 & 0 & 0 \\ -7 & -1 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 8 & 3 & -5 & -21 & 2 & 1 & 3 \\ -8 & -8 & 0 & -6 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 8 & 0 & 0 & -11 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 8 & 0 & -5 & -21 & 5 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 16 & 16 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

gc) $$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & -4 & -9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 7 & -2 & -1 & 0 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -7 & 0 & 10 & 7 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

gd) $$\begin{pmatrix} 88 & 82 & 120 & 39 & -28 & 28 \\ -123 & -117 & -180 & -59 & 42 & -42 \\ 20 & 20 & 35 & 10 & -7 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -8 & 2 \end{pmatrix}$$

ge) $$\begin{pmatrix} 5 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & -6 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & -3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -6 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & 8 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & -6 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

gf) $$\begin{pmatrix} -6 & 0 & -7 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & -24 & 0 & -8 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & -4 & 9 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 8 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

gg) $$\begin{pmatrix} -4213 & -7601 & -3601 & 3390 \\ 2064 & 3723 & 1768 & -1661 \\ 512 & 925 & 432 & -413 \\ -64 & -116 & -52 & 50 \end{pmatrix}$$

gh) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 12 & 18 & 0 & 6 & 0 \\ 2 & 1 & -12 & -12 & 0 & -6 & 0 \\ -1 & -1 & 5 & 6 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & -5 & 4 \end{pmatrix}$

gi) $\begin{pmatrix} -30 & 0 & -108 & 108 & 21 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & -7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 6 & 7 & 6 & 0 & 0 \\ -9 & 0 & -39 & 39 & 14 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

gj) $\begin{pmatrix} 10 & 16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & -14 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & -5 & 0 & 5 & -6 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 10 & 0 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

gk) $\begin{pmatrix} -8 & -38 & 0 & 2 & -30 & 16 & 16 \\ 0 & 10 & 0 & -6 & 6 & -6 & -6 \\ 7 & 38 & -1 & -2 & 30 & -16 & -16 \\ 3 & 7 & 0 & 5 & 4 & -4 & 3 \\ 4 & 20 & 0 & -2 & 19 & -6 & -13 \\ -7 & -17 & 0 & -8 & -14 & 5 & 3 \\ 8 & 48 & 0 & -10 & 40 & -18 & -30 \end{pmatrix}$

gl) $\begin{pmatrix} 0 & -6 & -3 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 2 & -4 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ -14 & 22 & 3 & -16 & 0 & -8 & 0 & 0 \\ -14 & 22 & 8 & -21 & 0 & -8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & -9 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & 10 & 4 & -8 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

gm) $\begin{pmatrix} 48 & 26 & 0 & 0 & 14 & 24 & 0 & 8 \\ -78 & -43 & 0 & 0 & -21 & -37 & 0 & -12 \\ -6 & 1 & -2 & -3 & -3 & -4 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ -28 & -14 & 0 & 0 & -12 & -14 & 0 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ -78 & -45 & 0 & 0 & -21 & -33 & 2 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

gn) $\begin{pmatrix} -19 & 11 & 0 & 4 & -4 & 0 & -13 & 3 \\ -22 & 14 & 0 & 4 & -4 & 0 & -18 & 8 \\ 16 & -8 & -6 & -4 & 4 & 0 & 0 & 4 \\ 3 & -5 & 1 & 3 & -8 & -9 & 13 & -16 \\ 27 & -17 & 1 & -3 & -2 & -9 & 21 & -12 \\ -23 & 11 & 0 & 4 & -4 & 4 & -13 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & -2 \end{pmatrix}$

go) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 32 & 8 & -7 & -7 & -7 & 0 & 7 \\ 12 & 17 & 0 & -6 & 0 & -12 & 0 & 4 \\ 7 & 41 & 14 & -7 & -13 & -7 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 4 & -10 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

gp) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & -12 & -10 & 0 & 0 & -10 \\ -6 & 4 & 5 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ -8 & 11 & 8 & 3 & 0 & 9 \end{pmatrix}$

gq) $\begin{pmatrix} -20 & 36 & -56 & -28 & 0 & -24 \\ -32 & 65 & -106 & -45 & 0 & -44 \\ -16 & 31 & -50 & -23 & 0 & -20 \\ 8 & -5 & 2 & 9 & 0 & 4 \\ 3 & -5 & 7 & 5 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

gr) $\begin{pmatrix} 7 & -4 & 9 & 1 & 1 & -7 \\ -15 & 8 & -19 & -2 & -2 & 12 \\ -7 & 3 & -7 & -1 & -1 & 5 \\ -7 & 0 & -6 & 5 & -1 & -1 \\ 6 & 0 & 5 & 1 & 7 & 6 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

gs) $\begin{pmatrix} 7931 & -6279 & -3757 & 14688 \\ -3568 & 2831 & 1692 & -6611 \\ 3829 & -3034 & -1819 & 7089 \\ -4829 & 3825 & 2287 & -8945 \end{pmatrix}$

gt) $\begin{pmatrix} 6 & -6 & 0 & -7 & 6 & 0 \\ 25 & -10 & -9 & -42 & 18 & -4 \\ 27 & -2 & -4 & -32 & 5 & -21 \\ -2 & -5 & 1 & 3 & 4 & 7 \\ 23 & -14 & -8 & -38 & 21 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

gu) $\begin{pmatrix} 791 & -793 & 401 & -235 & -235 \\ 390 & -392 & 198 & -115 & -115 \\ -406 & 406 & -208 & 120 & 120 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 640 & -641 & 319 & -192 & -194 \end{pmatrix}$

gv) $\begin{pmatrix} 2 & 8 & 2 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & -5 & -1 & 0 & 0 & -3 \\ 40 & 28 & -11 & 0 & 6 & 5 \\ 7 & 8 & 2 & -5 & 1 & 10 \\ 4 & 0 & -2 & -1 & -4 & -4 \\ -14 & -8 & 4 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

gw) $\begin{pmatrix} -20 & -11 & -10 & -24 & -9 & 23 \\ -2 & -5 & -2 & 6 & -1 & -5 \\ 65 & 44 & 40 & 56 & 40 & -57 \\ 47 & 35 & 26 & 42 & 32 & -38 \\ -24 & -17 & -16 & -23 & -20 & 23 \\ 49 & 36 & 28 & 40 & 33 & -37 \end{pmatrix}$

gx) $\begin{pmatrix} 10 & 10 & 0 & 5 & -5 & 0 & 0 \\ -6 & -14 & 4 & -9 & 9 & 0 & 3 \\ -10 & -10 & 0 & -5 & 5 & 0 & -3 \\ 4 & 16 & -4 & 12 & -8 & 0 & -3 \\ 2 & -2 & 4 & -1 & 5 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

gy) $\begin{pmatrix} 28 & 54 & 0 & 16 & -18 & 14 & 0 & -18 \\ 60 & 104 & 0 & 40 & -20 & 40 & 0 & -20 \\ 18 & 30 & 0 & 12 & -6 & 12 & 0 & -6 \\ 12 & 24 & 0 & 6 & 0 & 12 & 0 & 0 \\ -2 & -6 & 0 & 0 & -4 & -2 & 0 & 1 \\ -154 & -274 & 0 & -96 & 58 & -100 & 0 & 58 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 120 & 218 & 0 & 80 & -40 & 80 & 0 & -45 \end{pmatrix}$

gz) $\begin{pmatrix} 6 & -5 & -18 & 0 & 5 & -5 & 0 \\ 0 & 13 & 30 & 0 & -12 & 13 & 0 \\ 0 & -5 & -12 & 0 & 5 & -5 & 0 \\ -16 & 15 & 46 & -2 & -21 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 14 & 39 & 0 & -14 & 16 & 1 \end{pmatrix}$

ha) $\begin{pmatrix} 27 & -78 & -2 & -16 & 123 & 0 & 0 \\ 130 & -488 & 4 & -55 & 756 & 0 & 0 \\ -118 & 416 & -2 & 54 & -648 & 0 & 0 \\ 122 & -416 & 1 & -59 & 652 & 0 & 0 \\ 90 & -338 & 3 & -38 & 524 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$

hb) $\begin{pmatrix} -5 & -23 & -7 & 2 & 10 & -7 & -2 \\ 8 & -17 & -26 & -6 & -8 & 7 & -1 \\ -8 & 11 & 20 & 6 & 8 & -7 & 1 \\ -8 & 10 & 22 & 7 & 8 & -7 & -1 \\ 0 & -6 & -2 & -2 & 5 & 0 & -1 \\ -16 & 26 & 50 & 4 & 36 & -12 & 1 \\ -16 & 42 & 66 & 4 & 36 & -14 & 3 \end{pmatrix}$

hc) $$\begin{pmatrix} 24 & 8 & -8 & 8 & 0 & 0 \\ -8 & -2 & 10 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & 0 & 0 \\ -53 & -18 & 4 & -17 & 0 & 0 \\ -32 & -10 & -4 & -12 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

hd) $$\begin{pmatrix} -4 & -1 & 0 & 2 & -4 & -1 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & -2 & 5 & -20 & 0 \\ 8 & 2 & -2 & -2 & 7 & -12 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -1 & 3 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

he) $$\begin{pmatrix} -139 & 174 & 21 & 21 & -40 & 3 & 0 \\ -94 & 118 & 14 & 14 & -27 & 2 & 0 \\ 8 & -12 & -2 & 0 & 3 & -1 & 0 \\ -164 & 204 & 28 & 26 & -45 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -40 & 50 & 5 & 5 & -16 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

hf) $$\begin{pmatrix} -6 & 10 & 1 & 16 & 4 & 9 \\ -40 & 54 & 11 & 54 & 7 & 42 \\ 68 & -93 & -20 & -86 & -5 & -72 \\ 19 & -24 & -5 & -23 & -4 & -19 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

hg) $$\begin{pmatrix} -10 & -4 & -1 & -7 & -2 & 0 \\ -76 & -12 & 11 & -23 & 5 & 0 \\ -112 & -32 & -9 & -61 & 7 & 0 \\ 73 & 18 & -3 & 33 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Capítulo 10

Espacios vectoriales

10.1 Espacios vectoriales generales

A lo largo de los capítulos precedentes hemos ido viendo varios objetos para los cuales *tenía sentido* tomar combinaciones lineales. Ahora precisaremos esto e introduciremos la noción de espacio vectorial como los conjuntos cuyos elementos son susceptibles de ser combinados linealmente. Para ello no hay más que abstraer las propiedades relevantes que hacen que una combinación lineal tenga sentido e interés.

Definición 10.1.1 Sea $(\boldsymbol{\mathcal{V}}, +, \cdot)$ donde $+$ es una operación binaria interna y $\cdot$ es una operación externa sobre $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{R} \times \boldsymbol{\mathcal{V}} &\longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{V}} \\ (\alpha, \boldsymbol{x}) &\longmapsto \alpha \boldsymbol{x} \end{aligned} .$$

Diremos que $(\boldsymbol{\mathcal{V}}, +, \cdot)$ es un *espacio vectorial* sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ o bien un $\mathbb{R}$-espacio vectorial si $(\boldsymbol{\mathcal{V}}, +)$ es un grupo abeliano y la operación externa verifica las siguientes propiedades

1) $\alpha(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \alpha\boldsymbol{x} + \alpha\boldsymbol{y}$, $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall\, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{\mathcal{V}}$.

2) $(\alpha + \beta)\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{x}$, $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\forall\, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{\mathcal{V}}$.

3) $(\alpha\beta)\boldsymbol{x} = \alpha(\beta\boldsymbol{x})$, $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\forall\, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{\mathcal{V}}$.

4) $1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$, $\forall\, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{\mathcal{V}}$.

$\triangleleft$

Nota 10.1.2 Si $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial, llamaremos *cero* de $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ al elemento neutro para la operación $+$ de $\boldsymbol{\mathcal{V}}$. Se denotará por $\mathbf{0}_{\boldsymbol{\mathcal{V}}}$. Cuando no haya ambigüedad posible, bien por su posición en una fórmula, bien porque sólo estemos considerando un $\mathbb{R}$-espacio vectorial, lo denotaremos simplemente por $\mathbf{0}$. ◁

Con esta definición, si $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial, tiene sentido tomar combinaciones lineales de elementos de $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ y verificarán todas las propiedades *que uno espera* de las combinaciones lineales, como por ejemplo

Lema 10.1.3 Sea $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Se verifican

1) $0\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, $\forall\, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{\mathcal{V}}$.

2) $\alpha\mathbf{0} = \mathbf{0}$, $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$.

3) $\alpha(\boldsymbol{x_1} + \cdots + \boldsymbol{x_s}) = \alpha\boldsymbol{x_1} + \cdots + \alpha\boldsymbol{x_s}$, $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall\, \boldsymbol{x_1}, \ldots, \boldsymbol{x_s} \in \boldsymbol{\mathcal{V}}$.

4) $(\alpha_1 + \cdots + \alpha_s)\boldsymbol{x} = \alpha_1\boldsymbol{x} + \cdots + \alpha_s\boldsymbol{x}$, $\forall\, \alpha_1, \ldots, \alpha_s \in \mathbb{R}$, $\forall\, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{\mathcal{V}}$.

◁

Ejemplo 10.1.4 $\mathbb{R}^n$ ◁

Ejemplo 10.1.5 Matrices $n \times m$. ◁

Ejemplo 10.1.6 Aplicaciones lineales de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ ◁

Ejemplo 10.1.7 $\mathbb{R}[x], \mathbb{R}_n[x]$ ◁

Ejemplo 10.1.8 Funciones continuas en un intervalo. ◁

Ejemplo 10.1.9 Funciones integrables en un intervalo cerrado. ◁

Ejemplo 10.1.10 Funciones derivables en un intervalo abierto. ◁

Ejemplo 10.1.11 $\mathcal{C}^n I$, $\mathcal{C}^\infty(I)$ ◁

Ejemplo 10.1.12 Soluciones de la ecuación diferencial $y'' + y = 0$. ◁

Ejemplo 10.1.13 $\mathbb{C}$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial. ◁

Ejemplo 10.1.14 $\mathbb{C}^n$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial. ◁

10.2 Subespacios

Definición 10.2.1 Sea $\mathcal{V}$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial. Diremos que un conjunto $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{V}$ es un *subespacio vectorial* de $\mathcal{V}$ si se verifican

1) $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in \mathcal{G}$, $\forall\, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathcal{G}$

2) $\alpha \boldsymbol{x} \in \mathcal{G}$, $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall\, \boldsymbol{x} \in \mathcal{V}$.

$\triangleleft$

Proposición 10.2.2 Sean $\mathcal{V}$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{V}$. Son equivalentes

(i) $\mathcal{G}$ es un subespacio de $\mathcal{V}$.

(ii) $\alpha_1 \boldsymbol{x_1} + \cdots + \alpha_s \boldsymbol{x_s} \in \mathcal{G}$, $\forall\, \alpha_1, \ldots, \alpha_s \in \mathbb{R}$, $\forall\, \boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_s \in \mathcal{G}$.

$\triangleleft$

Proposición 10.2.3 Sean $\mathcal{V}$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y $\mathcal{G}$ un subespacio de $\mathcal{V}$. Entonces $\mathcal{G}$ es también un $\mathbb{R}$-espacio vectorial con las operaciones inducidas por las de $\mathcal{V}$. $\triangleleft$

Proposición 10.2.4 Sean $\mathcal{V}$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y $\mathcal{G}$ un subespacio de $\mathcal{V}$. Se tienen las siguientes propiedades

1) $\mathbf{0} \in \mathcal{G}$.

2) Sea el vector $\mathbf{0} \in \mathcal{V}$. El conjunto $\{\mathbf{0}\}$ es un subespacio de $\mathcal{V}$. Lo llamaremos el *subespacio cero o nulo* de $\mathcal{V}$.

3) $\mathcal{V}$ es un subespacio de $\mathcal{V}$. Lo llamaremos el *subespacio total* de $\mathcal{V}$.

Se llaman *subespacios triviales* de $\mathcal{V}$ al subespacio cero y al total. $\triangleleft$

10.2.1 Operaciones con subespacios

10.2.1.1 Suma

Definición 10.2.5 Sean $s \in \mathbb{N}$, $\mathcal{V}$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y $\mathcal{G}_1, \ldots, \mathcal{G}_s$ subespacios de $\mathcal{V}$. El conjunto

$$\{\boldsymbol{x_1} + \cdots + \boldsymbol{x_s} \,/\, \boldsymbol{x_1} \in \mathcal{G}_1, \ldots, \boldsymbol{x_s} \in \mathcal{G}_s\},$$

es un subespacio de $\mathcal{V}$ al que llamaremos subespacio suma de $\mathcal{G}_1, \ldots, \mathcal{G}_s$ y lo denotaremos por

$$\mathcal{G}_1 + \cdots + \mathcal{G}_s.$$

$\triangleleft$

Definición 10.2.6 Sean $s \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y $\mathcal{G}_1, \ldots, \mathcal{G}_s$ subespacios de $\boldsymbol{\mathcal{V}}$. Si se verifica

$$\boldsymbol{x_1} + \cdots + \boldsymbol{x_s} = \mathbf{0}, \text{ con } \boldsymbol{x_1} \in \mathcal{G}_1, \ldots, \boldsymbol{x_s} \in \mathcal{G}_s \Longrightarrow \boldsymbol{x_1} = \cdots = \boldsymbol{x_s} = \mathbf{0}.$$

entonces se dice que la suma de subespacios $\mathcal{G}_1 + \cdots + \mathcal{G}_s$ es directa y se denota por

$$\mathcal{G}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{G}_s.$$

◁

Definición 10.2.7 Sean $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ un espacio $\mathbb{R}$-vectorial y $\boldsymbol{\mathcal{F}}$, $\mathcal{G}$ y $\boldsymbol{\mathcal{H}}$ subespacios de $\boldsymbol{\mathcal{V}}$. Si $\boldsymbol{\mathcal{F}} \oplus \mathcal{G} = \boldsymbol{\mathcal{H}}$, diremos que $\mathcal{G}$ es un *suplementario* de $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ en $\boldsymbol{\mathcal{H}}$. Si además $\boldsymbol{\mathcal{H}} = \boldsymbol{\mathcal{V}}$, diremos simplemente que $\mathcal{G}$ es un suplementario de $\boldsymbol{\mathcal{F}}$. ◁

10.2.1.2 Intersección

Definición 10.2.8 Sean $s \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y $\{\mathcal{G}_j\}_{j\in J}$ un conjunto arbitrario de subespacios de $\boldsymbol{\mathcal{V}}$. Entonces

$$\bigcap_{j\in J} \mathcal{G}_j,$$

es un subespacio de $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ al que llamaremos subespacio intersección de $\{\mathcal{G}_j\}_{j\in J}$. ◁

10.3 Sistemas

Definición 10.3.1 Sea $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial. Un sistema de $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ es una colección finita y ordenada de vectores de $\boldsymbol{\mathcal{V}}$. ◁

Definición 10.3.2 Sea $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y $\boldsymbol{S} = [\boldsymbol{x_1}, \ldots, \boldsymbol{x_s}]$ un sistema de $\boldsymbol{\mathcal{V}}$.

1) Si $\alpha_1, \ldots, \alpha_s \in \mathbb{R}$, llamaremos *combinación lineal* de $\boldsymbol{S}$ con escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$, al vector de $\boldsymbol{\mathcal{V}}$

$$\alpha_1 \boldsymbol{x_1} + \cdots + \alpha_s \boldsymbol{x_s}.$$

2) Diremos que un vector $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{\mathcal{V}}$ es *combinación lineal* del sistema $\boldsymbol{S}$ si existen escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_s \in \mathbb{R}$ tales que

$$\boldsymbol{x} = \alpha_1 \boldsymbol{x_1} + \cdots + \alpha_s \boldsymbol{x_s}.$$

◁

Definición 10.3.3 Sean $\mathcal{V}$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y $\boldsymbol{S} = [\boldsymbol{x_1}, \dots, \boldsymbol{x_s}]$ un sistema de $\mathcal{V}$. Llamaremos *clausura lineal* de $\boldsymbol{S}$ y lo denotaremos por $\langle \boldsymbol{S} \rangle$ a

$$\langle \boldsymbol{S} \rangle = \{\alpha_1 \boldsymbol{x_1} + \cdots + \alpha_s \boldsymbol{x_s} \,/\, \alpha_1, \dots, \alpha_s \in \mathbb{R}\}\,.$$

$\triangleleft$

Proposición 10.3.4 Sean $\mathcal{V}$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y $\boldsymbol{S}$ un sistema de $\mathcal{V}$. Entonces $\langle \boldsymbol{S} \rangle$ es un subespacio de $\mathcal{V}$. $\triangleleft$

Definición 10.3.5 Sea $\mathcal{V}$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial. Diremos que un subespacio $\mathcal{G}$ de $\mathcal{V}$ es *finito generado*, si es la clausura lineal de algún sistema de $\mathcal{V}$. $\triangleleft$

Nota 10.3.6 En general no todos los subespacios de un espacio vectorial son finito generados. $\triangleleft$

Definición 10.3.7 Sea $\mathcal{V}$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y $\mathcal{G}$ un subespacio finito generado de $\mathcal{V}$. Diremos que un sistema $\boldsymbol{S}$ es un *sistema generador* de $\mathcal{G}$ si $\mathcal{G} = \langle \boldsymbol{S} \rangle$ $\triangleleft$

Definición 10.3.8 Sea $\mathcal{V}$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial. Diremos que un sistema $\boldsymbol{S} = [\boldsymbol{x_1}, \dots, \boldsymbol{x_s}]$ de $\mathcal{V}$ es *libre* si se verifica

$$\alpha_1 \boldsymbol{x_1} + \cdots + \alpha_s \boldsymbol{x_s} = \boldsymbol{0},\ \text{con } \alpha_1, \dots, \alpha_s \in \mathbb{R} \Longrightarrow \alpha_1 = \cdots = \alpha_s = 0.$$

Todo sistema que no sea libre se dirá que es *ligado*. $\triangleleft$

Proposición 10.3.9 Sea $\mathcal{V}$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y $\boldsymbol{S}$ un sistema de $\mathcal{V}$. $\boldsymbol{S}$ es libre si y sólo si cada vector de $\langle \boldsymbol{S} \rangle$ se escribe como combinación lineal del sistema $\boldsymbol{S}$ de forma única. $\triangleleft$

Nota 10.3.10 El estudio de los sistemas y sus propiedades no es suficiente para desentrañar todas las características de la estructura de un espacio vectorial general. Hace falta considerar conjuntos generadores y conjuntos libres lo cual nos llevaría a la noción general de base. $\triangleleft$

10.4 Aplicaciones lineales

Definición 10.4.1 Sean $\mathcal{V}$ y $\mathcal{V}'$ dos $\mathbb{R}$-espacios vectoriales. Una *aplicación lineal* de $\mathcal{V}$ en $\mathcal{V}'$ es una aplicación

$$\mathsf{f} : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}'\ ,$$

verificando las siguientes propiedades

1) $\mathsf{f}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \mathsf{f}(\boldsymbol{x}) + \mathsf{f}(\boldsymbol{y}),\ \forall\, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{\mathcal{V}}$.

2) $\mathsf{f}(\alpha\boldsymbol{x}) = \alpha\mathsf{f}(\boldsymbol{x}),\ \forall\, \alpha \in \mathbb{R},\ \forall\, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{\mathcal{V}}$.

Cuando $\boldsymbol{\mathcal{V}} = \boldsymbol{\mathcal{V}'}$, la aplicación lineal recibirá el nombre de *endomorfismo* de $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ o sobre $\boldsymbol{\mathcal{V}}$. $\triangleleft$

Definición 10.4.2 Sean $s \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ y $\boldsymbol{\mathcal{V}'}$ dos $\mathbb{R}$-espacios vectoriales, $\mathsf{f} : \boldsymbol{\mathcal{V}} \longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{V}'}$ una aplicación lineal y $\boldsymbol{S} = [\boldsymbol{x_1}, \ldots, \boldsymbol{x_s}]$ un sistema de $\boldsymbol{\mathcal{V}}$. Llamaremos *sistema imagen* de $\boldsymbol{S}$ y lo denotaremos por $\mathsf{f}(\boldsymbol{S})$ al sistema de $\boldsymbol{\mathcal{V}'}$

$$\mathsf{f}(\boldsymbol{S}) = [\mathsf{f}(\boldsymbol{x_1}), \mathsf{f}(\boldsymbol{x_1}), \ldots, \mathsf{f}(\boldsymbol{x_s})].$$

$\triangleleft$

Proposición 10.4.3 Sean $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ y $\boldsymbol{\mathcal{V}'}$ dos $\mathbb{R}$-espacios vectoriales y $\mathsf{f} : \boldsymbol{\mathcal{V}} \longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{V}'}$ una aplicación. Las siguientes propiedades son equivalentes

(i) f es una aplicación lineal.

(ii) Para todo sistema $[\boldsymbol{x_1}, \ldots, \boldsymbol{x_s}]$ de $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ y para todos $\alpha_1, \ldots, \alpha_s \in \mathbb{R}$, se tiene que

$$\mathsf{f}(\alpha_1\boldsymbol{x_1} + \cdots + \alpha_s\boldsymbol{x_s}) = \alpha_1\mathsf{f}(\boldsymbol{x_1}) + \alpha_2\mathsf{f}(\boldsymbol{x_2}) + \cdots + \alpha_s\mathsf{f}(\boldsymbol{x_s}).$$

$\triangleleft$

10.4.1 Aplicaciones lineales particulares

Definición 10.4.4 Sean $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ y $\boldsymbol{\mathcal{V}'}$ dos $\mathbb{R}$-espacios vectoriales.

1) Definimos la aplicación lineal *cero* de $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ en $\boldsymbol{\mathcal{V}'}$ como

$$\begin{aligned} \mathsf{0} : \boldsymbol{\mathcal{V}} &\longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{V}'} \\ \boldsymbol{x} &\longmapsto \boldsymbol{0} \end{aligned}.$$

2) Definimos la aplicación lineal *identidad* de $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ en $\mathbb{R}^n$ como

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{\boldsymbol{\mathcal{V}}} : \boldsymbol{\mathcal{V}} &\longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{V}} \\ \boldsymbol{x} &\longmapsto \boldsymbol{x} \end{aligned}.$$

$\triangleleft$

10.4.2 Propiedades de las aplicaciones lineales

Proposición 10.4.5 Sean $\mathcal{V}$ y $\mathcal{V}'$ dos $\mathbb{R}$-espacios vectoriales y $\mathsf{f} : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}'$ una aplicación lineal. Se verifican las siguientes propiedades.

1) $\mathsf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

2) Si $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{V}$ es un subespacio de $\mathcal{V}$, entonces $\mathsf{f}(\mathcal{G})$ es un subespacio de $\mathcal{V}'$.

3) Si $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{V}'$ es un subespacio de $\mathcal{V}'$, entonces $\mathsf{f}^{-1}(\mathcal{H})$ es un subespacio de $\mathcal{V}$.

◁

10.4.3 Núcleo e imagen

Definición 10.4.6 Sean $\mathcal{V}$ y $\mathcal{V}'$ dos $\mathbb{R}$-espacios vectoriales y $\mathsf{f} : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}'$ una aplicación lineal.

1) Llamaremos núcleo de f y lo denotaremos por $\operatorname{Ker} \mathsf{f}$ a

$$\operatorname{Ker} \mathsf{f} = \mathsf{f}^{-1}(\{\mathbf{0}\}) = \{\boldsymbol{x} \in \mathcal{V} \,/\, \mathsf{f}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}\}\,.$$

2) Llamaremos imagen de f y la denotaremos por $\operatorname{Img} \mathsf{f}$ a la imagen de f como aplicación, es decir

$$\operatorname{Img} \mathsf{f} = \mathsf{f}(\mathcal{V}) = \{\boldsymbol{y} \in \mathcal{V}' \,/\, \exists \boldsymbol{x} \in \mathcal{V} \text{ con } \mathsf{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}\}\,.$$

◁

Proposición 10.4.7 Sean $\mathcal{V}$ y $\mathcal{V}'$ dos $\mathbb{R}$-espacios vectoriales y $\mathsf{f} : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}'$ una aplicación lineal. Se tiene

1) $\operatorname{Ker} \mathsf{f}$ es un subespacio de $\mathcal{V}$.

2) $\operatorname{Img} \mathsf{f}$ es un subespacio de $\mathcal{V}'$.

◁

10.4.4 Inyectividad y sobreyectividad

Proposición 10.4.8 Sean $\mathcal{V}$ y $\mathcal{V}'$ dos $\mathbb{R}$-espacios vectoriales y $\mathsf{f} : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}'$ una aplicación lineal. Son equivalentes

(i) f es inyectiva.

(ii) $\operatorname{Ker} \mathbf{f} = \{\mathbf{0}\}$.

(iii) Para cada sistema libre $\boldsymbol{S}$ de $\mathcal{V}$, $\mathbf{f}(\boldsymbol{S})$ es un sistema libre de $\mathcal{V}'$.

$\triangleleft$

Proposición 10.4.9 Sean $\mathcal{V}$ y $\mathcal{V}'$ dos $\mathbb{R}$-espacios vectoriales y $\mathbf{f} : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}'$ una aplicación lineal. Son equivalentes

(i) $\mathbf{f}$ es sobreyectiva.

(ii) $\operatorname{Img} \mathbf{f} = \mathcal{V}'$.

$\triangleleft$

Proposición 10.4.10 Sean $\mathcal{V}$ y $\mathcal{V}'$ dos $\mathbb{R}$-espacios vectoriales y $\mathbf{f} : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}'$ una aplicación lineal. Son equivalentes

(i) $\mathbf{f}$ es biyectiva.

(ii) $\operatorname{Img} \mathbf{f} = \mathcal{V}'$ y $\operatorname{Ker} \mathbf{f} = \{0\}$

$\triangleleft$

Definición 10.4.11 Llamaremos *isomorfismo* a toda aplicación lineal biyectiva entre dos espacios vectoriales.
Llamaremos *automorfismo* a todo endomorfismo biyectivo. $\triangleleft$

Proposición 10.4.12 La aplicación inversa de un isomorfismo también es un isomorfismo. $\triangleleft$

Proposición 10.4.13 Sean $\mathcal{V}$ y $\mathcal{V}'$ dos $\mathbb{R}$-espacios vectoriales y $\mathbf{f} : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}'$ un isomorfismo. $\mathcal{G}$ es un subespacio de $\mathcal{V}$ si y sólo si $\mathbf{f}(\mathcal{G})$ es un subespacio de $\mathcal{V}'$. $\triangleleft$

10.4.5 Operaciones con aplicaciones lineales

Definición 10.4.14 Sean $s \in \mathbb{N}$, $\mathcal{V}$ y $\mathcal{V}'$ dos $\mathbb{R}$-espacios vectoriales, $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_s$ aplicaciones lineales de $\mathcal{V}$ en $\mathcal{V}'$ y $\alpha_1, \ldots, \alpha_s \in \mathbb{R}$. Definimos la aplicación *combinación lineal* de $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_s$ con escalares $(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$ como

$$\begin{aligned} \alpha_1 \mathbf{f}_1 + \cdots + \alpha_s \mathbf{f}_s : \mathcal{V} &\longrightarrow \mathcal{V}' \\ \boldsymbol{x} &\longmapsto \alpha_1 \mathbf{f}_1(\boldsymbol{x}) + \cdots + \alpha_s \mathbf{f}_s(\boldsymbol{x}) \end{aligned}$$

$\triangleleft$

Proposición 10.4.15 Sean $s \in \mathbb{N}$, $\mathcal{V}$ y $\mathcal{V}'$ dos $\mathbb{R}$-espacios vectoriales, $\mathbf{f}_1, \ldots \mathbf{f}_s$ aplicaciones lineales de $\mathcal{V}$ en $\mathcal{V}'$ y $\alpha_1, \ldots \alpha_s \in \mathbb{R}$. La aplicación combinación lineal $\mathbf{g} = \alpha_1 \mathbf{f}_1 + \cdots + \alpha_s \mathbf{f}_s$ es una aplicación lineal de $\mathcal{V}$ en $\mathcal{V}'$. $\triangleleft$

Proposición 10.4.16 Sean $\mathcal{V}$, $\mathcal{V}'$ y $\mathcal{V}''$ tres $\mathbb{R}$-espacios vectoriales y $\mathbf{f} : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}'$, $\mathbf{g} : \mathcal{V}' \longrightarrow \mathcal{V}''$ aplicaciones lineales. La aplicación $\mathbf{g} \circ \mathbf{f} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ es una aplicación lineal de $\mathcal{V}$ en $\mathcal{V}''$. $\triangleleft$

10.5 Espacios vectoriales de dimensión finita

El lector puede comprobar fácilmente que todas las nociones que hemos introducido hasta ahora en éste capítulo, extienden a las correspondientes que teníamos para $\mathbb{R}^n$ considerado como $\mathbb{R}$-espacio vectorial. Aprovechando este hecho, desarrollaremos el álgebra lineal en dimensión finita apoyándonos en nuestro conocimiento de $\mathbb{R}^n$.

Proposición 10.5.1 Sean $n \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{B}$ una base de $\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y $\boldsymbol{S}$ un sistema de n vectores de $\boldsymbol{\mathcal{V}}$. Existe una única aplicación lineal $\mathsf{f} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{V}}$ tal que $\mathsf{f}(\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{S}$. $\triangleleft$

Definición 10.5.2 Sea $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial. Diremos que $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ es un espacio vectorial *de dimensión finita* si existe un isomorfismo de espacios vectoriales $\mathsf{f} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{V}}$, para algún $n \in \mathbb{N}$. $\triangleleft$

Teorema 10.5.3 [Caracterización de espacios de dimensión finita] Sea $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial. Son equivalentes

(i) $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ es de dimensión finita.

(ii) $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ es finito generado.

(iii) Existen $n \in \mathbb{N}$ y una aplicación lineal $\mathsf{f} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{V}}$ sobreyectiva.

(iv) Existen $n \in \mathbb{N}$ y una aplicación lineal $\mathsf{f} : \boldsymbol{\mathcal{V}} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ inyectiva.

(v) Existen $n \in \mathbb{N}$ y un isomorfismo $\mathsf{f} : \boldsymbol{\mathcal{V}} \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

$\triangleleft$

10.5.1 Dimensión

Proposición 10.5.4 Sea $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ un espacio vectorial tal que existen $n, n' \in \mathbb{N}$ e isomorfismos $\mathsf{f} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{V}}$, $\mathsf{g} : \mathbb{R}^{n'} \longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{V}}$. Entonces $n = n'$.
Demostración:
Por 10.4.12 y 10.4.16 $\mathsf{g} \circ \mathsf{f}^{-1}$ es un isomorfismo de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^{n'}$ por lo que $n = n'$. $\triangleleft$

Definición 10.5.5 Sea $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita. Por 10.5.4 existe un único $n \in \mathbb{N}$ y al menos un isomorfismo $\mathsf{f} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{V}}$. Llamaremos a n la *dimensión* de $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ y lo denotaremos por

$$\dim \boldsymbol{\mathcal{V}} = n.$$

$\triangleleft$

10.5.2 Bases

Definición 10.5.6 Sea $\mathcal{V}$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita. Diremos que un sistema $\boldsymbol{S}$ de n vectores de $\mathcal{V}$ es una base de $\mathcal{V}$ si existe una base $\boldsymbol{B}$ de $\mathbb{R}^n$ tal que la única aplicación lineal $\mathsf{f} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{V}$ con $\mathsf{f}(\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{S}$ es un isomorfismo ◁

Proposición 10.5.7 Sea $\mathcal{V}$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita. Se verifican

1) $\mathcal{V}$ tiene al menos una base.

2) Si $\dim \mathcal{V} = n$, entonces todas las bases de $\mathcal{V}$ tienen exactamente n elementos.

◁

Teorema 10.5.8 [Caracterización de bases]
Sean $\mathcal{V}$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión n y $\boldsymbol{S}$ un sistema de $\mathcal{V}$. Son equivalentes

(i) $\boldsymbol{S}$ es una base de $\mathcal{V}$.

(ii) Para cada base $\boldsymbol{B}$ de $\mathbb{R}^n$ la única aplicación lineal $\mathsf{f} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{V}$ tal que $\mathsf{f}(\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{S}$ es un isomorfismo

(iii) $\boldsymbol{S}$ es un sistema generador de $\mathcal{V}$ con n elementos.

(iv) $\boldsymbol{S}$ es un sistema libre con n elementos.

(v) $\boldsymbol{S}$ es un sistema libre y es un sistema generador de $\mathcal{V}$.

(vi) Cada vector de $\mathcal{V}$ se escribe de forma única como combinación lineal de $\boldsymbol{S}$.

◁

10.5.3 Coordenadas

Definición 10.5.9 Sean $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{V}$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión n, $\boldsymbol{B}$ una base de $\mathcal{V}$ y $\boldsymbol{E}$ la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Sabemos (ver 10.5.1 y 10.5.8) que existe un único isomorfismo $\mathsf{f} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{V}$ tal que $\mathsf{f}(\boldsymbol{E}) = \boldsymbol{B}$. Llamaremos *isomorfismo coordenado* de $\mathcal{V}$ en la base $\boldsymbol{B}$ y lo denotaremos por $\mathfrak{l}_{\boldsymbol{B}}$ al isomorfismo f^{-1}. ◁

Definición 10.5.10 Sean $\mathcal{V}$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita con $\dim \mathcal{V} = n$, $\boldsymbol{B}$ una base de $\mathcal{V}$ y $\boldsymbol{x} \in \mathcal{V}$. Llamaremos *coordenadas* de $\boldsymbol{x}$ en la base $\boldsymbol{B}$ y las denotaremos por $\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{B}}$ a

$$\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{B}} = \mathfrak{l}_{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{x}).$$

◁

Proposición 10.5.11 Sean $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita con $\dim \boldsymbol{\mathcal{V}} = n$, $\boldsymbol{B} = [\boldsymbol{a_1}, \dots, \boldsymbol{a_n}]$ una base de $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ y $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{\mathcal{V}}$. Se tiene que

$$\boldsymbol{x_B} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \iff \boldsymbol{x} = \alpha_1 \boldsymbol{a_1} + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{a_n}.$$

◁

Nota 10.5.12 El resultado 10.5.11 nos dice que las coordenadas en una base pueden ser vistas si se quiere como algo intrínseco, pues para cada vector, las coordenadas son los únicos escalares que permiten escribir dicho vector como combinación lineal de la base. ◁

Definición 10.5.13 Sean $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita con, $\boldsymbol{B}$ una base de $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ y $\boldsymbol{S}$ un sistema de $\boldsymbol{\mathcal{V}}$. Llamaremos *matriz de coordenadas* del sistema $\boldsymbol{S}$ en la base $\boldsymbol{B}$, o simplemente matriz de $\boldsymbol{S}$ en $\boldsymbol{B}$, y la denotaremos por $\boldsymbol{S_B}$ a la matriz

$$\boldsymbol{S_B} = \mathfrak{l}_{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{S})_C,$$

Es decir, la matriz cuyas columnas son las coordenadas de los vectores del sistema $\boldsymbol{S}$ en la base $\boldsymbol{B}$. ◁

Definición 10.5.14 Sean $n \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial con $\dim \boldsymbol{\mathcal{V}} = n$, $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{B'}$ dos bases de $\boldsymbol{\mathcal{V}}$. Llamaremos *matriz de paso* de $\boldsymbol{B}$ a $\boldsymbol{B'}$ y la denotaremos por $\boldsymbol{B_{B'}}$ a la matriz de $\boldsymbol{B}$ en $\boldsymbol{B'}$. Nótese que es una matriz cuadrada de orden n. ◁

Teorema 10.5.15 [Cambio de coordenadas]
Sean $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita, $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{B'}$ dos bases de $\boldsymbol{\mathcal{V}}$. Para cada $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{\mathcal{V}}$ se tiene que

$$\boldsymbol{x_{B'}} = \boldsymbol{B_{B'}} \boldsymbol{x_B}.$$

◁

Proposición 10.5.16 Sean $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita, $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{B'}$ dos bases y $\boldsymbol{S}$ un sistema de $\boldsymbol{\mathcal{V}}$. Se verifica

1) $\boldsymbol{B_{B'}} \boldsymbol{S_B} = \boldsymbol{S_{B'}}$

2) $\boldsymbol{B_{B'}}$ es inversible y $(\boldsymbol{B_{B'}})^{-1} = \boldsymbol{B'_B}$

3) $\boldsymbol{S}$ es una base si y sólo si $\boldsymbol{S_B}$ es cuadrada e inversible.

◁

10.5.4 Rango

Lema 10.5.17 Sean $\mathcal{V}$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita, $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{B'}$ dos bases y $\boldsymbol{S}$ un sistema de $\mathcal{V}$. Se tiene que

$$\operatorname{rg} \boldsymbol{S}_{\boldsymbol{B}} = \operatorname{rg} \boldsymbol{S}_{\boldsymbol{B'}}$$

Demostración:
Es un corolario inmediato de 10.5.16. ◁

Definición 10.5.18 Sean $\mathcal{V}$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita y $\boldsymbol{S}$ un sistema de $\mathcal{V}$. Llamaremos *rango* de $\boldsymbol{S}$ y lo denotaremos por $\operatorname{rg} \boldsymbol{S}$, como el rango de la matriz de coordenadas de $\boldsymbol{S}$ en una base cualquiera de $\mathcal{V}$. (Debido a 10.5.17, esta noción está bien definida). ◁

Lema 10.5.19 Sean $\mathcal{V}$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita y $\boldsymbol{S}$ un sistema de $s \in \mathbb{N}$ vectores de $\mathcal{V}$. Se tiene que

$$\operatorname{rg} \boldsymbol{S} = s \Longleftrightarrow \boldsymbol{S} \text{ es libre.}$$

◁

10.5.5 Subespacios

Lema 10.5.20 Sea $\mathcal{V}$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita. Todo subespacio de $\mathcal{V}$ es finito generado. ◁

Nota 10.5.21 Por lo tanto, todo subespacio de un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita es a su vez un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita y todo lo dicho para estos espacios será válido para ellos, en particular tendrán dimensión y bases. ◁

Definición 10.5.22 Sean $\mathcal{V}$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita y $\mathcal{G}$ un subespacio de $\mathcal{V}$. Llamaremos dimensión de $\mathcal{G}$ y la denotaremos por $\dim \mathcal{G}$ a su dimensión como $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita. ◁

Definición 10.5.23 Sean $\mathcal{V}$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita y $\mathcal{G}$ un subespacio de $\mathcal{V}$. Una base de $\mathcal{G}$ es una base de $\mathcal{G}$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita. ◁

Lema 10.5.24 Sean $\mathcal{V}$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita, $\boldsymbol{B}$ una base de $\mathcal{V}$, $\mathcal{G}$ un subespacio de $\mathcal{V}$ y $\boldsymbol{S}$ un sistema de $\mathcal{V}$. Son equivalentes

(i) $\boldsymbol{S}$ es un sistema generador de $\mathcal{G}$.

(ii) $\mathfrak{l}_{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{S})$ es un sistema generador de $\mathfrak{l}_{\boldsymbol{B}}(\mathcal{G})$.

◁

Lema 10.5.25 Sean $\mathcal{V}$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita, $\mathcal{G}$ un subespacio de $\mathcal{V}$ y $\boldsymbol{S}$ un sistema generador de $\mathcal{G}$. Entonces

$$\operatorname{rg} \boldsymbol{S} = \dim \mathcal{G}.$$

◁

Teorema 10.5.26 [Caracterización de bases de subespacios]
Sean $\mathcal{V}$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita, $\boldsymbol{B}$ una base de $\mathcal{V}$, $\mathcal{G}$ un subespacio de $\mathcal{V}$ y $\boldsymbol{S}$ un sistema de $\mathcal{G}$. Son equivalentes

(i) $\boldsymbol{S}$ es una base de $\mathcal{G}$.

(ii) $\mathfrak{l}_{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{S})$ es una base de $\mathfrak{l}_{\boldsymbol{B}}(\mathcal{G})$.

(iii) $\boldsymbol{S}$ es libre y un sistema generador de $\mathcal{G}$.

(iv) $\boldsymbol{S}$ es un sistema generador de $\mathcal{G}$ con $\dim \mathcal{G}$ vectores.

(v) $\boldsymbol{S}$ es un sistema libre con $\dim \mathcal{G}$ vectores.

(vi)] Cada elemento de $\mathcal{G}$ se puede expresar de forma única como una combinación lineal de $\boldsymbol{S}$.

(vii) $\boldsymbol{S}$ es libre y para cada $\boldsymbol{x} \in \mathcal{G}$, el sistema formado por los vectores de $\boldsymbol{S}$ más $\boldsymbol{x}$ es ligado.

Demostración:
◁

Corolario 10.5.27 Sean $\mathcal{V}$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita, $\boldsymbol{B}$ una base de $\mathcal{V}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ y $\mathcal{H}$ subespacios de $\mathcal{V}$. Se verifican

1) $\dim \mathcal{F} = \dim \mathfrak{l}_{\boldsymbol{B}}(\mathcal{F})$.

2) $\dim \mathcal{F} \leq \dim \mathcal{V}$.

3) $\mathfrak{l}_{\boldsymbol{B}}(\mathcal{F} + \mathcal{G}) = \mathfrak{l}_{\boldsymbol{B}}(\mathcal{F}) + \mathfrak{l}_{\boldsymbol{B}}(\mathcal{G})$.

4) $\mathfrak{l}_{\boldsymbol{B}}(\mathcal{F} \cap \mathcal{G}) = \mathfrak{l}_{\boldsymbol{B}}(\mathcal{F}) \cap \mathfrak{l}_{\boldsymbol{B}}(\mathcal{G})$.

5) $\mathfrak{F} \oplus \mathfrak{G} \Longrightarrow \mathfrak{l}_{\boldsymbol{B}}(\mathfrak{F}) \oplus \mathfrak{l}_{\boldsymbol{B}}(\mathfrak{G})$.

6) $\dim \mathfrak{F} + \dim \mathfrak{G} = \dim(\mathfrak{F} + \mathfrak{G}) + \dim(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{G})$.

7) $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{G} \Longrightarrow \dim \mathfrak{F} \leq \dim \mathfrak{G}$.

8) Si $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{G}$ entonces
$$\mathfrak{F} = \mathfrak{G} \Longleftrightarrow \dim \mathfrak{F} = \dim \mathfrak{G}.$$

9) Si $\boldsymbol{S}$ es una base de $\mathfrak{F}$, entonces
$$\boldsymbol{T} \text{ es base de } \mathfrak{F} \Longleftrightarrow \exists \, \mathsf{P} \text{ inversible } / \, \mathsf{P}\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{T}_{\boldsymbol{B}}.$$

10) Si $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{G}$ y $\boldsymbol{S}$ es una base de $\mathfrak{F}$, entonces existe una base de $\mathfrak{G}$ cuyos primeros vectores son los vectores de $\boldsymbol{S}$.

11) $\mathfrak{F}$ es un suplementario de $\mathfrak{G}$ en $\mathfrak{H}$ si y sólo si $\mathfrak{l}_{\boldsymbol{B}}(\mathfrak{F})$ es un suplementario de $\mathfrak{l}_{\boldsymbol{B}}(\mathfrak{G})$ en $\mathfrak{l}_{\boldsymbol{B}}(\mathfrak{H})$.

12) Si $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$, siempre existe al menos un suplementario de $\mathfrak{F}$ en $\mathfrak{H}$.

$\triangleleft$

Definición 10.5.28 Sean $\mathcal{V}$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita, $\boldsymbol{B}$ una base de $\mathcal{V}$ y $\mathfrak{G}$ un subespacio de $\mathcal{V}$. Llamaremos *ecuaciones implícitas* de $\mathfrak{G}$ en la base $\boldsymbol{B}$ a un sistema de ecuaciones implícitas de $\mathfrak{l}_{\boldsymbol{B}}(\mathfrak{G})$. $\triangleleft$

Definición 10.5.29 Sean $\mathcal{V}$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita, $\boldsymbol{B}$ una base de $\mathcal{V}$ y $\mathfrak{G}$ un subespacio de $\mathcal{V}$. Llamaremos *ecuaciones paramétricas* de $\mathfrak{G}$ en la base $\boldsymbol{B}$ a un conjunto de ecuaciones paramétricas de $\mathfrak{l}_{\boldsymbol{B}}(\mathfrak{G})$. $\triangleleft$

10.5.6 Aplicaciones lineales

Definición 10.5.30 Sean $n, n' \in \mathbb{N}$, $\mathcal{V}$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión n, $\mathcal{V}'$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión n', $\boldsymbol{B}$ una base de $\mathcal{V}$, $\boldsymbol{B}'$ una base de $\mathcal{V}'$ y $\mathsf{f} : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}'$ una aplicación lineal.

1) Llamaremos *transformación lineal asociada* a f en las bases $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{B}'$ y la denotaremos por $\mathfrak{l}_{\mathsf{f};\boldsymbol{B},\boldsymbol{B}'}$ a la aplicación lineal de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^{n'}$,
$$\mathfrak{l}_{\mathsf{f};\boldsymbol{B},\boldsymbol{B}'} = \mathfrak{l}_{\boldsymbol{B}'}^{-1} \circ \mathsf{f} \circ \mathfrak{l}_{\boldsymbol{B}}$$

2) Llamaremos *matriz asociada* a f en las bases $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{B}'$ y la denotaremos por $\mathsf{f}_{\boldsymbol{B}'}^{\boldsymbol{B}}$ a la matriz $n' \times n$ de la transformación lineal $\mathfrak{l}_{\mathsf{f};\boldsymbol{B},\boldsymbol{B}'}$.

◁

Proposición 10.5.31 Sean $\mathcal{V}$, $\mathcal{V}'$ $\mathbb{R}$-espacios vectoriales de dimensión finita, $\boldsymbol{B}$ una base de $\mathcal{V}$, $\boldsymbol{B}'$ una base de $\mathcal{V}'$ y $\mathsf{f} : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}'$ una aplicación lineal. Se tiene que

$$\mathsf{f}^{\boldsymbol{B}}_{\boldsymbol{B}'} = \mathsf{f}(\boldsymbol{B})_{\boldsymbol{B}'}.$$

◁

Proposición 10.5.32 Sean $n, n' \in \mathbb{N}$, $\mathcal{V}$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión n, $\mathcal{V}'$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión n', $\boldsymbol{B}$ una base de $\mathcal{V}$, $\boldsymbol{B}'$ una base de $\mathcal{V}'$ y $\mathsf{f} : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}'$ una aplicación lineal. La transformación asociada $\mathfrak{l}_{\mathsf{f};\boldsymbol{B},\boldsymbol{B}'}$ es la única aplicación lineal de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^{n'}$ que hace conmutativo el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc} & \mathcal{V} & \xrightarrow{\mathsf{f}} & \mathcal{V}' & \\ \mathfrak{l}_{\boldsymbol{B}} & \downarrow & & \downarrow & \mathfrak{l}_{\boldsymbol{B}'} \\ & \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\mathfrak{l}_{\mathsf{f};\boldsymbol{B},\boldsymbol{B}'}} & \mathbb{R}^{n'} & \end{array}$$

es decir,

$$\mathfrak{l}_{\mathsf{f};\boldsymbol{B},\boldsymbol{B}'} \circ \mathfrak{l}_{\boldsymbol{B}} = \mathfrak{l}_{\boldsymbol{B}'} \circ \mathsf{f}.$$

◁

Proposición 10.5.33 Sean $n, n' \in \mathbb{N}$, $\mathcal{V}$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión n, $\mathcal{V}'$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión n', $\boldsymbol{B}$ una base de $\mathcal{V}$, $\boldsymbol{B}'$ una base de $\mathcal{V}'$ y $\mathsf{f} : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}'$ una aplicación lineal. La matriz $\mathsf{f}^{\boldsymbol{B}}_{\boldsymbol{B}'}$ es la única matriz $n' \times n$ que verifica que

$$\mathsf{f}^{\boldsymbol{B}}_{\boldsymbol{B}'} \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{B}} = \mathsf{f}(\boldsymbol{x})_{\boldsymbol{B}'},\ \forall\, \boldsymbol{x} \in \mathcal{V}.$$

◁

Proposición 10.5.34 [Cambio de base]
Sean $n, n' \in \mathbb{N}$, $\mathcal{V}$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión n, $\mathcal{V}'$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión n', $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{S}$ dos bases de $\mathcal{V}$, $\boldsymbol{B}'$, $\boldsymbol{S}'$ dos bases de $\mathcal{V}'$ y $\mathsf{f} : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}'$ una aplicación lineal. Tenemos

$$\mathsf{f}^{\boldsymbol{S}}_{\boldsymbol{S}'} = \boldsymbol{B}'_{\boldsymbol{S}'} \mathsf{f}^{\boldsymbol{B}}_{\boldsymbol{B}'} \boldsymbol{S}_{\boldsymbol{B}}.$$

◁

Definición 10.5.35 Sean $n, n' \in \mathbb{N}$, $\mathcal{V}$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión n, $\mathcal{V}'$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión n' y $\mathsf{f} : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}'$ una aplicación lineal. Llamaremos rango de f y lo denotaremos por $\operatorname{rg} \mathsf{f}$ a

$$\operatorname{rg} \mathsf{f} = \dim \operatorname{Img} \mathsf{f}$$

◁

Proposición 10.5.36 Sean $n, n' \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión n, $\boldsymbol{\mathcal{V}'}$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión n', $\boldsymbol{B}$ una base de $\boldsymbol{\mathcal{V}}$, $\boldsymbol{B'}$ una base de $\boldsymbol{\mathcal{V}'}$, $\mathsf{f} : \boldsymbol{\mathcal{V}} \longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{V}'}$ una aplicación lineal, $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ un subespacio de $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ y $\boldsymbol{\mathcal{F}'}$ un subespacio de $\boldsymbol{\mathcal{V}'}$. Se tiene

1) $\mathfrak{l}_{\boldsymbol{B'}}(\mathsf{f}(\boldsymbol{\mathcal{F}})) = \mathfrak{l}_{\mathsf{f};\boldsymbol{B},\boldsymbol{B'}}(\mathfrak{l}_{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{\mathcal{F}}))$.

2) $\mathfrak{l}_{\boldsymbol{B}}(\mathsf{f}^{-1}(\boldsymbol{\mathcal{F}'})) = \mathfrak{l}^{-1}_{\mathsf{f};\boldsymbol{B},\boldsymbol{B'}}(\mathfrak{l}_{\boldsymbol{B'}}(\boldsymbol{\mathcal{F}'}))$.

3) $\mathfrak{l}_{\boldsymbol{B'}}(\operatorname{Img} \mathsf{f}) = \operatorname{Img} \mathfrak{l}_{\mathsf{f};\boldsymbol{B},\boldsymbol{B'}}$.

4) $\mathfrak{l}_{\boldsymbol{B}}(\operatorname{Ker} \mathsf{f}) = \operatorname{Ker} \mathfrak{l}_{\mathsf{f};\boldsymbol{B},\boldsymbol{B'}}$.

5) $\operatorname{rg} \mathsf{f} = \operatorname{rg} \mathfrak{l}_{\mathsf{f};\boldsymbol{B},\boldsymbol{B'}}$.

6) $\operatorname{rg} \mathsf{f} = \operatorname{rg} \mathsf{f}^{\boldsymbol{B}}_{\boldsymbol{B'}}$.

7) $\dim \boldsymbol{\mathcal{V}} = \dim \operatorname{Ker} \mathsf{f} + \dim \operatorname{Img} \mathsf{f}$.

8) f es inyectiva si y sólo si $\mathfrak{l}_{\mathsf{f};\boldsymbol{B},\boldsymbol{B'}}$ es inyectiva.

9) f es sobreyectiva si y sólo si $\mathfrak{l}_{\mathsf{f};\boldsymbol{B},\boldsymbol{B'}}$ es sobreyectiva.

10) f es isomorfismo si y sólo si $\mathfrak{l}_{\mathsf{f};\boldsymbol{B},\boldsymbol{B'}}$ es isomorfismo.

11) f es un isomorfismo si y sólo si $\operatorname{rg} \mathsf{f}^{\boldsymbol{B}}_{\boldsymbol{B'}} = n = n'$.

$\triangleleft$

10.5.7 Diagonalización

Definición 10.5.37 Sean $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita y f un endomorfismo de $\boldsymbol{\mathcal{V}}$. Diremos que f es diagonalizable si existe una base $\boldsymbol{B}$ de $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ tal que que $\mathsf{f}^{\boldsymbol{B}}_{\boldsymbol{B}}$ es una matriz diagonal. $\triangleleft$

Proposición 10.5.38 Sean $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita $\boldsymbol{B}$ una base de $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ y f un endomorfismo de $\boldsymbol{\mathcal{V}}$. Son equivalentes

(i) f es diagonalizable.

(ii) $\mathfrak{l}_{\mathsf{f};\boldsymbol{B},\boldsymbol{B}}$ es diagonalizable.

(iii) $\mathsf{f}^{\boldsymbol{B}}_{\boldsymbol{B}}$ es diagonalizable.

Además si se verifican las propiedades anteriores, $\dim \boldsymbol{\mathcal{V}} = n$ y $\boldsymbol{S}$ es una base de $\mathbb{R}^n$ tal que $(\mathfrak{l}_{\mathsf{f};\boldsymbol{B},\boldsymbol{B}})^{\boldsymbol{S}}_{\boldsymbol{S}} = \mathsf{D}$ con D matriz diagonal, entonces $\boldsymbol{T} = \mathfrak{l}^{-1}_{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{S})$ es una base de $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ tal que $\mathsf{f}^{\boldsymbol{T}}_{\boldsymbol{T}} = \mathsf{D}$. $\triangleleft$

10.6 Ejercicios

Ejercicio 10.1 Sea $\mathfrak{F}$ el conjunto de todas las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ con las operaciones de suma de funciones y producto de escalar por función habituales. Probar que con esas operaciones, $\mathfrak{F}$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial. Determinar cuáles de los siguientes conjuntos son subespacios de $\mathfrak{F}$

a) $\mathcal{G}_1 = \{f \in \mathfrak{F} \,/\, f(0) = 0\}$.

b) $\mathcal{G}_2 = \{f \in \mathfrak{F} \,/\, f(0) = f(1)\}$.

c) $\mathcal{G}_3 = \{f \in \mathfrak{F} \,/\, \exists\, f'' \text{ y } f''(0) = 0\}$.

d) $\mathcal{G}_4 = \{f \in \mathfrak{F} \,/\, \exists\, m, n \in \mathbb{Z} \text{ con } f(x) = mx + n,\ \forall\, x \in \mathbb{R}\}$.

e) $\mathcal{G}_5 = \{f \in \mathfrak{F} \,/\, f(0)^2 + f(1)^2 = 0\}$.

f) $\mathcal{G}_6 = \{f \in \mathfrak{F} \,/\, f(x) = f(-x),\ \forall\, x \in \mathbb{R}\}$.

g) $\mathcal{G}_7 = \{f \in \mathfrak{F} \,/\, f(x) = -f(-x),\ \forall\, x \in \mathbb{R}\}$.

Probar que $\mathfrak{F} = \mathcal{G}_6 \oplus \mathcal{G}_7$.

Ejercicio 10.2 Sea

$$\mathfrak{F} = \{(z, \bar{z}) \,/\, z \in \mathbb{C}\}\,.$$

Probar que $\mathfrak{F}$ es un subespacio del $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{C}^2$. Determinar su dimensión y una base.

Ejercicio 10.3 Sea $\mathcal{V}$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y $[\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_3}, \boldsymbol{a_4}]$ un sistema libre de $\mathcal{V}$.

a) Probar que el sistema $[\boldsymbol{a_1} + \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_2} + \boldsymbol{a_3}, \boldsymbol{a_3} + \boldsymbol{a_1}]$ es también libre.

b) Estudiar si es libre el sistema $[\boldsymbol{a_1} + \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_2} + \boldsymbol{a_3}, \boldsymbol{a_3} + \boldsymbol{a_4}, \boldsymbol{a_4} + \boldsymbol{a_1}]$

Ejercicio 10.4 Sea $\mathcal{V}$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y $[\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_3}, \boldsymbol{a_4}]$ un sistema libre de $\mathcal{V}$. Se consideran los sistemas

$$\begin{aligned} \boldsymbol{S} &= [\boldsymbol{a_1} - \boldsymbol{a_2} + \boldsymbol{a_3}, \boldsymbol{a_1} + \boldsymbol{a_2}, 3\boldsymbol{a_1} + \boldsymbol{a_2} + \boldsymbol{a_3}] \\ \boldsymbol{T} &= [-\boldsymbol{a_1} - \boldsymbol{a_3} + \boldsymbol{a_4}, \boldsymbol{a_2} + \boldsymbol{a_3} + \boldsymbol{a_4}, \boldsymbol{a_1} + 2\boldsymbol{a_2} - \boldsymbol{a_3}]. \end{aligned}$$

Estudiar si la suma de los subespacios $\langle \boldsymbol{S} \rangle + \langle \boldsymbol{T} \rangle$ es directa.

Ejercicio 10.5 Sea $\mathbb{R}_3[x]$ el espacio de los polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual que 3. Probar que

$$\mathcal{F} = \{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] \,/\, xp'(x) - 2p(x) = 0\}$$

es un subespacio de $\mathbb{R}_3[x]$ y calcular su dimensión y una base.

Ejercicio 10.6 Sea $\mathcal{S}$ el conjunto de las aplicaciones de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{R}$ con las operaciones

$$+ \to \left\{ \begin{array}{rl} f+g : \mathbb{N} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ n & \longmapsto f(n)+g(n) \end{array} \right.$$
$$\cdot \to \left\{ \begin{array}{rl} \alpha f : \mathbb{N} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ n & \longmapsto \alpha f(n) \end{array} \right.$$

donde $\alpha \in \mathbb{R}$ y $f, g \in \mathcal{S}$.

a) Probar que $(\mathcal{S}, +, \dot{)}$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

b) Probar que

$$\mathcal{F} = \{f \in \mathcal{S} \,/\, f(n+2) + f(n+1) - 6f(n) = 0,\ \forall\, n \in \mathbb{N}\},$$

es un subespacio de $\mathcal{S}$.

c) Probar que

$$\begin{array}{rl} \mathbf{h} : \mathcal{V} & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ f & \longmapsto (f(1), f(2)) \end{array},$$

es una aplicación lineal sobre pero no inyectiva.

d) Probar que la restricción $\mathbf{h}|_{\mathcal{F}}$ es un isomorfismo.

e) Hallar una base y la dimensión de $\mathcal{F}$.

f) Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ se considera el elemento de $\mathcal{S}$

$$\begin{array}{rl} f_\alpha : \mathbb{N} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ n & \longmapsto \alpha^n \end{array}.$$

Encontrar dos valores $\alpha, \beta \in \mathbb{R} - \{0\}$ tales que $f_\alpha, f_\beta \in \mathcal{F}$ y probar que el sistema $[f_\alpha, f_\beta]$ es una base de $\mathcal{F}$.

g) si $f \in \mathcal{F}$, encontrar una expresión

$$f(n) = \phi(f(1), f(2), n),\ \forall\, n \in \mathbb{N} \text{ con } n > 2.$$

Ejercicio 10.7 Sea M el conjunto de las matrices reales 2×2 con su estructura habitual de $\mathbb{R}$-espacio vectorial. Construimos la aplicación

$$\begin{array}{rl} \mathbf{t}: & M \longrightarrow \mathbb{R} \\ \mathsf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} & \longmapsto a_{11} + a_{22} \end{array}$$

a) Probar que $\mathbf{t}$ es lineal.

b) Probar que $\mathbf{t}(\mathsf{AB}) = \mathbf{t}(\mathsf{BA})$, $\forall\, \mathsf{A}, \mathsf{B} \in M$.

c) Probar que en general $\mathbf{t}(\mathsf{AB}) \neq \mathbf{t}(\mathsf{A})\mathbf{t}(\mathsf{B})$.

d) Probar que si $\mathsf{A} \in M$,

$$\mathsf{A}^2 - \mathbf{t}(\mathsf{A})\mathsf{A} + (\det \mathsf{A})\mathrm{I}_2 = \mathsf{0}_{2\times 2}.$$

Utilizar esta fórmula para obtener una expresión de A^{-1} cuando $\det \mathsf{A} \neq 0$.

e) Sea $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Calcular A^{-1} con la fórmula del apartado anterior.

Ejercicio 10.8 Consideramos $\mathbb{R}_2[x]$ como el espacio de polinomios en x de grado menor o igual que 2 con coeficientes reales, con su estructura habitual de espacio vectorial, la base

$$\boldsymbol{B} = [x^2, x, 1]$$

de $\mathbb{R}_2[x]$ y la aplicación

$$\begin{array}{rl} \mathbf{d}: & \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}_2[x] \\ p(x) = ax^2 + bx + c & \longmapsto p'(x) = 2ax + b \end{array}.$$

a) Probar que $\mathbf{d}$ es una aplicación lineal.

b) Calcular $\mathbf{d}_{\boldsymbol{B}}^{\boldsymbol{B}}$ y $(\mathbf{d}^2)_{\boldsymbol{B}}^{\boldsymbol{B}}$.

c) Calcular $\operatorname{Img} \mathbf{d}$, $\operatorname{Img} \mathbf{d}^2$, $\operatorname{Ker} \mathbf{d}$, $\operatorname{Ker} \mathbf{d}^2$.

d) Sea el endomorfismo de $\mathbb{R}_2[x]$ dado por $\mathsf{f} = \alpha \mathbf{d}^2 + \beta \mathbf{d} + \gamma \mathbf{I}$, donde $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Calcular $\mathsf{f}_{\boldsymbol{B}}^{\boldsymbol{B}}$.

e) Sea

$$\boldsymbol{B'} = [x^2 + x + 1, x + 1, 1].$$

Probar que $\boldsymbol{B'}$ es una base de $\mathbb{R}_2[x]$ y calcular $\mathbf{d}_{\boldsymbol{B'}}^{\boldsymbol{B'}}$.

Ejercicio 10.9 Sean $\alpha \in \mathbb{R}$, M el conjunto de las matrices reales 2×2 con su estructura habitual de $\mathbb{R}$-espacio vectorial y la aplicación.

$$\begin{aligned} \mathbf{f}: \quad & \mathbb{R}^4 \longrightarrow M \\ (x,y,z,t) & \longmapsto \begin{pmatrix} z-t & z+t \\ (3-\alpha)(x-y) & (3-\alpha)(x+y) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

y sean los sistemas de $\mathbb{R}^4$ y M respectivamente

$$\boldsymbol{S} = [(1,1,0,0), (1,-1,0,0), (0,0,1,1), (0,0,1,-1)],$$
$$\boldsymbol{S'} = [\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}].$$

a) Comprobar que $\boldsymbol{S}$ es base de $\mathbb{R}^4$ y que $\boldsymbol{S'}$ es base de M.

b) Calcular $\mathbf{f}^{\boldsymbol{S}}_{\boldsymbol{S'}}$.

c) Obtener los valores de α para los que $\mathbf{f}$ es inversible. Obtener $\mathbf{f}^{-1}$ cuando $\alpha = 2$.

d) Calcular $\operatorname{Ker}\mathbf{f}$ y $\operatorname{Img}\mathbf{f}$ en los casos en los que $\mathbf{f}$ no sea inversible. Calcular suplementarios para cada uno de los subespacios anteriores.

e) Obtener la imagen inversa de

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},$$

según los valores de α.

Ejercicio 10.10 Sean $\alpha \in \mathbb{R}$, $\mathbb{R}_2[x]$ como el espacio de polinomios en x de grado menor o igual que 2 con coeficientes reales, con su estructura habitual de espacio vectorial y $\mathbf{f}$ la aplicación

$$\begin{aligned} \mathbf{f}: \mathbb{R}_2[x] & \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ p(x) & \longmapsto (p(0), p(1), \alpha p(1)) \end{aligned}.$$

a) Probar que $\mathbf{f}$ es lineal.

b) Calcular la matriz asociada a $\mathbf{f}$ en las bases $\boldsymbol{B} = [1, x, x^2]$ de $\mathbb{R}_2[x]$ y canónica de $\mathbb{R}^3$.

c) Calcular bases de $\operatorname{Img}\mathbf{f}$ y $\operatorname{Ker}\mathbf{f}$ según los valores de α.

d) Calcular $\mathbf{f}^{-1}(\{(1,1,1)\})$ según los valores de α.

Ejercicio 10.11 Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y L el $\mathbb{R}$-espacio vectorial de las aplicaciones lineales de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}$. Se considera el sistema $\boldsymbol{B} = [\mathsf{f}_1, \mathsf{f}_2, \mathsf{f}_3]$ de L, donde

$$\begin{aligned} \mathsf{f}_1(x,y,z) &= ax + 2bz \\ \mathsf{f}_2(x,y,z) &= 5x + 2y \\ \mathsf{f}_3(x,y,z) &= bx - 2y + bz, \end{aligned}$$

Para $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

a) Calcular los valores de a y b para los que $\boldsymbol{B}$ es base de L.

b) Sea f el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ dado por

$$\mathsf{f}(\boldsymbol{x}) = (\mathsf{f}_1(\boldsymbol{x}), \mathsf{f}_2(\boldsymbol{x}), \mathsf{f}_3(\boldsymbol{x})).$$

Calcular los valores de a y b para que $(b, 2a - b, -2a + b) \in \operatorname{Img} \mathsf{f}$.

c) Se considera el subespacio de $\mathbb{R}^3$

$$\mathfrak{F} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x = y = 0\right\}.$$

Hallar la dimensión de $\mathsf{f}^{-1}(\mathfrak{F})$ según los valores de a y b.

Ejercicio 10.12 Sea $n \in \mathbb{N}$ y M el $\mathbb{R}$-espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden n. Sea la aplicación

$$\begin{aligned} \mathsf{f} : M &\longrightarrow M \\ \mathrm{A} &\longmapsto (\operatorname{tr} \mathrm{A})\, \mathrm{I}_n \end{aligned}.$$

Probar que f es un endomorfismo.

Calcular los valores propios de f y estudiar si es diagonalizable.

Para $n = 2$, buscar si existe una base de M en la que f tenga una matriz diagonal.

Ejercicio 10.13 Sea M el $\mathbb{R}$-espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden 2 y la aplicación

$$\begin{aligned} \mathsf{f} : \quad M &\longrightarrow M \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} a+b & a-c \\ 2a & -c \end{pmatrix} \end{aligned}.$$

Se consideran los sistemas de M

$$\begin{aligned} \boldsymbol{S} &= [\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}] \\ \boldsymbol{T} &= [\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}]. \end{aligned}$$

a) Probar que $\mathbf{f}$ es lineal.

b) Probar que $\mathbf{S}$ y $\mathbf{T}$ son bases de M. Construir $\mathbf{f}_{\boldsymbol{S}}^{\boldsymbol{S}}$ y $\mathbf{f}_{\boldsymbol{T}}^{\boldsymbol{T}}$.

c) Obtener ecuaciones implícitas de $\operatorname{Img}\mathbf{f}$ y de $\operatorname{Ker}\mathbf{f}$ en $\boldsymbol{S}$.

d) Estudiar si se tiene $\operatorname{Ker}\mathbf{f} + \operatorname{Img}\mathbf{f} = \operatorname{Ker}\mathbf{f} \oplus \operatorname{Img}\mathbf{f}$.

e) Calcular suplementarios en M de $\operatorname{Img}\mathbf{f}$ y de $\operatorname{Ker}\mathbf{f}$.

f) Estudiar si $\mathbf{f}$ es diagonalizable.

Ejercicio 10.14 Sobre espacio vectorial $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ Se considera la aplicación de derivación

$$\begin{aligned} \mathbf{d} : \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \\ f &\longmapsto f' \end{aligned} .$$

Sea $\mathfrak{F}$ el subespacio de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ generado por el sistema $[\cos x, \operatorname{sen} x]$.

a) Probar que $\mathbf{d}$ es una aplicación lineal.

b) Probar que $\mathbb{R}[x]$ es un subespacio de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

c) Calcular el núcleo y la imagen de la restricción de $\mathbf{d}$ a $\mathbb{R}[x]$.

d) Calcular el núcleo y la imagen de la restricción de $\mathbf{d}$ a $\mathfrak{F}$.

e) ¿La aplicación

$$\begin{aligned} \phi : \mathfrak{F} &\longrightarrow \mathfrak{F} \\ f &\longmapsto \mathbf{d}(f) \end{aligned}$$

está bien definida? ¿Es diagonalizable?

Ejercicio 10.15 Sean $a, b \in \mathbb{R}$, la matriz

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix},$$

$\mathfrak{M}$ el $\mathbb{R}$-espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden 2 y las aplicaciones

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{\mathsf{A}} : \mathfrak{M} &\longrightarrow \mathfrak{M} \\ \mathsf{X} &\longmapsto \mathsf{A}^t\mathsf{X} - \mathsf{X}\mathsf{A} \end{aligned} ,$$

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_{\mathsf{A}} : \mathfrak{M} &\longrightarrow \mathfrak{M} \\ \mathsf{X} &\longmapsto \mathsf{X}^t\mathsf{A} - \mathsf{A}\mathsf{X} \end{aligned} .$$

a) Probar que $\mathbf{f}_{\mathsf{A}}$ y $\mathbf{g}_{\mathsf{A}}$ son endomorfismos.

b) Estudiar para que valores de a y b $\mathbf{f}_{\mathsf{A}}$ y $\mathbf{g}_{\mathsf{A}}$ son diagonalizables. Calcular matrices de paso cuando lo sean.

Ejercicio 10.16 Sea $\mathcal{M}$ el espacio de matrices reales 3×3. Diremos que una matriz $\left(a_{ij}\right) \in \mathcal{M}$ es mágica, si existe $k \in \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{aligned} a_{11} + a_{22} + a_{33} &= k, \\ a_{13} + a_{22} + a_{31} &= k, \\ a_{i1} + a_{i2} + a_{i3} &= k, \ i = 1, 2, 3, \\ a_{j1} + a_{j2} + a_{j3} &= k, \ j = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Sea el subconjunto de $\mathcal{M}$

$$\mathcal{F} = \{\mathsf{A} \in \mathcal{M} \,/\, \mathsf{A} \text{ es mágica y simétrica .}\}$$

Sea la matriz

$$\mathsf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Probar que $\mathcal{F}$ es un subespacio de $\mathcal{M}$. Calcular su dimensión y una base.

b) Probar que la aplicación

$$\begin{aligned} \mathbf{f} : \mathcal{F} &\longrightarrow \mathcal{F} \\ \mathsf{A} &\longmapsto \mathsf{BA} \end{aligned},$$

está bien definida y es una aplicación lineal.

c) Calcular $\operatorname{rg} \mathbf{f}$ y bases para $\operatorname{Img} \mathbf{f}$ y $\operatorname{Ker} \mathbf{f}$.

d) Probar que $\mathcal{M} = \operatorname{Img} \mathbf{f} \oplus \operatorname{Ker} \mathbf{f}$.

e) Estudiar si $\mathbf{f}$ es diagonalizable y en caso de que lo sea, calcular una base de $\mathbf{f}$ en la que $\mathbf{f}$ tenga una matriz diagonal.

Ejercicio 10.17 Se considera el espacio vectorial $\mathbb{R}_2[x]$.

a) Probar que existe un único $\mathbf{f}$ un endomorfismo de $\mathbb{R}_2[x]$ cumpliendo las siguientes condiciones

- 1 es valor propio de $\mathbf{f}$ y

$$\mathcal{E}_{\mathbf{f}}(1) = \{p \in \mathbb{R}_2[x] \,/\, p(0) = 0, \ p'(0) - p''(0)/2 = 0\}.$$

- 2 es valor propio de f y

$$\mathcal{E}_{\mathsf{f}}(2) = \{p \in \mathbb{R}_2[x] \,/\, p'(0) = 0,\ p(0) + p''(0)/2 = 0\}\,.$$

- $\mathsf{f}(1 - 3x - x^2) = 0$.

b) Calcular la matriz A de f en la base $[1, x, x^2]$.

c) Comprobar si $\operatorname{Img}\mathsf{f}$ y $\operatorname{Ker}\mathsf{f}$ forman suma directa.

d) Calcular subespacios suplementarios de $\operatorname{Img}\mathsf{f}$ y de $\operatorname{Ker}\mathsf{f}$.

e) Estudiar si f es diagonalizable y en caso de que lo sea calcular una matriz de paso para la matriz A.

Ejercicio 10.18 Se considera el espacio vectorial $\mathbb{R}_3[x]$.

a) Probar que existe un único f un endomorfismo de $\mathbb{R}_3[x]$ cumpliendo las siguientes condiciones

- El único espacio propio de f es $\mathcal{F} = \langle 1, x^2\rangle$.
- $\mathsf{f}^4 + 4\mathsf{f}^3 + 6\mathsf{f}^2 + 4\mathsf{f} + \mathbf{I}_{\mathbb{R}_3[x]} = \mathbf{0}$
- $\mathsf{f}(x) = 1 - 3x + x^2 + x^3$.
- $\mathsf{f}(x^3) = 1 - 4x + x^2 + x^3$.

b) Calcular la matriz A de f en la base $[1, x, x^2, x^3]$ de $\mathbb{R}_3[x]$.

c) Calcular bases y ecuaciones implícitas de $\operatorname{Img}\mathsf{f}$ de $\operatorname{Ker}\mathsf{f}$ y de $\mathsf{f}(\mathcal{F})$, donde

$$\mathcal{F} = \left\{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in \mathbb{R}_3[x] \,/\, a_1 + a_2 = 0,\ a_3 - 2a_0 = 0\right\}.$$

d) Estudiar si f es diagonalizable y en caso de que lo sea calcular una matriz de paso para A.

Ejercicio 10.19 Sea $\mathcal{V}$ el espacio vectorial de las matrices reales simétricas de orden 2. Para cada $a, b \in \mathbb{R}$ se define el endomorfismo

$$\begin{array}{rccc} \mathsf{f}_{ab}: & \mathcal{V} & \longrightarrow & \mathcal{V} \\ & \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} 5x_1 & ax_3 - x_2 \\ ax_3 - x_2 & 3x_1 + bx_3 \end{pmatrix} \end{array}.$$

a) Probar que el sistema

$$\boldsymbol{B} = [\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}]$$

es una base de $\mathcal{V}$.

b) Calcular la matriz de $\mathbf{f}$ en la base $\boldsymbol{B}$.

c) Estudiar para que valores de a y b, $\mathbf{f}$ es diagonalizable y para los casos en que lo sea calcular una matriz de paso de la matriz del apartado anterior.

Capítulo 11

Producto escalar

En este capítulo, trataremos de proporcionar mecanismos que sirvan para *medir* vectores y *condiciones de perpendicularidad* entre vectores.

11.1 Producto escalar y norma

Definición 11.1.1 Sea $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial. Un *producto escalar* sobre $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ es una aplicación

$$\mathsf{f} : \boldsymbol{\mathcal{V}} \times \boldsymbol{\mathcal{V}} \longrightarrow \mathbb{R}$$

verificando las siguientes propiedades

1) $\mathsf{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \mathsf{f}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$, $\forall\, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{\mathcal{V}}$.

2) $\mathsf{f}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = \mathsf{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + \mathsf{f}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$, $\forall\, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{\mathcal{V}}$.

3) $\mathsf{f}(\alpha\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \alpha\mathsf{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall\, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{\mathcal{V}}$.

4) $\mathsf{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) > 0$, $\forall\, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{\mathcal{V}}$, con $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$.

$\triangleleft$

Ejemplo 11.1.2 Sobre $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ conocemos los productos escalares habitualmente utilizados en Física:

$$\begin{array}{rrcl} \cdot : & \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & ((x_1, x_2), (y_1, y_2)) & \longmapsto & x_1 y_1 + x_2 y_2 \\ \cdot : & \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & ((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) & \longmapsto & x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 \end{array}$$

Es un simple ejercicio comprobar que estas fórmulas verifican las propiedades que definen un producto escalar según 11.1.1. Generalizando esta idea a $\mathbb{R}^n$ tenemos la siguiente definición. $\triangleleft$

Definición 11.1.3 Sea $n \in \mathbb{N}$ la aplicación

$$\begin{aligned} \cdot : \qquad\qquad\qquad \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ ((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) &\longmapsto x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n \end{aligned}$$

es un producto escalar sobre $\mathbb{R}^n$ al que llamaremos *producto escalar habitual* sobre $\mathbb{R}^n$. ◁

Proposición 11.1.4 Sean $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y $\mathbf{f}$ un producto escalar sobre $\boldsymbol{\mathcal{V}}$. Se verifican

1) $\mathbf{f}(\alpha_1 \boldsymbol{x_1} + \cdots + \alpha_s \boldsymbol{x_s}, \boldsymbol{y}) = \alpha_1 \mathbf{f}(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{y}) + \cdots + \alpha_s \mathbf{f}(\boldsymbol{x_s}, \boldsymbol{y})$,
$\forall\, \alpha_1, \ldots, \alpha_s \in \mathbb{R}$, $\forall\, \boldsymbol{x_1}, \ldots, \boldsymbol{x_s}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{\mathcal{V}}$.

2) $\mathbf{f}(\boldsymbol{x}, \alpha_1 \boldsymbol{y_1} + \cdots + \alpha_s \boldsymbol{y_s}) = \alpha_1 \mathbf{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y_1}) + \cdots + \alpha_s \mathbf{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y_s})$,
$\forall\, \alpha_1, \ldots, \alpha_s \in \mathbb{R}$, $\forall\, \boldsymbol{y_1}, \ldots, \boldsymbol{y_s}, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{\mathcal{V}}$.

◁

Definición 11.1.5 Un *espacio euclídeo* es un par $(\boldsymbol{\mathcal{V}}, \mathbf{f})$ donde $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y $\mathbf{f}$ un producto escalar sobre $\boldsymbol{\mathcal{V}}$. ◁

Definición 11.1.6 Llamaremos estructura de *espacio euclídeo habitual* sobre $\mathbb{R}^n$ a la inducida por el producto escalar habitual de $\mathbb{R}^n$. ◁

11.1.1 Norma

Definición 11.1.7 Sea $(\boldsymbol{\mathcal{V}}, \mathbf{f})$ un espacio euclídeo. Llamaremos *norma* a la aplicación

$$\begin{aligned} ||\cdot|| : \boldsymbol{\mathcal{V}} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \boldsymbol{x} &\longmapsto ||\boldsymbol{x}|| = \sqrt{\mathbf{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})} \end{aligned}$$

◁

Proposición 11.1.8 Sea $(\boldsymbol{\mathcal{V}}, \mathbf{f})$ un espacio euclídeo. La norma verifica las siguientes propiedades

1) $||\boldsymbol{x}|| \geq 0$, $\forall\, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{\mathcal{V}}$.

2) $||\boldsymbol{x}|| = 0 \Longleftrightarrow \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.

3) $||\alpha \boldsymbol{x}|| = |\alpha|\, ||\boldsymbol{x}||$, $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall\, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{\mathcal{V}}$.

4) $||\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}|| \leq ||\boldsymbol{x}|| + ||\boldsymbol{y}||$, $\forall\, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{\mathcal{V}}$.

◁

11.1.2 Producto escalar y sistemas

Definición 11.1.9 Sean $(\boldsymbol{\mathcal{V}}, \mathsf{f})$ un espacio euclídeo y $\boldsymbol{S} = [\boldsymbol{a_1}, \ldots, \boldsymbol{a_s}]$ un sistema de $\boldsymbol{\mathcal{V}}$. Llamaremos *matriz de Gram* del sistema $\boldsymbol{S}$ y la denotaremos por $\mathsf{f}_{\boldsymbol{S}}$ a la matriz $s \times s$

$$\mathsf{f}_{\boldsymbol{S}} = \begin{pmatrix} \mathsf{f}(\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_1}) & \mathsf{f}(\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}) & \cdots & \mathsf{f}(\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_s}) \\ \mathsf{f}(\boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_1}) & \mathsf{f}(\boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_2}) & \cdots & \mathsf{f}(\boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_s}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathsf{f}(\boldsymbol{a_s}, \boldsymbol{a_1}) & \mathsf{f}(\boldsymbol{a_s}, \boldsymbol{a_2}) & \cdots & \mathsf{f}(\boldsymbol{a_s}, \boldsymbol{a_s}) \end{pmatrix}$$

◁

Proposición 11.1.10 Sean $(\boldsymbol{\mathcal{V}}, \mathsf{f})$ un espacio euclídeo y $\boldsymbol{S} = [\boldsymbol{a_1}, \ldots, \boldsymbol{a_s}]$ un sistema de $\boldsymbol{\mathcal{V}}$. Se verifican

1) $\mathsf{f}_{\boldsymbol{S}}$ es una matriz simétrica.

2) $\mathsf{f}_{\boldsymbol{S}}$ es la única matriz tal que $\forall\, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \langle \boldsymbol{S} \rangle$ y $\forall\, \alpha_1, \ldots, \alpha_s, \beta_1, \ldots, \beta_s \in \mathbb{R}$ con $\boldsymbol{x} = \alpha_1 \boldsymbol{a_1} + \cdots + \alpha_s \boldsymbol{a_s}$ y $\boldsymbol{y} = \beta_1 \boldsymbol{a_1} + \cdots + \beta_s \boldsymbol{a_s}$, se tiene que

$$\mathsf{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \begin{pmatrix} \beta_1 & \ldots & \beta_s \end{pmatrix} \mathsf{f}_{\boldsymbol{S}} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_s \end{pmatrix}.$$

3) $\mathsf{f}_{\boldsymbol{S}}$ es inversible si y solo si $\boldsymbol{S}$ es libre.

4) $\operatorname{rg} \boldsymbol{S} = \operatorname{rg} \mathsf{f}_{\boldsymbol{S}}$.

◁

11.2 Ortogonalidad

11.2.1 Vectores y sistemas ortogonales

Definición 11.2.1 Sean $(\boldsymbol{\mathcal{V}}, \mathsf{f})$ un espacio euclídeo y $\boldsymbol{S}$ un sistema de $\boldsymbol{\mathcal{V}}$.

1) Diremos que dos vectores $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{\mathcal{V}}$ son *ortogonales* si $\mathsf{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$ y lo denotaremos por $\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{y}$.

2) Diremos que $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{\mathcal{V}}$ es *ortogonal* al sistema $\boldsymbol{S}$ y lo denotaremos por $\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{S}$ si $\boldsymbol{x}$ y cada vector de $\boldsymbol{S}$ son ortogonales.

3) Diremos dos sistemas $\boldsymbol{S}$ y $\boldsymbol{T}$ son *ortogonales* $\boldsymbol{S} \perp \boldsymbol{T}$ si cada par de vectores formado por un vector de $\boldsymbol{S}$ y un vector de $\boldsymbol{T}$, son ortogonales.

$\triangleleft$

Teorema 11.2.2 [Teorema de Pitágoras]
Sean $(\mathcal{V}, \mathsf{f})$ un espacio euclídeo y $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathcal{V}$ con $\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{y}$. Entonces

$$||\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}||^2 = ||\boldsymbol{x}||^2 + ||\boldsymbol{y}||^2 .$$

$\triangleleft$

Definición 11.2.3 Sea $(\mathcal{V}, \mathsf{f})$ un espacio euclídeo. Diremos que un sistema $\boldsymbol{S} = [\boldsymbol{a_1}, \ldots, \boldsymbol{a_n}]$ de $\mathcal{V}$ es *ortogonal* si

1) $\boldsymbol{a_i} \neq \mathbf{0},\ i = 1, \ldots, n$ y

2) $\boldsymbol{a_i} \perp \boldsymbol{a_j},\ i, j = 1, \ldots, n,\ i \neq j$.

$\triangleleft$

Proposición 11.2.4 Sea $(\mathcal{V}, \mathsf{f})$ un espacio euclídeo. Todo sistema ortogonal de $\mathcal{V}$ es libre. $\triangleleft$

Definición 11.2.5 Sea $(\mathcal{V}, \mathsf{f})$ un espacio euclídeo. Diremos que un sistema $\boldsymbol{S} = [\boldsymbol{a_1}, \ldots, \boldsymbol{a_n}]$ de $\mathcal{V}$ es *ortonormal* si

1) es ortogonal y

2) $||\boldsymbol{a_i}|| = 1,\ i = 1, \ldots, n$.

$\triangleleft$

Proposición 11.2.6 Sea $(\mathcal{V}, \mathsf{f})$ un espacio euclídeo. Todo sistema ortonormal de $\mathcal{V}$ es libre. $\triangleleft$

Lema 11.2.7 Sean $(\mathcal{V}, \mathsf{f})$ un espacio euclídeo y $\boldsymbol{S} = [\boldsymbol{a_1}, \ldots, \boldsymbol{a_n}]$ un sistema ortogonal de $\mathcal{V}$. Entonces el sistema

$$[\frac{\boldsymbol{a_1}}{||\boldsymbol{a_1}||}, \ldots, \frac{\boldsymbol{a_n}}{||\boldsymbol{a_n}||}],$$

es ortonormal. $\triangleleft$

Definición 11.2.8 Sean $(\mathcal{V}, \mathsf{f})$ un espacio euclídeo, $\boldsymbol{S} = [\boldsymbol{a_1}, \ldots, \boldsymbol{a_n}]$ un sistema ortonormal de $\mathcal{V}$ y $\boldsymbol{x} \in \mathcal{V}$. Llamaremos *coeficientes de Fourier* de $\boldsymbol{x}$ en $\boldsymbol{S}$ a

$$\mathsf{f}(\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{x}), \ldots, \mathsf{f}(\boldsymbol{a_n}, \boldsymbol{x}).$$

$\triangleleft$

11.2.2 Subespacios ortogonales

Definición 11.2.9 Sean $(\mathcal{V}, \mathsf{f})$ un espacio euclídeo, $\boldsymbol{S}$ un sistema de $\mathcal{V}$ y $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ subespacios de $\mathcal{V}$.

1) Diremos que $\boldsymbol{x} \in \mathcal{V}$ es *ortogonal* al subespacio $\mathcal{F}$ y lo denotaremos por $\boldsymbol{x} \perp \mathcal{F}$ si $\boldsymbol{x}$ y cada vector de $\mathcal{F}$ son ortogonales.

2) Diremos que el sistema $\boldsymbol{S}$ es *ortogonal* al subespacio $\mathcal{F}$ y lo denotaremos por $\boldsymbol{S} \perp \mathcal{F}$ si cada vector de $\boldsymbol{S}$ es ortogonal a $\mathcal{F}$.

3) Diremos que $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ son *ortogonales* si $\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{y}$, $\forall\, \boldsymbol{x} \in \mathcal{F}$, $\forall\, \boldsymbol{y} \in \mathcal{G}$.

4) Llamaremos el *ortogonal* de $\mathcal{F}$, y lo denotaremos por $\mathcal{F}^{\perp}$ a

$$\mathcal{F}^{\perp} = \{\boldsymbol{x} \in \mathcal{V} \,/\, \boldsymbol{x} \perp \mathcal{F}\} = \{\boldsymbol{x} \in \mathcal{V} \,/\, \mathsf{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0,\ \forall\, \boldsymbol{y} \in \mathcal{F}\}\,.$$

5) Llamaremos el *doble ortogonal* de $\mathcal{F}$, y lo denotaremos por $\mathcal{F}^{\perp\perp}$ a

$$\mathcal{F}^{\perp\perp} = (\mathcal{F}^{\perp})^{\perp}.$$

◁

Lema 11.2.10 Sean $(\mathcal{V}, \mathsf{f})$ un espacio euclídeo, $\boldsymbol{S} = [\boldsymbol{a_1}, \ldots, \boldsymbol{a_s}]$ un sistema ortogonal de $\mathcal{V}$ y $\boldsymbol{x} \in \mathcal{V}$. Entonces son equivalentes

(i) $[\boldsymbol{a_1}, \ldots, \boldsymbol{a_s}, \boldsymbol{x}]$ es un sistema ortogonal.

(ii) $\boldsymbol{x} \in \langle \boldsymbol{S} \rangle^{\perp} - \{\boldsymbol{0}\}$.

◁

Proposición 11.2.11 Sean $(\mathcal{V}, \mathsf{f})$ un espacio euclídeo y $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ dos subespacios de $\mathcal{V}$.

1) $\mathcal{F}^{\perp}$ es un subespacio de $\mathcal{V}$.

2) $\mathcal{F} + \mathcal{F}^{\perp} = \mathcal{F} \oplus \mathcal{F}^{\perp}$.

3) $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}^{\perp\perp}$.

4) $\mathcal{F} \perp \mathcal{G} \iff \mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}^{\perp} \iff \mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}^{\perp}$

5) Si $\mathcal{F}$ es finito generado y $\boldsymbol{S}$ es un sistema generador de $\mathcal{F}$, entonces

$$\boldsymbol{x} \in \mathcal{F}^{\perp} \iff \boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{S}.$$

6) Si $\mathcal{F}$ es finito generado y $\boldsymbol{S}$ es un sistema generador de $\mathcal{F}$, entonces

$$\mathcal{F} \perp \mathcal{G} \iff \boldsymbol{S} \perp \mathcal{G}.$$

7) Si $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ son finito generados, $\boldsymbol{S}$ es un sistema generador de $\mathcal{F}$ y $\boldsymbol{T}$ es un sistema generador de $\mathcal{G}$, entonces

$$\mathcal{F} \perp \mathcal{G} \iff \boldsymbol{S} \perp \boldsymbol{T}.$$

$\triangleleft$

11.3 La proyección ortogonal

Corolario 11.3.1 Sean $(\mathcal{V}, \mathsf{f})$ un espacio euclídeo, $\mathcal{F}$ un subespacio de $\mathcal{V}$ y $\boldsymbol{x} \in \mathcal{F} \oplus \mathcal{F}^{\perp}$. Entonces existe un único $\boldsymbol{y} \in \mathcal{F}$ tal que $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \in \mathcal{F}^{\perp}$.
Demostración:
Es una consecuencia inmediata de que la suma de $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}^{\perp}$ sea directa, como se establece en 11.2.11. $\triangleleft$

Definición 11.3.2 Sean $(\mathcal{V}, \mathsf{f})$ un espacio euclídeo, $\mathcal{F}$ un subespacio de $\mathcal{V}$ y $\boldsymbol{x} \in \mathcal{F} \oplus \mathcal{F}^{\perp}$. Llamaremos la *proyección ortogonal* de $\boldsymbol{x}$ sobre $\mathcal{F}$ al único vector $\boldsymbol{y} \in \mathcal{F}$ con $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \in \mathcal{F}^{\perp}$. $\triangleleft$

Teorema 11.3.3 [Caracterización de la proyección ortogonal]
Sean $(\mathcal{V}, \mathsf{f})$ un espacio euclídeo, $\mathcal{F}$ un subespacio de $\mathcal{V}$ y $\boldsymbol{x} \in \mathcal{F} \oplus \mathcal{F}^{\perp}$. Para un vector $\boldsymbol{y} \in \mathcal{F}$ son equivalentes

(i) $\boldsymbol{y}$ es la proyección ortogonal de $\boldsymbol{x}$ sobre $\mathcal{F}$.

(ii) $||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|| < ||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}||\,,\ \forall\, \boldsymbol{z} \in \mathcal{F} - \{\boldsymbol{y}\}$.

(iii) $||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}||^2 < ||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}||^2\,,\ \forall\, \boldsymbol{z} \in \mathcal{F} - \{\boldsymbol{y}\}$.

$\triangleleft$

Lema 11.3.4 Sean $(\mathcal{V}, \mathsf{f})$ un espacio euclídeo, $\boldsymbol{S} = [\boldsymbol{a_1}, \ldots, \boldsymbol{a_s}]$ un sistema ortonormal de $\mathcal{V}$ y $\boldsymbol{x} \in \mathcal{V}$. Entonces

$$\boldsymbol{x} - \sum_{i=1}^{s} \mathsf{f}(\boldsymbol{a_i}, \boldsymbol{x})\boldsymbol{a_i} \in \langle \boldsymbol{S} \rangle^{\perp}$$

$\triangleleft$

Nota 11.3.5 Una de las cosas que quiere decir el lema 11.3.4 es que todo subespacio que admita una base ortonormal admite proyección ortogonal para cualquier vector. Veamos ahora que cualquier espacio finito generado admite una base ortonormal. ◁

Algoritmo 11.3.6 [Método de Gram-Schmidt]

Entrada: $\boldsymbol{S} = [\boldsymbol{b_1}, \ldots, \boldsymbol{b_s}]$ sistema de $\boldsymbol{\mathcal{V}}$.
Salida: $\boldsymbol{T}$ sistema ortonormal de $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ con $\langle \boldsymbol{S} \rangle = \langle \boldsymbol{T} \rangle$.

$i := 1;$
$t := 0;$
$\boldsymbol{S'} = [\ ];$
$\boldsymbol{T} = [\ ];$
while $\boldsymbol{b_i} = \mathbf{0}$ {
    $i := i + 1;$
}
if $i \leq s$ {
    $t := t + 1;$
    $\boldsymbol{a_t} = \boldsymbol{b_i} / \, ||\boldsymbol{b_i}||;$
}
if $i < s$ {
    $\boldsymbol{S'} := [\boldsymbol{b_{i+1}}, \ldots, \boldsymbol{b_s}];$
}
foreach $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{S'}$ {

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} - \sum_{k=1}^{t} \mathsf{f}(\boldsymbol{a_k}, \boldsymbol{x}) \boldsymbol{a_k};$$

    if $\boldsymbol{y} \neq \mathbf{0}$ {
        $t := t + 1;$
        $\boldsymbol{a_t} := \boldsymbol{y} / \, ||\boldsymbol{y}||;$
    }
}
if $t > 0$ {
    $\boldsymbol{T} := [\boldsymbol{a_1}, \ldots, \boldsymbol{a_t}];$
}

La validez de este algoritmo se establece de manera inmediata a partir de 11.3.4 y de 11.2.10. ◁

Ejemplo 11.3.7 Sean $\mathbf{f}$ el producto escalar habitual sobre $\mathbb{R}^4$ y los vectores

$$\boldsymbol{b_1} = (1,1,0,0)\,, \quad \boldsymbol{b_2} = (0,-1,1,1)\,,$$
$$\boldsymbol{b_3} = (1,0,1,1)\,, \quad \boldsymbol{b_2} = (0,0,0,2)\,.$$

Sea $\boldsymbol{S} = [\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_1}]$. Calculemos un sistema ortonormal que genere el mismo subespacio de $\mathbb{R}^4$ que $\boldsymbol{S}$.

Paso 1:

Seleccionamos el primer vector no nulo de $\boldsymbol{S}$, que es $\boldsymbol{b_1}$, y construimos

$$\boldsymbol{a_1} = \frac{\boldsymbol{b_1}}{||\boldsymbol{b_1}||} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0,0) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right),$$

que será el primer vector del sistema buscado.

Paso 2:

Tomamos el siguiente vector de $\boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{b_2}$, y construimos el vector auxiliar

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y_2} =& \boldsymbol{b_2} - \mathsf{f}(\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{b_2})\boldsymbol{a_1} = \\ & (0,-1,1,1) - \mathsf{f}(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right), (0,-1,1,1)) \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right) = \\ & \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 1\right).\end{aligned}$$

Como $\boldsymbol{y_2} \neq \mathbf{0}$, tomamos

$$\boldsymbol{a_2} = \frac{\boldsymbol{b_2}}{||\boldsymbol{b_2}||} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 1\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{2}{\sqrt{10}}, \frac{2}{\sqrt{10}}\right),$$

que es el segundo vector del sistema buscado.

Paso 3:

Ahora tomamos el siguiente vector de $\boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{b_3}$, y construimos el vector auxiliar

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y_3} =& \boldsymbol{b_3} - \mathsf{f}(\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{b_3})\boldsymbol{a_1} - \mathsf{f}(\boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{b_3})\boldsymbol{a_2} = \\ & (1,0,1,1) - \mathsf{f}(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right), (1,0,1,1)) \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right) - \\ & \mathsf{f}(\left(\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{2}{\sqrt{10}}, \frac{2}{\sqrt{10}}\right), (1,0,1,1)) \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{2}{\sqrt{10}}, \frac{2}{\sqrt{10}}\right) = \\ & (0,0,0,0),\end{aligned}$$

y como $\boldsymbol{y_3} = \mathbf{0}$, en este paso no obtenemos ningún vector para el sistema buscado.

Paso 4:

Por último tomamos el siguiente vector de $\boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{b_4}$, y construimos el vector auxiliar

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y_4} =& \boldsymbol{b_4} - \mathsf{f}(\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{b_4})\boldsymbol{a_1} - \mathsf{f}(\boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{b_4})\boldsymbol{a_2} = \\ & (0,0,0,2) - \mathsf{f}(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right), (0,0,0,2)) \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right) - \\ & \mathsf{f}(\left(\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{2}{\sqrt{10}}, \frac{2}{\sqrt{10}}\right), (0,0,0,2)) \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{2}{\sqrt{10}}, \frac{2}{\sqrt{10}}\right) = \\ & \left(-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, -\frac{4}{5}, \frac{6}{5}\right).\end{aligned}$$

Como $\boldsymbol{y_4} \neq \boldsymbol{0}$, tomamos

$$\boldsymbol{a_3} = \frac{\boldsymbol{b_3}}{||\boldsymbol{b_3}||} = \frac{5}{3\sqrt{6}} \left(-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, -\frac{4}{5}, \frac{6}{5}\right) = \left(-\frac{1}{3\sqrt{6}}, \frac{1}{3\sqrt{6}}, -\frac{4}{3\sqrt{6}}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right).$$

El sistema ortonormal que buscábamos es

$$[\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_3}].$$

$\triangleleft$

Teorema 11.3.8 Sean $(\mathfrak{V}, \mathsf{f})$ un espacio euclídeo y $\mathfrak{F}$ un subespacio finito generado. Se verifican

1) Existe alguna base ortonormal de $\mathfrak{F}$.

2) Existe la proyección ortogonal de $\boldsymbol{x}$ sobre $\mathfrak{F}$, $\forall\, \boldsymbol{x} \in \mathfrak{V}$.

3) $\mathfrak{V} = \mathfrak{F} \oplus \mathfrak{F}^{\perp}$.

4) $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^{\perp\perp}$.

Demostración:
$\triangleleft$

Teorema 11.3.9 Sean $(\mathfrak{V}, \mathsf{f})$ un espacio euclídeo con $\mathfrak{V}$ de dimensión finita, $\mathfrak{F}$ un subespacio.

1) Existe alguna base ortonormal de $\mathfrak{V}$.

2) Existe la proyección ortogonal de $\boldsymbol{x}$ sobre $\mathfrak{F}$, $\forall\, \boldsymbol{x} \in \mathfrak{V}$.

3) $\mathfrak{V} = \mathfrak{F} \oplus \mathfrak{F}^{\perp}$.

4) $\mathcal{F} = \mathcal{F}^{\perp\perp}$.

Demostración:
Es consecuencia inmediata de 11.3.8 $\triangleleft$

Nota 11.3.10 Si el sistema $\boldsymbol{S} = [\boldsymbol{b_1}, \ldots, \boldsymbol{b_s}]$ de entrada en el algoritmo 11.3.6 es libre entonces se tiene que ninguno de los $\boldsymbol{b_i}$ es cero y que

$$\langle \boldsymbol{a_1}, \ldots, \boldsymbol{a_j} \rangle = \langle \boldsymbol{b_1}, \ldots, \boldsymbol{b_j} \rangle \,,\ j = 1, \ldots, s,$$

y además todos los vectores $\boldsymbol{y}$ intermedios calculados en 11.3.6 son distintos de cero, por lo que se podría simplificar el algoritmo y dejarlo en la forma que escribiremos a continuación. $\triangleleft$

Algoritmo 11.3.11 [Método de Gram-Schmidt II]

Entrada: $\boldsymbol{S} = [\boldsymbol{b_1}, \ldots, \boldsymbol{b_s}]$ sistema libre de $\boldsymbol{\mathcal{V}}$.
Salida: $\boldsymbol{T} = [\boldsymbol{a_1}, \ldots, \boldsymbol{a_s}]$ sistema ortonormal de $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ con $\langle \boldsymbol{a_1}, \ldots, \boldsymbol{a_j} \rangle = \langle \boldsymbol{b_1}, \ldots, \boldsymbol{b_j} \rangle \,,\ j = 1, \ldots, s$.

$t := 1$;
$\boldsymbol{S'} = [\ ]$;
$\boldsymbol{T} = [\ ]$;
$\boldsymbol{a_1} = \boldsymbol{b_1}/\,||\boldsymbol{b_1}||$;
if $s > 1$ {
    $\boldsymbol{S'} := [\boldsymbol{b_2}, \ldots, \boldsymbol{b_s}]$;
}
foreach $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{S'}$ {

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} - \sum_{k=1}^{t} \mathsf{f}(\boldsymbol{a_k}, \boldsymbol{x})\boldsymbol{a_k};$$

    $t := t + 1$;
    $\boldsymbol{a_t} := \boldsymbol{y}/\,||\boldsymbol{y}||$;
}
$\boldsymbol{T} := [\boldsymbol{a_1}, \ldots, \boldsymbol{a_t}]$;
$\triangleleft$

Nota 11.3.12 Por lo tanto para calcular la proyección ortogonal de un vector sobre un subespacio finito generado, basta construir una base ortonormal de dicho subespacio por alguno de los algoritmos de Gram-Schmidt y tomar el vector del subespacio cuyas coordenadas en dicha base son los coeficientes de Fourier del vector que se quiere proyectar.

Veremos a continuación una forma alternativa para calcular la proyección ortogonal sobre un subespacio finito generado para la que no es necesaria calcular una base ortonormal, sino resolver un sistema de ecuaciones lineales basado en la matriz de Gram de un sistema generador. ◁

Definición 11.3.13 Sean $(\boldsymbol{\mathcal{V}}, \mathsf{f})$ un espacio euclídeo, $\boldsymbol{S} = [\boldsymbol{a_1}, \ldots, \boldsymbol{a_s}]$ un sistema de $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ y $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{\mathcal{V}}$. Llamaremos *sistema de Gram* de $\boldsymbol{S}$ y $\boldsymbol{x}$ al sistema de ecuaciones lineales cuya matriz ampliada es

$$\left(\begin{array}{c|c} & \mathsf{f}(\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{x}) \\ \mathsf{f}_{\boldsymbol{S}} & \vdots \\ & \mathsf{f}(\boldsymbol{a_s}, \boldsymbol{x}) \end{array}\right)$$

◁

Proposición 11.3.14 Sean $(\boldsymbol{\mathcal{V}}, \mathsf{f})$ un espacio euclídeo, $\boldsymbol{S} = [\boldsymbol{a_1}, \ldots, \boldsymbol{a_s}]$ un sistema de $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ y $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{\mathcal{V}}$. Se tiene

1) El sistema de Gram de $\boldsymbol{S}$ y $\boldsymbol{x}$ es compatible.

2) Si $(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$ es una solución del sistema de Gram de $\boldsymbol{S}$ y $\boldsymbol{x}$, entonces $\alpha_1 \boldsymbol{a_1} + \cdots + \alpha_s \boldsymbol{a_s}$ es la proyección ortogonal de $\boldsymbol{x}$ sobre $\langle \boldsymbol{S} \rangle$.

◁

11.3.1 Mejor solución aproximada de un sistema lineal

Sean $n, m \in \mathbb{N}$. Consideremos un sistema de ecuaciones lineales con n ecuaciones y m incógnitas con matriz ampliada

$$\mathsf{A}' = \left(\mathsf{A} \mid \boldsymbol{b}\right).$$

Sea $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ el subespacio de $\mathbb{R}^n$ generado por las columnas de A. Es sencillo comprobar que el sistema es compatible si y sólo si $\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{\mathcal{F}}$.

Por ello, si el sistema es incompatible, tiene sentido lo siguiente,podríamos tomar como una especie de aproximación a lo que sería una solución los coeficientes de la proyección ortogonal de $\boldsymbol{b}$ sobre $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ como combinación lineal de las columnas de A para el producto escalar habitual sobre $\mathbb{R}^n$.

Definición 11.3.15 Sean $n, m \in \mathbb{N}$ y un sistema de ecuaciones lineales con n ecuaciones y m incógnitas con matriz ampliada

$$\mathsf{A}' = \left(\mathsf{A} \mid \boldsymbol{b}\right).$$

Sea $\mathcal{F}$ el subespacio de $\mathbb{R}^n$ generado por las columnas de A. Llamaremos *mejor solución aproximada* del sistema a los coeficientes de la proyección ortogonal de $\boldsymbol{b}$ sobre $\mathcal{F}$ como combinación lineal de las columnas de A para el producto escalar habitual sobre $\mathbb{R}^n$. ◁

En la práctica, el método más cómodo para realizar el cálculo de la mejor solución aproximada es el que utiliza el sistema de Gram, porque es inmediato ver que, con las notaciones de 11.3.15, el sistema de Gram para la proyección ortogonal que se menciona, tiene por matriz ampliada

$$\mathsf{A}^t\mathsf{A}' = \left(\mathsf{A}^t\mathsf{A} \mid \mathsf{A}^t\boldsymbol{b}\right),$$

cuyas soluciones son directamente las mejores soluciones aproximadas.

11.3.2 Aproximación por mínimos cuadrados

Sean $n, s \in \mathbb{N}$, $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función y $\boldsymbol{S} = [\boldsymbol{a_1}, \ldots, \boldsymbol{a_s}]$ un sistema de $\mathbb{R}^n$. Tratamos de hallar una función de la forma

$$\begin{array}{rrcl} l: & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & \alpha_0 + \alpha\boldsymbol{x} + \cdots + \alpha_n\boldsymbol{x_n} \end{array},$$

tal que

$$\sum_{i=1}^{s}(f(\boldsymbol{a_i}) - l(\boldsymbol{a_i}))^2$$

sea mínima.

Lo que hay que hacer es determinar los valores de $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ y es un sencillo ejercicio comprobar que han de ser precisamente la mejor solución aproximada del sistema cuya matriz ampliada es

$$\left(\begin{array}{c|c|c} 1 & & f(\boldsymbol{a_1}) \\ \vdots & \boldsymbol{S}_F & \vdots \\ 1 & & f(\boldsymbol{a_s}) \end{array}\right)$$

11.4 Espacios euclídeos de dimensión finita

11.4.1 Representación matricial de un producto escalar

Definición 11.4.1 Sean $(\mathcal{V}, \mathsf{f})$ un espacio euclídeo de dimensión finita y $\boldsymbol{B}$ una base de $\mathcal{V}$. Llamaremos matriz de f en la base $\boldsymbol{B}$ a la matriz de Gram $\mathsf{f}_{\boldsymbol{B}}$. ◁

Corolario 11.4.2 Sean $(\mathcal{V}, \mathsf{f})$ un espacio euclídeo de dimensión finita y $\boldsymbol{B} = [\boldsymbol{a_1}, \ldots, \boldsymbol{a_n}]$ una base de $\mathcal{V}$. Se verifican

1) $\mathsf{f}_{\boldsymbol{B}}$ es una matriz simétrica e inversible.

2) $\mathsf{f}_{\boldsymbol{B}}$ es la única matriz tal que $\forall\, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{\mathcal{V}}$, se tiene que

$$\mathsf{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y}_{\boldsymbol{B}} \mathsf{f}_{\boldsymbol{B}} \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{B}}.$$

◁

Proposición 11.4.3 Sean $(\boldsymbol{\mathcal{V}}, \mathsf{f})$ un espacio euclídeo de dimensión finita y $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{B'}$ bases de $\boldsymbol{\mathcal{V}}$. Se verifica

$$\mathsf{f}_{\boldsymbol{B'}} = \boldsymbol{B'}^{t}_{\boldsymbol{B}} \mathsf{f}_{\boldsymbol{B}} \boldsymbol{B'}_{\boldsymbol{B}}.$$

◁

Proposición 11.4.4 Sean $(\boldsymbol{\mathcal{V}}, \mathsf{f})$ un espacio euclídeo de dimensión finita con $\dim \boldsymbol{\mathcal{V}} = n \in \mathbb{N}$ y $\boldsymbol{B}$ una base de $\boldsymbol{\mathcal{V}}$. Son equivalentes

(i) $\boldsymbol{B}$ es una base ortonormal.

(ii) $\mathsf{f}_{\boldsymbol{B}} = \mathrm{I}_n$.

◁

Definición 11.4.5 Diremos que una matriz cuadrada A es ortogonal si es inversible y además $\mathsf{A}^{-1} = \mathsf{A}^t$. ◁

Lema 11.4.6 Si A es ortogonal, entonces también lo son A^{-1} y A^t. ◁

Proposición 11.4.7 Sean $(\boldsymbol{\mathcal{V}}, \mathsf{f})$ un espacio euclídeo de dimensión finita, $\boldsymbol{B}$ una base ortonormal de $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ y $\boldsymbol{B'}$ otra base de $\boldsymbol{\mathcal{V}}$. Son equivalentes

(i) $\boldsymbol{B'}$ es una base ortonormal.

(ii) $\boldsymbol{B'}_{\boldsymbol{B}}$ es una matriz ortogonal.

(iii) $\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{B'}}$ es una matriz ortogonal.

◁

Definición 11.4.8 Sean $n \in \mathbb{N}$ y A una matriz $n \times n$. Diremos que A es definida positiva, si la aplicación

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) &\longmapsto \boldsymbol{x} \mathsf{A} \boldsymbol{y} \end{aligned}$$

es un producto escalar sobre $\mathbb{R}^n$. ◁

Teorema 11.4.9 Sean $n \in \mathbb{N}$ y A una matriz $n \times n$. Son equivalentes

1) A es definida positiva.

2) A es simétrica y todos sus menores principales son estrictamente mayores que cero.

3) A es simétrica y todos sus valores propios son estrictamente mayores que cero.

$\triangleleft$

Proposición 11.4.10 Sean $(\mathcal{V}, \mathbf{f})$ un espacio euclídeo de dimensión finita y $\boldsymbol{B}$ una base de $\mathcal{V}$. Entonces $\mathbf{f}_{\boldsymbol{B}}$ es definida positiva. $\triangleleft$

11.5 Ejercicios

Ejercicio 11.1 Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ y

$$\begin{aligned} \mathbf{p} : \mathcal{C}^0([a,b]) \times \mathcal{C}^0([a,b]) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (f,g) &\longmapsto \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

a) Probar que $\mathbf{p}$ es un producto escalar.

b) Sean $n, m \in \mathbb{N}$ y supongamos que $a = 0$ y $b = 2\pi$. Calcular $\mathbf{p}(\operatorname{sen}(nt), \cos(nt))$.

Ejercicio 11.2 Sean $\mathcal{V}$ y $\mathcal{V}'$ dos $\mathbb{R}$-espacios vectoriales. Sean $\mathbf{f}$ un producto escalar sobre $\mathcal{V}'$ y $\mathbf{u} : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}'$ una aplicación lineal. Consideramos la aplicación

$$\begin{aligned} \mathbf{g} : \mathcal{V} \times \mathcal{V} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) &\longmapsto \mathbf{f}(\mathbf{u}(\boldsymbol{x}), \mathbf{u}(\boldsymbol{y})) \end{aligned}$$

a) Probar que si $\mathbf{u}$ es inyectiva, entonces $\mathbf{g}$ es un producto escalar sobre $\mathcal{V}$.

b) ¿Es cierto el recíproco?

Ejercicio 11.3 Calcular una base de $\mathbb{R}^3$, $[\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_3}]$ ortonormal para el producto escalar habitual de $\mathbb{R}^3$ y tal que $\boldsymbol{a_1} \in \langle (1,1,1) \rangle$.

Ejercicio 11.4 Se considera el producto escalar

$$\begin{aligned} \mathbf{f} : \mathbb{R}_2[x] \times \mathbb{R}_2[x] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (p,q) &\longmapsto \int_{-1}^1 p(t)q(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Encontrar una base ortonormal del espacio euclídeo $(\mathbb{R}_2[x], \mathbf{f})$.

Ejercicio 11.5 Se considera

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{f}: & \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} & \\ ((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)) \longmapsto & \begin{array}{l} 2x_1x_2 + 9y_1y_2 + 5z_1z_2 - 4x_1y_2 - 4y_1x_2 \\ +2x_1z_2 + 2z_1x_2 - 5y_1z_2 - 5z_1y_2 \end{array} \end{array}$$

a) Probar que $\mathbf{f}$ es un producto escalar.

b) Calcular una base ortonormal del espacio euclídeo $(\mathbb{R}^3, \mathbf{f})$.

c) Calcular una base de $\langle(0,1,0)\rangle^{\perp}$.

Ejercicio 11.6 Sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Se considera

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{f}: & \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} & \\ ((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)) \longmapsto & \begin{array}{l} x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 - \alpha x_1y_2 - \alpha y_1x_2 \\ +x_1z_2 + z_1x_2 - 3y_1z_2 - 3z_1y_2 \end{array} \end{array}$$

¿Para que valores de α es $\mathbf{f}$ un producto escalar?

Ejercicio 11.7 Sean $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & \alpha & 1 \end{pmatrix}$$

y la aplicación

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{f}: & \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} & \\ ((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)) \longmapsto & \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \mathsf{A} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Obtener los valores de α para que $\mathbf{f}$ sea un producto escalar

Ejercicio 11.8 Sea $\mathcal{M}$ el $\mathbb{R}$-espacio vectorial de las matrices reales cuadradas de orden 2. Consideramos la aplicación

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{g}: & \mathcal{M} \times \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R} & \\ \left(\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ z_1 & t_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ z_2 & t_2 \end{pmatrix} \right) \longmapsto & x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 \end{array}$$

a) Estudiar si $\mathbf{g}$ es un producto escalar.

b) Sea

$$\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathcal{M} \,/\, x + t = 0 \right\}.$$

probar que $\mathcal{F}$ es un subespacio de $\mathcal{M}$ y que la restricción $\mathsf{f} = \mathsf{g}|_{\mathcal{F}}$ es un producto escalar sobre $\mathcal{F}$.

c) Encontrar una base ortonormal del espacio euclídeo $(\mathcal{F}, \mathsf{f})$.

d) Obtener, si es posible, una base ortonormal de $\mathcal{M}$ a partir del sistema

$$[\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}].$$

Ejercicio 11.9 Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ con $\alpha > 0$. Se considera

$$\begin{array}{rl} \mathsf{f} : & \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R} \\ & ((x_1, y_1, z_1, t_1), (x_2, y_2, z_2, t_2)) \longmapsto \alpha x_1 x_2 + \alpha y_1 y_2 + \alpha z_1 z_2 + \alpha t_1 t_2 \end{array}$$

a) Probar que f es un producto escalar.

b) Calcular una base ortonormal de $(\mathbb{R}^4, \mathsf{f})$.

c) Calcular una base ortonormal para f del subespacio de $\mathbb{R}^4$

$$\mathcal{F} = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,/\, 2x - z = t = 0 \right\}.$$

d) Calcular una base de $\mathcal{F}^\perp$.

Ejercicio 11.10 Sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Se considera el sistema de $\mathbb{R}^4$

$$\boldsymbol{S} = [\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_3}, \boldsymbol{a_4}],$$

donde

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a_1} &= (1, \alpha, 0, 0), \boldsymbol{a_2} = (\alpha, -1, 0, 0), \\ \boldsymbol{a_3} &= (0, 0, 1, \alpha), \boldsymbol{a_4} = (0, 0, \alpha, -1). \end{aligned}$$

Probar que $\boldsymbol{S}$ es una base ortogonal de $\mathbb{R}^4$ para el producto escalar ordinario de $\mathbb{R}^4$ y para cada valor de α.

Ejercicio 11.11 Se considera el espacio euclídeo $(\mathbb{R}_2[x], \mathsf{f})$ con

$$\begin{aligned} \mathsf{f} : \mathbb{R}_2[x] \times \mathbb{R}_2[x] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (p, q) &\longmapsto \int_0^1 p(t)q(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

a) Calcular la matriz de Gram del sistema $[1, x, x^2]$.

b) Para la norma asociada a f, calcular $||1||$, $||x||$ y $||x^2||$.

c) Calcular una base de $\langle 1\rangle^\perp$.

d) Encontrar dos polinomios $p(x)$ y $q(x)$ con $p(x)$ de grado 1, tales que el sistema $[1, p(x), q(x)]$ sea ortonormal.

Ejercicio 11.12 Se considera el sistema de $\mathbb{R}^3$ con su estructura de espacio euclídeo habitual,

$$\boldsymbol{S} = [\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_3}],$$

donde

$$\boldsymbol{a_1} = (1, 0, 2)\,, \boldsymbol{a_2} = (2, 0, 1)\,, \boldsymbol{a_3} = (1, 1, 1)\,.$$

a) Calcular una base ortonormal, $[\boldsymbol{c_1}, \boldsymbol{c_2}]$ del subespacio $\langle \boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}\rangle$.

b) Encontrar un vector $\boldsymbol{c_3} \in \mathbb{R}^3$ de modo que $[\boldsymbol{c_1}, \boldsymbol{c_2}, \boldsymbol{c_3}]$ sea una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$.

c) Calcular bases para $\langle \boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}\rangle^\perp$ y para $\langle \boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}\rangle^{\perp\perp}$.

d) Calcular la proyección ortogonal de $(1, 3, -4)$ sobre $\left\langle \sqrt{5}\boldsymbol{c_1} + \boldsymbol{c_3}\right\rangle$.

Ejercicio 11.13 Sean la aplicación

$$\mathsf{g} : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$$

tal que

$$\begin{aligned}
&\mathsf{g}((x_1, y_1, z_1, t_1)\,, (x_2, y_2, z_2, t_2)) = \\
&= \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & t_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ t_2 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

el subespacio de $\mathbb{R}^4$

$$\mathfrak{F} = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,/\, x + z = y + t = 0\right\}.$$

y $\mathsf{g} = \mathsf{f}|_{\mathfrak{F}}$.

- Probar que $(\mathfrak{F}, \mathsf{g})$ es un espacio euclídeo.
- Calcular una base ortonormal de $\mathfrak{F}$.

Ejercicio 11.14 Sobre $\mathcal{C}^0([0,2\pi])$, se considera el producto escalar

$$\begin{aligned} \mathbf{p} : \mathcal{C}^0([0,2\pi]) \times \mathcal{C}^0([0,2\pi]) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (f,g) &\longmapsto \int_0^{2\pi} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

a) Hallar una base ortonormal del subespacio $\boldsymbol{\mathcal{F}} = \langle 1, \operatorname{sen} t, \cos t\rangle$.

b) Calcular los coeficientes de Fourier de $f(t) = t$ respecto del sistema ortonormal obtenido.

c) La función $f(t) = t$, ¿pertenece a $\boldsymbol{\mathcal{F}}$?

Ejercicio 11.15 Se considera el sistema

$$\left\{\begin{array}{cccc} 2x & & -z & = 1 \\ x & +y & & = 0 \\ 3x & -y & -2z & = 1 \end{array}\right.$$

a) Demostrar que es incompatible.

b) Encontrar las mejores soluciones aproximadas.

Ejercicio 11.16 Dado el sistema lineal con matriz ampliada

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2/\sqrt{5} & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1/\sqrt{5} & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

encontrar sus mejores soluciones aproximadas.

Ejercicio 11.17 Los beneficios de una empresa fueron

Año	Beneficios
1997	120
1998	90
2000	170

Sea t el tiempo transcurrido en años con $t = 0$ en el año 1997. A partir de los datos de la tabla, encontrar una función lineal $l(t)$ que ajuste según el criterio de aproximación por mínimos cuadrados a la función beneficios. Utilizar $l(t)$ para estimar que beneficios tuvo la empresa en el año 2002.

Ejercicio 11.18 Sea $a \in \mathbb{R}$ y $\mathbf{f}$ un producto escalar sobre $\mathbb{R}^3$ del cual se sabe que la base de $\mathbb{R}^3$

$$[(1,0,0)\,,(0,1,0)\,,(a,-a,1)]$$

es ortonormal. Calcular la matriz de Gram para $\mathbf{f}$ de la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

Ejercicio 11.19 Sea $\mathcal{M}$ el espacio de matrices reales 2×2. Se considera la aplicación

$$\begin{aligned} \mathsf{f} : \mathcal{M} \times \mathcal{M} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\mathsf{A}, \mathsf{B}) &\longmapsto \det \mathsf{A} + \det \mathsf{B} - \det(\mathsf{A} - \mathsf{B}) \end{aligned}$$

Encontrar un subespacio $\mathcal{F}$ de $\mathcal{M}$ de dimensión máxima, tal que la restricción $\mathsf{f}|_{\mathcal{F}}$ sea un producto escalar.

Ejercicio 11.20 Sean $n \in \mathbb{N}$ A una matriz simétrica de orden n. Probar que existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que la aplicación

$$\begin{aligned} \mathsf{f} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) &\longmapsto \boldsymbol{x}\mathsf{A}\boldsymbol{y} \end{aligned}$$

es un producto escalar.

Ejercicio 11.21 Sea $\boldsymbol{E} = [\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}]$, la base canónica de $\mathbb{R}^3$. De un producto escalar f sobre $\mathbb{R}^3$, sabemos que

a) $||e_1|| = \sqrt{2}$, $||e_2|| = \sqrt{3}$, $||e_3|| = \sqrt{7}$, para la norma asociada a f.

b) Los subespacios $\mathcal{F} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x+y+z=0\}$ y $\mathcal{G} = \langle \boldsymbol{e_1} \rangle$ son ortogonales

c) La proyección ortogonal de $(1,1,1)$ sobre $\mathcal{H} = \langle e_2 \rangle$ es $(0,3,0)$.

Calcular lo siguiente

a) La matriz de Gram respecto de f de $[E]$.

b) una base ortonormal del espacio euclídeo $(\mathbb{R}^3, \mathsf{f})$.

Ejercicio 11.22 Sea la aplicación

$$\begin{aligned} \mathsf{f} : \mathbb{R}_2[x] \times \mathbb{R}_2[x] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (p,q) &\longmapsto p(-1)q(-1) + p(1)q(1) + p(0)q(0) \end{aligned}$$

a) Probar que es un producto escalar sobre $\mathbb{R}_2[x]$.

b) Calcular la proyección ortogonal de $3 - 2x + x^2$ sobre $\langle x, x^2 \rangle$.

Índice alfabético